1. **Metoda Bisekcji**

Inicjalizacja Niech $[a_1, b_1]$ będzie przedziałem niepewności i niech $\epsilon > 0$ będzie parametrem dokładności. Niech n będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą taką, że $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \epsilon/(b_1 - a_1)$. Niech $k = 1$.

Krok główny
1. Niech $\alpha_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ i oblicz $\bar{f}'(\alpha^k)$. Jeśli $\bar{f}'(\alpha^k) = 0$, STOP; α^k jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym przypadku, przejdź: do Kroku 2. jeśli $\bar{f}'(\alpha^k) > 0$, a do Kroku 3. jeśli $\bar{f}'(\alpha^k) < 0$.
2. Niech $a_{k+1} = a_k$ i $b_{k+1} = \alpha_k$. Przejdź do Kroku 4.
3. Niech $a_{k+1} = \alpha_k$ i $b_{k+1} = b_k$. Przejdź do Kroku 4.
4. Jeśli $k = n$, to STOP; minimum leży w przedziale $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. W przeciwnym przypadku, zastąp k przez $k+1$ i powtórz Krok 1.

2. **Metoda poszukiwań prostych wykorzystująca ciąg Fibonacciego**

Inicjalizacja Wybierz akceptowalną dlugość końcowego przedziału poszukiwań $l > 0$ i stałą rozróżnialności $\epsilon > 0$. Niech $[a_1, b_1]$ będzie początkowym przedziałem poszukiwań i określmy liczbę iteracji n taką, że $F_n > (b_1 - a_1)/l$. Niech $\lambda_1 = a_1 + (F_{n-2}/F_n)(b_1 - a_1)$ i $\nu_1 = a_1 + (F_{n-1}/F_n)(b_1 - a_1)$. Oblicz $\bar{f}(\lambda_1)$ i $\bar{f}(\nu_1)$, podstaw $k = 1$ i przejdź do Kroku Głównego.

Krok główny
1. Jeśli $\bar{f}(\lambda_k) > \bar{f}(\nu_k)$, przejdź do Kroku 2; a jeśli $\bar{f}(\lambda_k) \leq \bar{f}(\nu_k)$, przejdź do Kroku 3.
2. Niech $a_{k+1} = \lambda_k$ i $b_{k+1} = b_k$. Ponadto, niech $\lambda_{k+1} = \nu_k$ a $\nu_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-1}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$. Jeśli $k = n - 2$), to przejdź do Kroku 5. W przeciwnym przypadku: oblicz $\bar{f}(\nu_{k+1})$ i przejdź do Kroku 4.
3. Niech $a_{k+1} = a_k$ i $b_{k+1} = \nu_k$. Ponadto, niech $\nu_{k+1} = \lambda_k$ a $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-2}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$. Jeśli $k = n - 2$), to przejdź do Kroku 5. W przeciwnym przypadku: oblicz $\bar{f}(\lambda_{k+1})$ i przejdź do Kroku 4.
4. Zwiększ licznik $k := k + 1$. i przejdź do Kroku 1.
5. Niech $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ i niech $\nu_n = \lambda_{n-1} + \epsilon$ Jeśli $\bar{f}(\lambda_n) > \bar{f}(\nu_n)$, to: $a_n = \lambda_n$ i $b_n = b_{n-1}$. W przeciwnym przypadku, jeśli $\bar{f}(\lambda_n) \leq \bar{f}(\nu_n)$, to: $a_n = a_{n-1}$ i $b_n = \lambda_n$. STOP, rozwiązanie optymalne leży w przedziale $[a_n, b_n]$.

3. **Metoda złotego podziału**

Inicjalizacja Wybierz dopuszczalną końcową długość przedziału niepewności $l > 0$. Niech $[a_1, b_1]$ będzie początkowym przedziałem niepewności i niech $\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$ a $\nu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, gdzie $\alpha = 0.618$. Oblicz $\bar{f}(\lambda_1)$ i $\bar{f}(\nu_1)$, podstaw $k = 1$ i przejdź do Kroku Głównego.

