Algorytm A*

Opracowanie: Joanna Raczyńska

1.Wstęp

Algorytm A* jest heurystycznym algorytmem służącym do znajdowania najkrótszej ścieżki w grafie. Jest to algorytm zupełny i optymalny, co oznacza, że zawsze zostanie znalezione najlepsze rozwiązanie. W metodzie tej istnieje zorganizowany model pamięciowy, który gwarantuje że każdy punkt może zostać odwiedzony. A* jest przykładem metody „najpierw najlepszy". Algorytm A* działa najlepiej, gdy przestrzeń przeszukiwań jest przestrzenią drzewiastą.

2. Działanie algorytmu

Działanie algorytmu oparte jest na minimalizacji funkcji celu $f(x)$, zdefiniowanej jako suma funkcji kosztu ($g(x)$) oraz funkcji heurystycznej ($h(x)$).

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

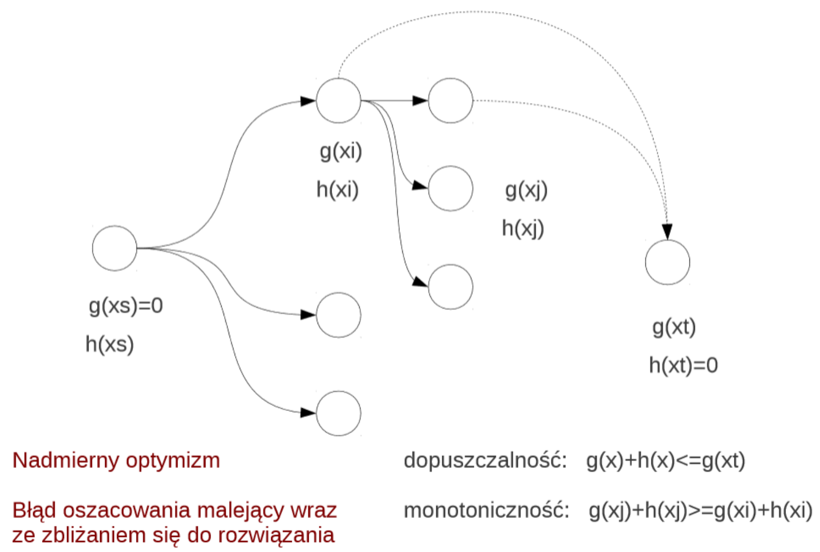
W każdym kroku algorytm A* przedłuża już utworzoną ścieżkę o kolejny wierzchołek grafu, wybierając taki, w którym wartość funkcji f będzie najmniejsza.

Funkcja $g(x)$ określa rzeczywisty koszt dojścia do punktu x (suma wag krawędzi które należą już do ścieżki oraz wagi krawędzi łączącej aktualny węzeł z x).

Funkcja $h(x)$ jest to funkcja zwana funkcją heurystyczną. Oszacowuje ona (zawsze optymistycznie) koszt dotarcia od punktu x do wierzchołka docelowego.

Prawidłowa funkcja heurystyczna musi spełniać dwa warunki:

- Warunek dopuszczalności: $g(x) + h(x) \leq g(x_t)$
- Warunek monotoniczności: $g(x_j) + h(x_j) \geq g(x_i) + h(x_i)$
  gdzie $j > i$, a x_t oznacza punkt końcowy

