ADAPTACYJNE PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW
LABORATORIUM

Ćwiczenie 1

Modelowanie i analiza widmowa dyskretnych sygnałów losowych

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z wybranymi algorytmami filtracji adaptacyjnej stosowanymi do estymacji parametrów sygnałów modelowanych procesami ARMA oraz przedstawienie nowoczesnych metod analizy widmowej opartych na liniowym modelowaniu dyskretnych procesów losowych.

2. ZAKRES BADAŃ

W pierwszej części ćwiczenia badane są dwa algorytmy adaptacyjnej identyfikacji modeli ARMA sygnału losowego:

- blokowy transwersalny algorytm typu LS w wersji Kay'a;
- rekursywny transwersalny algorytm oparty na kryterium największej wiarygodności (tzw. algorytm Friedlandera).

W drugiej części ćwiczenia badane są natomiast metody analizy widmowej oparte na autoregresyjnym modelu dyskretnego procesu losowego. Badania szerokiej klasy algorytmów modelowania AR zaimplementowanych w pakiecie AFRICA przeprowadzone są dla różnych typów sygnałów syntetycznych i rzeczywistych (sygnał EEG). W szczególności badane są adaptacyjne właściwości algorytmów na przykładzie sygnałów niestacjonarnych (sygnał sinusoidalny o liniowo narastającej częstotliwości (*chirp*) oraz sygnał EEG).

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Model ARMA dyskretnego procesu losowego

Losowy proces autoregresji z ruchomą średnią ARMA (*AutoRegressive Moving Average*) opisany jest następującym równaniem różnicowym:

$$X(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i X(n-i) + W(n) + \sum_{j=1}^{q} b_j W(n-j), \tag{1}$$

gdzie $W(n)$ jest szumem białym, a liczby p i q określają rząd modelu – ozn. ARMA(p, q). Innymi słowy jest to proces otrzymywany na wyjściu filtru liniowego o transmitancji $H(z)$, pobudzanego szumem $W(n)$. Transmitancja $H(z)$ ma przy tym postać:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_p z^{-p}}. \tag{2}$$

Filtr o transmitancji $H(z)$ nazywany jest filtrem modelującym. Jeśli filtr ten spełnia warunek minimalnofazowości, to wówczas sensownym staje zagadnienie filtru odwrotnego, rozumianego jako filtr o transmitancji $G(z) = 1/H(z) = A(z)/B(z)$. Jeśli na wejście takiego filtru podamy sygnał $X(n)$, to na jego wyjściu otrzymamy szum biały. Mamy wtedy do czynienia z problemem wybielania sygnałów, który sprowadza się do znalezienia transmitancji filtru odwrotnego. Jeśli transmitancja $H(z)$ filtru modelującego jest znana lub inaczej znany jest model sygnału $X(n)$, to tak postawione zadanie jest trywialne. W praktyce jednak model sygnału $X(n)$ nie jest znany. Co więcej nie ma żadnej pewności, że obserwowany sygnał spełnia równanie modelu ARMA (1). W takiej sytuacji problem wybielania sygnału wiąże się nierozerwalnie z problemem modelowania, tzn. znalezienia takiego filtru liniowego o transmitancji $\hat{B}(z)/\hat{A}(z)$, którego wyjście przy pobudzaniu szumem białym na wejściu jest w jakimś sensie przybliżeniem obserwowanego sygnału $X(n)$. Filtr wybielający ma wówczas transmitancję $\hat{G}(z) = \hat{A}(z)/\hat{B}(z)$.

Przedstawiony powyżej schemat rozwiązania problemu wybielania poprzez uprzednie modelowanie ma znaczenie czysto teoretyczne i wyłącznie poglądowe. W praktyce bowiem zdecydowana większość algorytmów znajdowania modelu ARMA dla obserwowanego sygnału pracuje w odwróconej kolejności. Model znajdowany jest poprzez uprzednie wybielanie sygnału, którego obserwowane próbki przetwarzane są przez filtr adaptacyjny w taki sposób, aby na wyjściu tego filtru pojawił się sygnał błędu o właściwościach możliwie najbardziej zbliżonych do szumu białego. Filtr modelujący uzyskuje się wtedy poprzez odpowiednie odwrócenie filtru wybielającego. Dowodzi to, że z praktycznego punktu widzenia problemy wybielania i modelowania sygnałów są ze sobą nierozerwalnie związane i należy je traktować łącznie.