- krok Główny
  1. Jeśli $b_1 - a_1 < l$, to STOP; rozwiązanie optymalne leży w przedziale $[a_k, b_k]$. W przeciwnym przypadku: jeśli $\bar{f}(\lambda_k) > \bar{f}(\nu_k)$, to przejdź do Kroku 2; a jeśli $\bar{f}(\lambda_k \leq \bar{f}(\nu_k)$ to przejdź do Kroku 3.
  2. Niech $a_{k+1} = \lambda_k$ i $b_{k+1} = b_k$. Niech ponadto $\lambda_{k+1} = \nu_k$ a $\nu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$. Oblicz $\bar{f}(\nu_{k+1}$ i przejdź do Kroku 4.
  3. Niech $a_{k+1} = a_k$ i $b_{k+1} = \nu_k$. Niech ponadto $\nu_{k+1} = \lambda_k$ a $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Oblicz $\bar{f}(\lambda_{k+1}$ i przejdź do Kroku 4.
  4. Zastąp k przez $k + 1$ i przejdź do Kroku 1.

4. Ekspansja lub kontrakcja geometryczna z testem jednoskośnym

Założenia podstawowe: Oznaczmy $q(\tau) = \bar{f}(\tau) + f(x^k + \tau d^k)$. Zakłada się, że $q_0' < 0$, a więc dla każdego $\beta \in (0; 1)$, istnieje taki przedział $(0, \tau_1)$, że $q(\tau) < q_0 + \beta * q_0'\tau$, dla $\tau \in (0; \tau_1)$. Nie zakłada się natomiast, że $\lim_{\tau\to\infty} q(\tau) > q_0$, dlatego też dla ograniczenia liczby iteracji stosuje się $\tau \leq \tau_m$, lub też ograniczenie poprzez maksymalną liczbę I korzystnych obliczeń wartości funkcji.

Informacje wejściowe

- $q_0 = q(0)$ - wartość funkcji (funkcjonału) w punkcie początkowym
- $q_0' = \frac{dq(0)}{dt}$ - pochodna kierunkowa (nieunormowana) funkcji w punkcie początkowym
- τ_0 - krok początkowy; $\tau_0 > 0$ (może być przyjmowany według następującej zasady: $\tau_{0i+1} = \hat{\tau}_i$)
- τ_m - krok masymalny, $\tau_m > \tau_0$
- κ - współczynnik ekspansji, $\kappa > 1$
- β - współczynnik testu dwuskośnego, $0 < \beta < 0.5$
- I - dopuszczalna liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji (takich, że $q(\tau) \leq q_0$)
- K - dopuszczalna ogĺna liczba obliczeń wartości funkcji
- Δ - dopuszczalna minimalna wartość współczynnika kroku (ze względu na dokładność obliczeń); $\Delta = 10^{-20} - -10^{-40}$
- δ - pożądana dokładność względna określenia kroku optymalnego

Oznaczenia przyjęte w algorytmach obliczeń:

- τ - zmienna niezależna, współczynnik kroku
- $\hat{\tau}$ - dotychczas najkorzystniejsza wartość τ
- $\Delta\tau$ - oszacowanie górne bledu określenia kroku optymalnego
- q - wartość funkcji
- $\hat{q}$ - dotychczas najmniejsza wartość funkcji
- j - liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) \leq q_0$
- k - liczba niekorzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) > q_0$
- l - liczba obliczeń poprawiających wartość dotychczas minimalną

Uwagi

a) Jeśli zachodzi $q(\tau) \leq q_0 + \beta q_0'\tau$, to następuje ekspansja, czyli κ-krotne zwiększenie τ; po spełnieniu warunku $q(\tau) > q_) + \beta q_0'\tau$ – stop. Jeśli pierwotne $q(\tau) \geq q_0 + \beta q_0'\tau$, to następuje kontrakcja, czyli κ-krotne zmniejszenie τ, po spełnieniu warunku $q(\tau) < q_0 + \beta q_0'\tau$ – stop.

b) $\tau \to 0$ tylko wtedy, gdy $q_0' \to 0$.

5. Logarytmiczny złoty podział odcinka ze wstępną ekspansją lub kontrakcją geometryczną

Założenia podstawowe: Oznaczmy $q(\tau) = \bar{f}(\tau) + f(x^k + \tau d^k)$. Zakłada się, że $q_0^{'} < 0$, a więc dla każdego $\beta \in (0;1)$, istnieje taki przedział $(0, \tau_1)$, że $q(\tau) < q_0 + \beta * q_0^{'}\tau$, dla $\tau \in (0;\tau_1)$. Nie zakłada się natomiast, że $\lim_{\tau \to \infty} q(\tau) > q_0$, dlatego też dla ograniczenia liczby iteracji stosuje się $\tau \leq \tau_m$, lub też ograniczenie poprzez maksymalną liczbę I korzystnych obliczeń wartości funkcji.