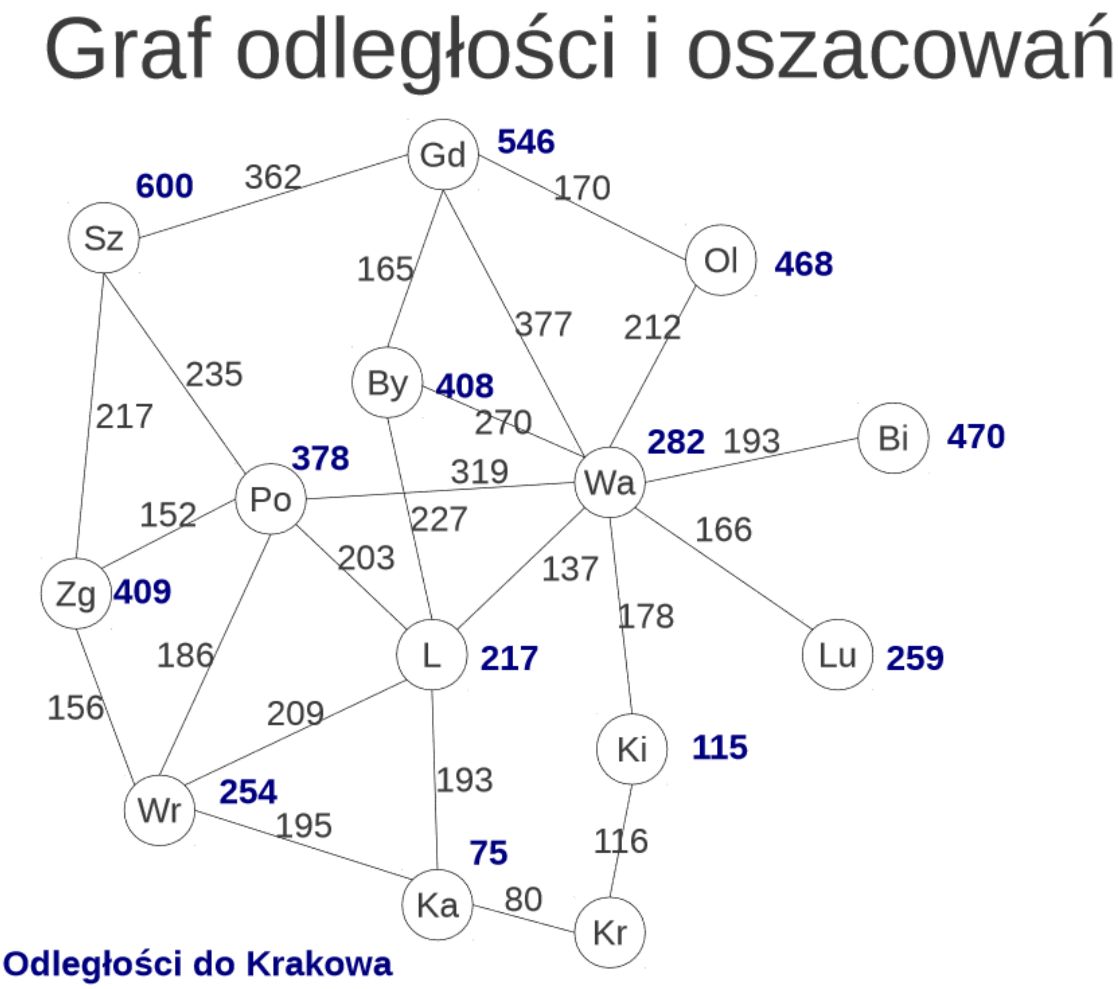


Warunek dopuszczalności to wymieniony już wcześniej nadmierny optymizm. Funkcja heurystyczna to taka „dobra wróżka”, która niedoszacowuje gdy minimalizujemy koszt, a przeszacowuje gdy maksymalizujemy zysk.