3.2 Adaptacyjne algorytmy modelowania procesów losowych ARMA

W ćwiczeniu badane są dwa algorytmy modelowania ARMA. Pierwszym z nich jest blokowy algorytm transwersalny oparty na kryterium LS. Istotą tego algorytmu jest połączenie rozwiązania nadokreślonego układu zmodyfikowanych równań Yula-Walkera (estymacja parametrów AR) z metodą Kay'a estymacji parametrów MA w modelu ARMA. Algorytm ten jest opisany szczegółowo w [1, 2].

Drugim algorytmem jest rekursywny algorytm oparty na kryterium największej wiarygodności [3]. Ze względu na duże znaczenie praktyczne w klasie algorytmów estymacji parametrów procesów ARMA zostanie on omówiony dokładniej.
Przyjmujemy następujące oznaczenia:
$\boldsymbol{\theta} = [-a_1, \ldots, -a_p, b_1, \ldots, b_q]^T$ - wektor parametrów modelu,
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = [-\hat{a}_1(n), \ldots, -\hat{a}_p(n), \hat{b}_1(n), \ldots, \hat{b}_q(n)]^T$ - wektor estymat parametrów modelu,
$\boldsymbol{\nu}_n = [x(n-1), \ldots, x(n-p), e(n-1), \ldots, e(n-q)]^T$ - wektor danych (obserwacji),
$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_n = [\tilde{x}(n-1), \ldots, \tilde{x}(n-p), \tilde{e}(n-1), \ldots, \tilde{e}(n-q)]^T$ - wektor danych po filtracji.
Zakładając, że znamy już wektor estymat parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1}$ wyznaczony dla poprzednich obserwacji możemy, zgodnie z ogólną zasadą algorytmów rekursywnych, wyznaczyć wektor estymat $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ po zarejestrowaniu obserwacji $x(n)$. Bezpośrednio przed zarejestrowaniem obserwacji $x(n)$ dostępne są następujące wielkości: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1}$, $\boldsymbol{\nu}_n$, $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_n$ oraz macierz

$$\boldsymbol{Q}_{n-1} = \mathrm{E}[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} - \boldsymbol{\theta})^T], \tag{3}$$

będąca macierzą kowariancji błędu.
Po zarejestrowaniu próbki $x(n)$ możemy zatem wyznaczyć błąd predykcji:

$$\varepsilon(n) = x(n) - \boldsymbol{\nu}_n^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} \tag{4}$$

oraz macierz kowariancji błędu w chwili n:

$$\boldsymbol{Q}_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\boldsymbol{Q}_{n-1} - \boldsymbol{Q}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{\nu}}_n\tilde{\boldsymbol{\nu}}_n^T\boldsymbol{Q}_{n-1}}{\lambda_n + \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{n-1}^T\boldsymbol{Q}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{n-1}}. \tag{5}$$

Rola parametru λ_n zostanie wyjaśniona niżej.
Główna rekursja na parametry modelu przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} + \boldsymbol{Q}_n\tilde{\boldsymbol{\nu}}_n\varepsilon(n). \tag{6}$$

Po wyznaczeniu bieżącej wartości wektora estymat $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ możemy wyznaczyć błąd resztkowy:

$$e(n) = x(n) - \boldsymbol{\nu}_n^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_n, \tag{7}$$

który występuje w wektorze obserwacji $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$. Mając z kolei wektor $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$ możemy wyznaczyć wektor danych po filtracji $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{n+1}$ do następnej iteracji. W tym celu należy dokonać następującej operacji filtracji:

$$\tilde{x}_n(z) = \frac{1}{\hat{B}_n(kz^{-1})}x_n(z), \qquad \tilde{e}_n(z) = \frac{1}{\hat{B}_n(kz^{-1})}e_n(z), \tag{8}$$

gdzie

$$\hat{B}_n(kz^{-1}) = 1 + k\hat{b}_1(n)z^{-1} + k^2\hat{b}_2(n)z^{-2} + \cdots + k^q\hat{b}_q(n)z^{-q}. \tag{9}$$

Rolą stałej k jest zapewnienie stabilności filtru. W wersji algorytmu zaimplementowanej w pakiecie AFRICA wartość tej stałej jest dobierana automatycznie.