Informacje wejściowe

- $q_0 = q(0)$ - wartość funkcji (funkcjonału) w punkcie początkowym
- $q_0^{'} = \frac{dq(0)}{dt}$ - pochodna kierunkowa (nieunormowana) funkcji w punkcie początkowym
- τ_0 - krok początkowy; $\tau_0 > 0$ (może być przyjmowany według następującej zasady: $\tau_{0i+1} = \hat{\tau}_i$)
- τ_m - krok masymalny, $\tau_m > \tau_0$
- κ - współczynnik ekspansji, $\kappa > 1$
- β - współczynnik testu dwuskośnego, $0 < \beta < 0.5$
- I - dopuszczalna liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji (takich, że $q(\tau) \leq q_0$)
- K - dopuszczalna oglna liczba obliczeń wartości funkcji
- Δ - dopuszczalna minimalna wartość współczynnika kroku (ze względu na dokładność obliczeń); $\Delta = 10^{-20} - -10^{-40}$
- δ - pożądana dokładność względna określenia kroku optymalnego

Oznaczenia przyjęte w algorytmach obliczeń:

- τ - zmienna niezależna, współczynnik kroku
- $\hat{\tau}$ - dotychczas najkorzystniejsza wartość τ
- $\Delta\tau$ - oszacowanie górne błedu określenia kroku optymalnego
- q - wartość funkcji
- $\hat{q}$ - dotychczas najmniejsza wartość funkcji
- j - liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) \leq q_0$
- k - liczba niekorzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) > q_0$
- l - liczba obliczeń poprawiających wartość dotychczas minimalną

Uwagi

a) W fazie wstępnej następuje κ-krotna ekspansja lub kontrakcja, jeli zachodzą warunki $\tau_2 := \kappa\tau_2$ oraz $q(\tau_2) \leq q_0 + 0.5q_0^{'}\tau_1$, $q(\tau_2) \geq q_0 + 0.5q_0^{'}\tau_2$ następuje złoty podział odcinka $[\tau_1, \tau_2]$ w skali logarytmicznej. Zatrzymanie następuje po osiągnięciu pożądanej dokładności względnej δ.

b) Wyznaczony w ten sposób krok τ dąży do zera tylko wtedy, gdy $q_0^{'} \to 0$.

6. Aproksymacja paraboliczna dwupunktowa z testem jednoskośnym

Założenia podstawowe: Oznaczmy $q(\tau) = \bar{f}(\tau) + f(x^k + \tau d^k)$. Zakłada się, że $q_0^{'} < 0$, a więc dla każdego $\beta \in (0; 1)$, istnieje taki przedział $(0, \tau_1)$, że $q(\tau) < q_0 + \beta * q_0^{'}\tau$, dla $\tau \in (0; \tau_1)$. Nie zakłada się natomiast, że $\lim_{\tau \to \infty} q(\tau) > q_0$, dlatego też dla ograniczenia liczby iteracji stosuje się $\tau \leq \tau_m$, lub też ograniczenie poprzez maksymalną liczbę I korzystnych obliczeń wartości funkcji.

Informacje wejściowe

- $q_0 = q(0)$ - wartość funkcji (funkcjonału) w punkcie początkowym
- $q_0^{'} = \frac{dq(0)}{dt}$ - pochodna kierunkowa (nieunormowana) funkcji w punkcie początkowym
- τ_0 - krok początkowy; $\tau_0 > 0$ (może być przyjmowany według następującej zasady: $\tau_{0i+1} = \hat{\tau}_i$)
- τ_m - krok masymalny, $\tau_m > \tau_0$
- κ - współczynnik ekspansji, $\kappa > 1$
- β - współczynnik testu dwuskośnego, $0 < \beta < 0.5$
- I - dopuszczalna liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji (takich, że $q(\tau) \leq q_0$)
- K - dopuszczalna oglna liczba obliczeń wartości funkcji
- Δ - dopuszczalna minimalna wartość współczynnika kroku (ze względu na dokładność obliczeń); $\Delta = 10^{-20} - -10^{-40}$
- δ - pożądana dokładność względna określenia kroku optymalnego

Oznaczenia przyjęte w algorytmach obliczeń:

- τ - zmienna niezależna, współczynnik kroku
- $\hat{\tau}$ - dotychczas najkorzystniejsza wartość τ
- $\Delta\tau$ - oszacowanie górne błedu określenia kroku optymalnego
- q - wartość funkcji
- $\hat{q}$ - dotychczas najmniejsza wartość funkcji
- j - liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) \leq q_0$
- k - liczba niekorzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) > q_0$
- l - liczba obliczeń poprawiających wartość dotychczas minimalną

Uwagi:

a) Poszukiwanie zaczyna się od maksymalnego (zadanego) kroku τ_m. Jeśli zachodzi $q(tau_m) > q_0 + q_0^{'}\tau_m$, to następuje przybliżenie $\hat{\tau}$ przez aproksymację paraboliczną $q(\tau)$ opartą na danych q_0, $q_0^{'}$, $q(\tau_m)$ według wzoru:

$$\hat{\tau} = \frac{-q_0^{'}\tau^2}{2(q(\tau) - q_0 - q_0^{'}\tau}$$

co daje kontrakcję paraboliczną dla $\beta \in (0; 0.5)$. Po kilku powtórzeniach kontrakcji parabolicznej osiągane jest τ takie, że $q(\tau) leq \beta q_0^{'}\tau$ – stop. Jeśli $q(\tau_m) \leq q_0 + q_0^{'}\tau_m$, to wtedy przyjmujemy $\hat{\tau} = \tau_m$.

b) Zbieżność algorytmu wynika bezpośrednio ze sposobu wyznaczania kroku $\hat{\tau}$

7. Aproksymacja paraboliczna z testem dwuskośnym

Założenia podstawowe: Oznaczmy $q(\tau) = \bar{f}(\tau) + f(x^k + \tau d^k)$. Zakłada się, że $q_0^{'} < 0$, a więc dla każdego $\beta \in (0; 1)$, istnieje taki przedział $(0, \tau_1)$, że $q(\tau) < q_0 + \beta * q_0^{'}\tau$, dla $\tau \in (0; \tau_1)$. Nie zakłada się natomiast, że $\lim_{\tau \to \infty} q(\tau) > q_0$, dlatego też dla ograniczenia liczby iteracji stosuje się $\tau \leq \tau_m$, lub też ograniczenie poprzez maksymalną liczbę I korzystnych obliczeń wartości funkcji.

Informacje wejściowe

- $q_0 = q(0)$ - wartość funkcji (funkcjonału) w punkcie początkowym
- $q_0^{'} = \frac{dq(0)}{dt}$ - pochodna kierunkowa (nieunormowana) funkcji w punkcie początkowym
- τ_0 - krok początkowy; $\tau_0 > 0$ (może być przyjmowany według następującej zasady: $\tau_{0i+1} = \hat{\tau}_i$)
- τ_m - krok masymalny, $\tau_m > \tau_0$
- κ - współczynnik ekspansji, $\kappa > 1$
- β - współczynnik testu dwuskośnego, $0 < \beta < 0.5$
- I - dopuszczalna liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji (takich, że $q(\tau) \leq q_0$)
- K - dopuszczalna oglna liczba obliczeń wartości funkcji
- Δ - dopuszczalna minimalna wartość współczynnika kroku (ze względu na dokładność obliczeń); $\Delta = 10^{-20} - -10^{-40}$
- δ - pożądana dokładność względna określenia kroku optymalnego

Oznaczenia przyjęte w algorytmach obliczeń:

- τ - zmienna niezależna, współczynnik kroku
- $\hat{\tau}$ - dotychczas najkorzystniejsza wartość τ
- $\Delta\tau$ - oszacowanie górne błedu określenia kroku optymalnego
- q - wartość funkcji
- $\hat{q}$ - dotychczas najmniejsza wartość funkcji
- j - liczba korzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) \leq q_0$
- k - liczba niekorzystnych obliczeń wartości funkcji takich, że $q(\tau) > q_0$
- l - liczba obliczeń poprawiających wartość dotychczas minimalną

Uwaga Zasada działania jest podobna, jak algorytmu z testem jednoskośnym. Jako warunek zatrzymania wymagane jest spełnienie testu dwuskośnego:

$$q_0 + (1 - \beta)q_0^{'}\tau \leq q(\tau) \leq q_0 + \beta q_0^{'}\tau$$