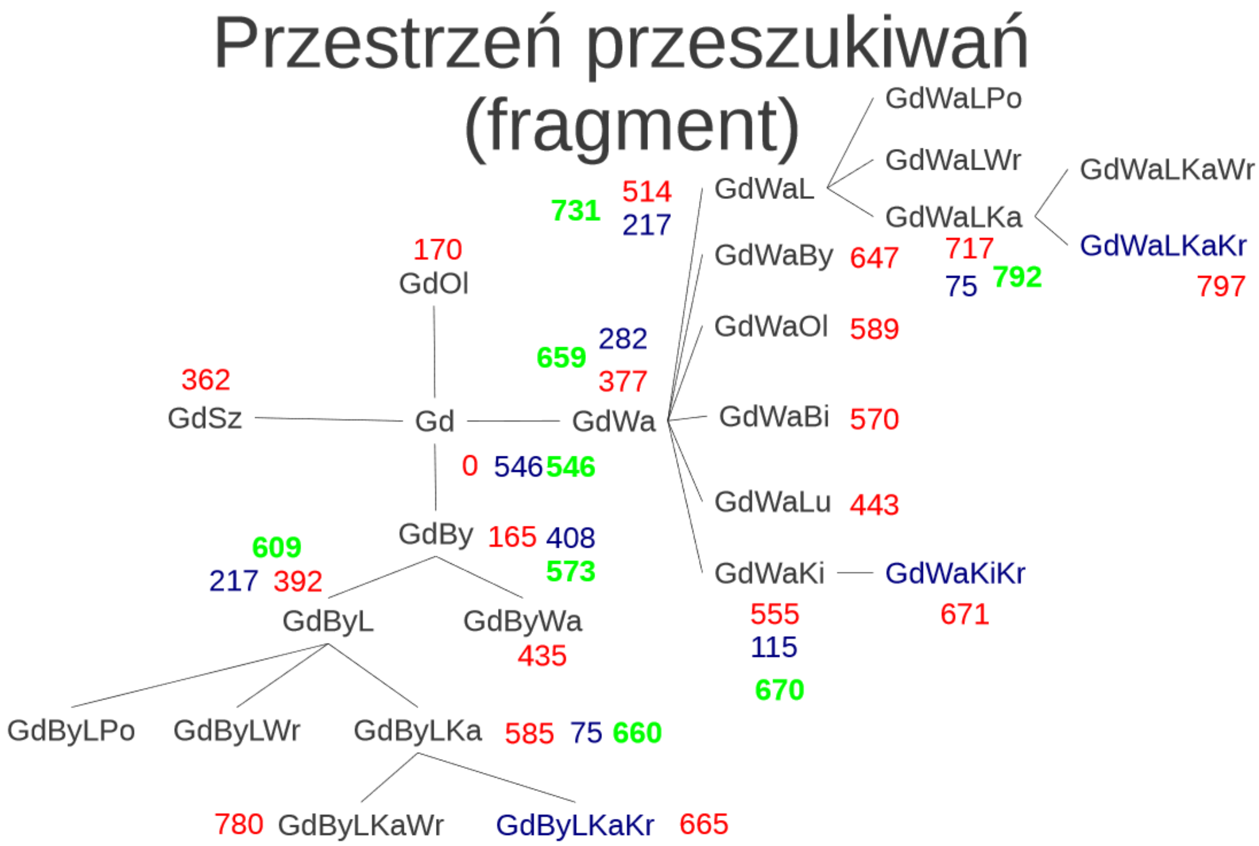
Warunek monotoniczności mówi o tym, że im bardziej przybliżamy się do rozwiązania, tym oszacowanie musi być coraz mniej optymistyczne.

3. Przykład – najkrótsza droga z Gdańska do Krakowa

Aby lepiej zobrazować działanie algorytmu, rozważmy przykład poszukiwania najkrótszej drogi prowadzącej z Gdańska do Krakowa. Poniższy graf przedstawia dozwolone połączenia między miastami oraz odległości między nimi. Kolorem granatowym oznaczono odległości (w linii prostej) od danego miasta do Krakowa.



Taki graf wydaje się intuicyjny i czytelny. Jeśli jednak zechcemy zbudować graf problemu z punktu widzenia algorytmu A*, będzie on wyglądał zupełnie inaczej. Przestrzenią przeszukiwań algorytmu jest bowiem przestrzeń niepełnych ścieżek rozpoczynających się w Gdańsku, nie zaś, jak mogłoby się w pierwszej chwili wydawać, graf miast. Poniższy graf przedstawia fragment przestrzeni przeszukiwań algorytmu.

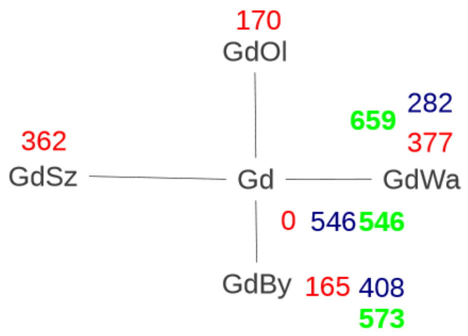


Czerwone liczby oznaczają rzeczywiste długości opisywanych ścieżek. Obliczamy je korzystając z pierwszego grafu. I tak na przykład, obliczając długość ścieżki z Gdańska do Warszawy przez Bydgoszcz sumujemy odległości: z Gdańska do Bydgoszczy (165) oraz z Bydgoszczy do Warszawy (270) i otrzymujemy liczbę 435. Oznacza to tyle, że jadąc z Gdańska do Warszawy przez Bydgoszcz dozwoloną trasą, pokonamy dokładnie 435km. Czerwone liczby oznaczają więc naszą funkcję kosztu $g(x)$.