Występujący wcześniej parametr λ_n jest pewnym parametrem wagowym nazywanym również wykładniczym współczynnikiem zapominania. Często przyjmuje się, że $\lambda_n = \text{const}$. W wersji algorytmu badanej w ćwiczeniu przyjęto jednak, że $\lambda_n = (1-\beta)\lambda_{n-1} + \beta$, gdzie $\lambda_0 = 0,95$, β zaś jest stałą dodatnią o małej wartości ($\beta < 1$), która ma jednakże istotny wpływ na szybkość zbieżności algorytmu.

3.3 Analiza widmowa oparta na modelowaniu autoregresyjnym

Proces autoregresyjny AR jest szczególnym przypadkiem procesu ARMA rozważanego w punkcie 3.1. Losowy dyskretny proces autoregresji opisany jest następującym równaniem:

$$X(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i X(n-i) + W(n). \tag{10}$$

Podobnie jak dla procesu ARMA, proces AR otrzymywany jest na wyjściu filtru liniowego o transmitancji $H(z)$ pobudzanego szumem $W(n)$ z tą różnicą, że tym razem transmitancja ta ma postać:

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - a_1z^{-1} - \cdots - a_pz^{-p}}. \tag{11}$$

Zgodnie z właściwościami transmisyjnymi układów liniowych widmowa gęstość mocy sygnału na wyjściu filtru, a więc procesu autoregresyjnego jest dana zależnością:

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sigma_W^2 \cdot \frac{1}{|1 - a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cdots - a_p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\theta}|^2}. \tag{12}$$

Oczywiście podaną zależność widmową można bez trudu uogólnić na przypadek procesu ARMA. Wówczas otrzymujemy

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sigma_W^2 \cdot \left| \frac{1 + b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} + \cdots + b_q \mathrm{e}^{-\mathrm{j}q\theta}}{1 - a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cdots - a_p \mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\theta}} \right|^2 . \tag{13}$$

Przedstawione zależności widmowe stanowią podstawę analizowanych w ćwiczeniu nowoczesnych metod estymacji widma opartych na modelowaniu procesów losowych. Zgodnie z zależnościami (12) i (13), znając parametry modelu, możemy bez trudu wyznaczyć widmową gęstość mocy obserwowanego procesu. Oczywiście w praktyce parametry modelu nie są znane i należy je estymować na podstawie próbek pojedynczej realizacji obserwowanego sygnału losowego.

W tym miejscu należy podkreślić, że w porównaniu z klasycznymi metodami estymacji widma takimi jak metoda periodogramów, metody oparte na modelowaniu sygnałów charakteryzują się znacznie lepszą rozdzielczością, a także lepszymi właściwościami statystycznymi estymatora, takimi jak obciążenie czy wariancja. Cena jaką trzeba zapłacić za taką poprawę to znaczne zwiększenie złożoności obliczeniowej algorytmów estymacji widma mocy.

4. BADANIA EKSPERYMENTALNE

4.1 Badanie algorytmów estymacji parametrów procesu ARMA

Wygenerować 500 próbek sygnału ARMA(2, 2) o współczynnikach $\boldsymbol{b}$ = [1 -1,7150 0,9810]^T oraz $\boldsymbol{a}$ = [1 -0,9500 0,9025]^T, wykorzystując do tego celu następującą sekwencję instrukcji:

```
rand('normal');
x = rand(1,500);
y = filter(b,a,x);
```

1. Wyestymować widmo sygnału za pomocą blokowego algorytmu Kay'a BLK i porównać je na jednym wykresie logarytmicznym z charakterystyką amplitudową filtru modelującego. Skorzystać z funkcji `freqz`. Skomentować wyniki.

2. Wybielić sygnał za pomocą estymowanego i idealnego filtru odwrotnego. Porównać i skomentować wyniki na podstawie oceny widma mocy i funkcji autokorelacji wybielonych sygnałów.

3. Wygenerowany sygnał ARMA(2, 2) poddać filtracji za pomocą rekursywnego algorytmu Friedlandera RML dla kilku wartości stałej β ($\beta = 0,3; 0,1; 0,05; 0,01; 0$), badając jednocześnie wpływ tej stałej na jakość estymacji widma oraz dokładność estymacji współczynników.