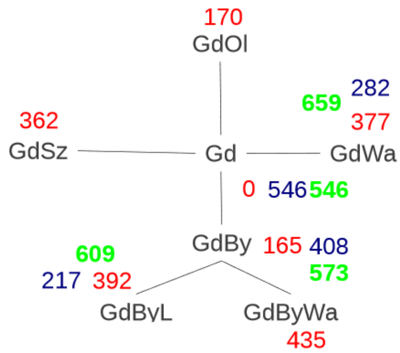
Liczby granatowe, podobnie jak na pierwszym rysunku, oznaczają odległość w linii prostej z miasta kończącego ścieżkę do Krakowa. Jak wszyscy wiemy, między dwoma punktami nie można wyznaczyć krótszej drogi niż linia prosta. Oznacza to tyle, że np. znajdując się w węźle GdWaKi, po pokonaniu dokładnie 555 km (z Gdańska przez Warszawę do Kielc) do Krakowa mamy jeszcze minimum 115km, co stanowi dolne oszacowanie odległości koniecznej do osiągnięcia celu. Granatowe liczby opisują więc naszą „dobrą wróżkę” - funkcję heurystyczną $h(x)$.

Liczby zielone określają dla każdego węzła wartość sumaryczną funkcji kosztu i funkcji heurystycznej – czyli naszą funkcję celu którą będziemy minimalizować - $f(x)$.

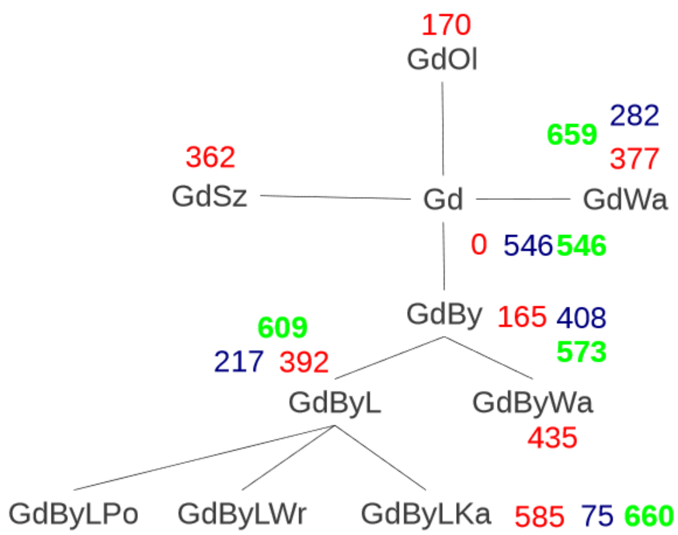
Zasymulujmy teraz działanie algorytmu A* dla danego grafu (przy założeniu że pominięte w grafie węzły mają gorsze wartości funkcji celu). Rozpoczynamy w Gdańsku, a następnie w każdym kolejnym kroku dodajemy do ścieżki jedno miasto, przyjmując za kryterium jak najmniejszą wartość funkcji celu. W pierwszym kroku mamy więc do wyboru: pojechać z Gdańska do Bydgoszczy ($f(x) = 573$) lub z Gdańska do Warszawy ($f(x) = 659$) (dla uproszczenia pominęliśmy ścieżki z Gdańska do Olsztyna i Szczecina).



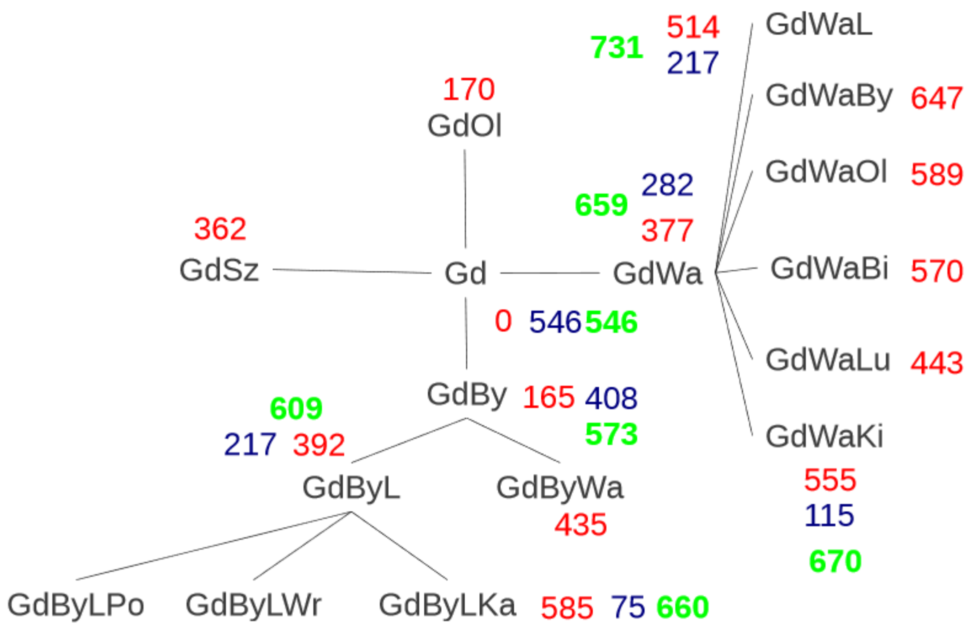
Wybieramy więc ścieżkę GdBy ($f(x) = 573$). Następnie rozwijamy węzeł GdBy, co oznacza obliczenie wartości funkcji celu dla węzłów GdByL i GdByWa. Pozwala nam to wybrać optymalny węzeł GdByL($f(x) = 609$).



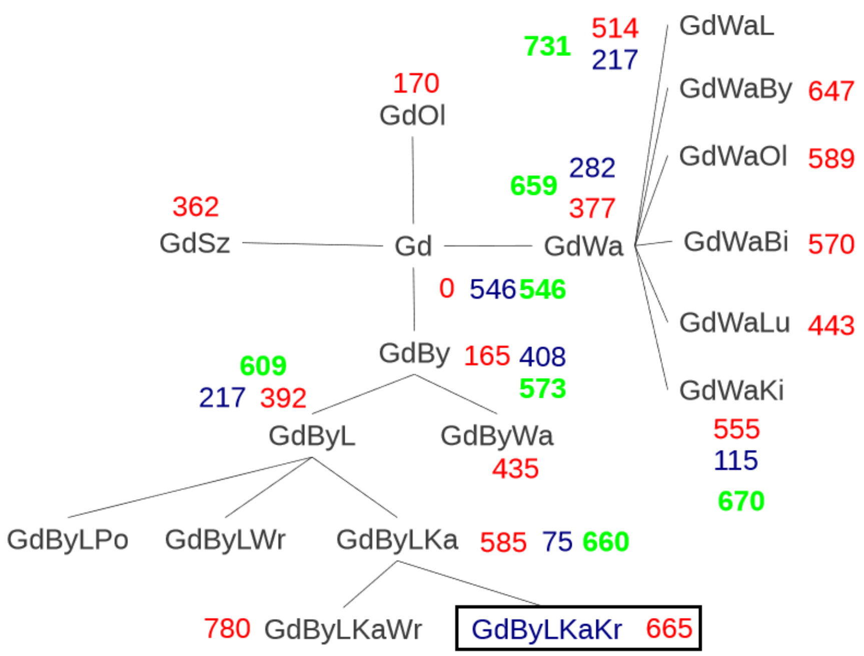
Po jego rozwinięciu otrzymujemy wartość optymalną przedłużonej ścieżki GdByLKa ($f(x) = 660$).