4. Porównać jakość wybielania sygnału dla trzech wybranych wartości stałej β.

4.2 Estymacja widma zaszumionych sygnałów sinusoidalnych

1. Wygenerować sygnał o długości 500 próbek będący sumą dwóch składowych harmonicznych o jednostkowych amplitudach oraz częstotliwościach unormowanych 0,20 i 0,30 zakłóconych addytywnym szumem białym. Wyestymować widmo takiego sygnału za pomocą algorytmu BLK, zakładając jednocześnie, że sygnał ten jest dobrze

modelowany procesem ARMA(4, 4). Zbadać jakość estymacji widma w zależności od wariancji szumu zakłócającego.

2. Powtórzyć badania z punktu 1 zbliżając do siebie częstotliwości unormowane składowych sinusoidalnych (przyjąć wartości 0,20 i 0,21).

4.3 Estymacja widma sygnału zespolonego za pomocą modelowania AR

Ten punkt ćwiczenia został zrealizowany w pakiecie AFRICA jako program `demo 6`. Sygnał zespolony, którego widmo będzie estymowane za pomocą różnych algorytmów AR dostępnych w pakiecie AFRICA jest krótkim 64 punktowym ciągiem danych. Zawiera on w swoim widmie dwie silne blisko siebie położone sinusoidy zespolone o częstotliwościach unormowanych 0,20 i 0,21, a także dwie słabsze o 20 dB sinusoidy o częstotliwościach -0,15 i 0,10. Sygnał użyteczny składający się z tych czterech zespolonych sinusoid zakłócony jest szumem kolorowym występującym w pasmach częstotliwości od -0,50 do -0,20 oraz od 0,20 do 0,50.

Widma będą estymowane kolejno za pomocą następujących algorytmów: BLT, BLL, GAT, GAL, LST. Rząd modelu AR ustalono na 15. Oglądając kolejno estymowane widma porównać i skomentować rezultaty pod kątem rozdzielenia dwóch bliskich składowych sinusoidalnych, skuteczności wychwycenia składowych o mniejszych amplitudach oraz obecności ewentualnych artefaktów.

4.4 Zastosowanie algorytmów rekursywnych do estymacji charakterystyk procesu niestacjonarnego

Wygenerować 100 próbek sygnału sinusoidalnego o liniowo narastającej częstotliwości unormowanej w zakresie od 0,16 do 0,32 zakłócanego szumem białym o odchyleniu standardowym $\sigma_W = 0,1$ (program demonstracyjny `demo 4`).

1. Wyznaczyć widmo takiego sygnału metodą FFT oraz blokowym algorytmem AR wysokiego rzędu (np. 32). Skomentować wyniki.

2. Do estymacji widma zastosować rekursywny algorytm rzędu 4 (np. LST). Za pomocą odpowiednich procedur wizualizacji wyników dostępnych w pakiecie AFRICA zbadać możliwość śledzenia widma chwilowego sygnału niestacjonarnego przez algorytm rekursywny. Sformułować wnioski ogólne.

4.5 Zastosowanie algorytmów rekursywnych do estymacji widma chwilowego sygnału EEG

Rekursywna estymacja widma chwilowego sygnału EEG została zaimplementowana jako program demonstracyjny pakietu AFRICA o nazwie `demo 5`. Sygnał EEG wykorzystany w tym pokazowym programie jest fragmentem sygnału rzeczywistego nagranego podczas całonocnego badania pacjenta w szpitalu. Podobnie jak w poprzednim punkcie jest to sygnał niestacjonarny. Analiza widmowa tego sygnału służy do rozpoznawania faz snu, a w szczególności tzw. wrzecion sennych, które stanowią istotną informację diagnostyczną dla lekarzy. Szczegóły dotyczące analizowanego przebiegu EEG podane zostaną jako komentarze w trakcie kolejnych kroków wykonywania się programu `demo 5`.

4.6 Zastosowanie algorytmów AR do estymacji widma procesów ARMA

Wygenerować sygnał ARMA(2, 2) o dowolnych (ale sensownych) wymyślonych przez ćwiczących parametrach. Dokonać estymacji widma tego sygnału za pomocą kilku wybranych algorytmów AR. Zbadać wpływ rzędu algorytmu AR na jakość estymacji.

LITERATURA

[1] M. L. Hönig and D. G. Messerschmitt, *Adaptive Filters.* Kluwer Academic Publishers, 1984.

[2] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.

[3] B. Friedlander, "Recursive Maximum Likelihood Algorithm for ARMA Spectral Estimation," *IEEE Trans. on Information Theory*, July 1982.

[4] P. M. Clarkson, *Optimal and Adaptive Signal Processing.* CRC Press, 1993.