I tutaj następuje krok algorytmu, na który należy zwrócić uwagę. W aktualnej ścieżce, optymalna wartość ostatniego nierozwiniętego węzła to 660. Należy jednak pamiętać, że węzeł który nie został rozwinięty na samym początku algorytmu (GdWa) ma mniejszą wartość funkcji celu ($f(x) = 659$). Dlatego w podanej sytuacji algorytm wykona nawrót, a następnym rozwiniętym węzłem nie będzie GdByLKa a GdWa.

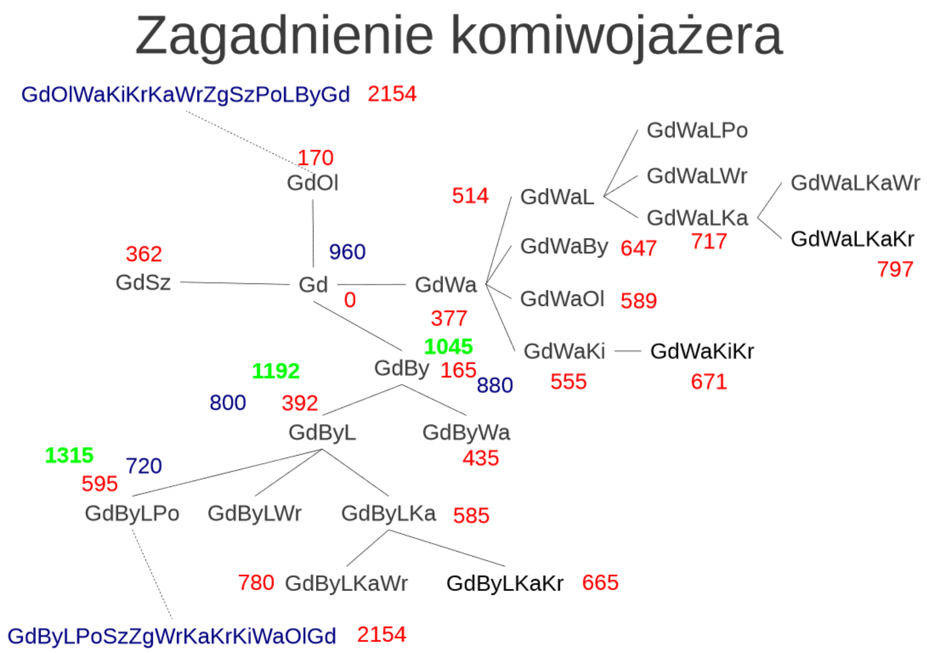


Jak się okazuje po rozwinięciu tego węzła, wszystkie wartości jego potomków mają większą wartość funkcji celu niż ścieżka GdByLKa ($f_{min}(x) = 670 > 660$), więc nastąpi powrót do ścieżki GdByLKa, jednakże aby uniknąć lokalności i zachłanności w działaniu algorytmu, konieczne jest branie pod uwagę wszystkich nierozwiniętych węzłów. Ostatecznie rozwijając węzeł GdByLKa dochodzimy do optymalnego rozwiązania GdByLKaKr ($f(x) = g(x) = 665$) .

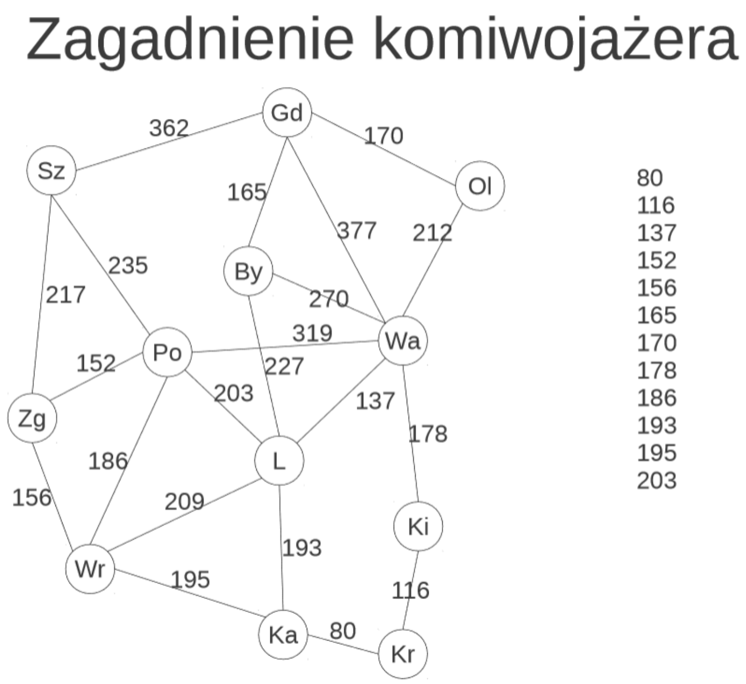


4. Przykłady innych zastosowań algorytmu A*

Algorytm A* może również posłużyć do rozwiązania problemu komiwojażera. Podobnie jak poprzednio przestrzeń przeszukiwań zawierać będzie ścieżki. Możemy wówczas sprowadzić problem do problemu poszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie.



Wiemy, że musimy stworzyć ścieżkę zawierającą n krawędzi, oznaczmy więc jako k liczbę krawędzi, które już wykorzystaliśmy. Wtedy funkcją heurystyczną może być na przykład iloczyn liczby krawędzi pozostałych do wykorzystania $(n-k)$ i wagi najtańszej krawędzi – wtedy taka funkcja na pewno będzie nadmiernie optymistyczna. Dokładniejsze oszacowanie daje nam funkcja heurystyczna zdefiniowana jako suma $(n-k)$ najmniejszych wag niewykorzystanych jeszcze krawędzi.



Innym sposobem rozwiązania problemu komiwojażera za pomocą algorytmu heurystycznego jest przekształcenie problemu do problemu sortowania. Przestrzenią przeszukiwań jest wówczas przestrzeń permutacji miast. Taka struktura przestrzeni nie jest jednak strukturą drzewiastą, więc nie mówimy tu o funkcji heurystycznej, a co za tym idzie nie można w tym przypadku użyć algorytmu A*.

Kolejnym przykładem zastosowania algorytmu może być rozwiązanie łamigłówki „piętnastka”. Przestrzenią przeszukiwań będą wówczas sekwencje przekształceń prowadzących do rozwiązania, W każdym kroku mówimy w którą stronę ma się przesunąć puste miejsce. Przestrzeń przeszukiwań staje się więc przestrzenią drzewiastą. Funkcją kosztu będzie liczba ruchów jakie wykonaliśmy do tej pory. Funkcją heurystyczną może być wartość mówiąca o tym ile kwadratów jest „nie na swoim miejscu”. Wtedy jeśli np. 13 kwadratów nie jest na swoim miejscu, to trzeba wykonać minimum 13 ruchów by je prawidłowo ustawić. Warunek dopuszczalności jest więc spełniony. Łatwo zauważyć, że również warunek monotoniczności jest spełniony, gdyż albo przesuniemy kwadracik (koszt +1) i on wejdzie na swoje miejsce (funkcja heurystyczna -1), albo przesuniemy kwadracik (koszt +1) i on nie wejdzie na swoje miejsce (funkcja heurystyczna bez zmian). Aby uzyskać dokładniejsze oszacowanie, możemy policzyć dla każdego kwadracika liczbę ruchów potrzebną aby przesunąć go na swoje miejsce, tak jakby na planszy nie było żadnego innego kwadracika.

Przykład - piętnastka

1		3	12
10	11	4	13
5	6	7	14
8	9	2	15

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

Reprezentacja rozwiązania – sekwencja ruchów

Funkcja kosztu – długość sekwencji 30

Funkcja heurystyczna
Liczba ruchów, którą trzebaby wykonać
gdyby kafelki sobie nie przeszkadzały

2:4	10:2
4:2	11:2
5:4	12:4
6:2	13:2
7:2	14:2
8:2	15:2

5. Bibliografia

1. Notatki z wykładu przedmiotu ALHE, prowadzonego przez prof. Jarosława Arabasa w semestrze letnim 2015/2016
2. Slajdy wykładowe przedmiotu ALHE (źródło wiedzy i ilustracji)
3. Wikipedia