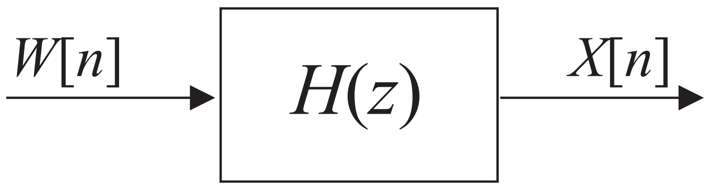
MODELE SYGNAŁÓW

Twierdzenie Wolda (1911)

Każdy stacjonarny sygnał losowy $X[n]$ (nie zawierający składowej deterministycznej, tzn. całkowicie prognozowalnej) może być uważany za sygnał wyjściowy *stabilnego*, *przyczynowego*, *stacjonarnego*, *liniowego* filtru NOI o odpowiedzi impulsowej $h[n]$ pobudzanego *szumem białym* $W[n]$:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) W(n-i)$$

Sygnał $X[n]$ jest nazywany **sygnałem liniowym**. ■



Model ARMA (rzędu $p, q < \infty$) *AutoRegressive Moving Average*

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_p z^{-p}},$$

gdzie bieguny transmitancji $H(z)$ (pierwiastki $z = z_i$ równania $1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_p z^{-p}$) spełniają warunki $|z_i| < 1$ dla $i = 1, \ldots, p$.

$$X(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i X(n-i) + \sum_{j=0}^{q} b_j W(n-j)$$

Model AR (rzędu p)

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_p z^{-p}}$$

$$X(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i X(n-i) + W(n)$$

Model MA (rzędu q)

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}$$

$$X(n) = \sum_{j=0}^{q} b_j W(n-j)$$

Widma mocy procesów

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})|^2 \sigma_W^2$$

ARMA

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \frac{|b_0 + b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} + \cdots + b_q \mathrm{e}^{-\mathrm{j}q\theta}|^2}{|1 - a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cdots - a_p \mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\theta}|^2} \sigma_W^2$$

AR

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \frac{\sigma_W^2}{|1 - a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cdots - a_p \mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\theta}|^2}$$

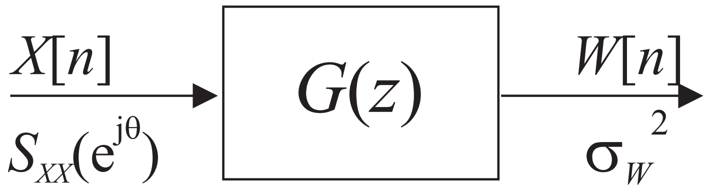
ARMA

$$S_{XX}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = |b_0 + b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} + \cdots + b_q \mathrm{e}^{-\mathrm{j}q\theta}|^2 \sigma_W^2$$

Synteza i analiza sygnałów liniowych

Synteza $\longmapsto$ filtr *modelujący* (*generujący*)

Analiza $\longmapsto$ filtr *analizujący* (*wybielający, innowacyjny, odwrotny*)



$$G(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Zadanie analizy $\longmapsto$ **estymacja** parametrów modelu sygnału

Stacjonarność sygnału a stabilność filtru modelującego

Twierdzenie

Sygnał $X[n]$ na wyjściu filtry modelującego $H(z)$ jest stacjonarny $\iff$ filtr jest stabilny i zanikają efekty przejściowe. $\blacksquare$

OGÓLNE WŁAŚCIWOŚCI ESTYMATORÓW

Defnicja

Estymatorem deterministycznego parametru θ, utworzonym na podstawie ciągu zmiennych losowych $X(0), X(1), \ldots, X(M-1)$ nazywamy pewną funkcję tych zmiennych

$$\hat{\Theta} = T\left[X(0), X(1), \ldots, X(M-1)\right]$$

Estymator jest zatem także **zmienną losową**. ■

Każdą szczególną wartość $\hat{\theta}$ estymatora $\hat{\Theta}$, otrzymaną dla konkretnych realizacji $x(0), x(1), \ldots, x(M-1)$, nazywamy **estymatą**.

Ocena jakości estymatora

„Dobry estymator” powinien być **nieobciążony** *unbiased*, **zgodny** *consistent*, **dostateczny** *sufficient*, **efektywny** *effective* i **odporny** *robust*.

1. Obciążenie estymatora

$$B(\hat{\Theta}) \triangleq \mathrm{E}[\hat{\Theta} - \theta]$$

Jeśli $B(\hat{\Theta}) = 0$, to $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ i estymator nazywamy **nieobciążonym**.

Jeśli

$$\lim_{M \to \infty} \mathrm{E}[\hat{\Theta} - \theta] = 0,$$

to estymator nazywamy **asymptotycznie nieobciążonym**.

2. Błąd średniokwadratowy (MSE) (*Mean Square Error*):

$$\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) \triangleq \mathrm{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

Wariancja estymatora

$$\sigma^2_{\hat{\Theta}} \triangleq \mathrm{E}[(\hat{\Theta} - \bar{\theta})^2], \qquad \bar{\theta} \triangleq \mathrm{E}[\hat{\Theta}]$$

Ponieważ $B(\hat{\Theta}) = \bar{\theta} - \theta$, zatem:

$$\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + B^2(\hat{\Theta})$$

Zbieżność średniokwadratowa

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) = 0$$

3. Zgodność estymatora

Estymator $\hat{\Theta}$ nazywamy zgodnym, jeśli zbiega się on z prawdopodobieństwem równym 1 (*prawie na pewno*) do wartości prawdziwej θ, gdy $M \to \infty$.

$$\lim_{M\to\infty} \hat{\Theta} \overset{\mathrm{Pr}\ 1}{=} \theta$$

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) \overset{\mathrm{Pr}\ 1}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{M\to\infty} \hat{\Theta} \overset{\mathrm{Pr}\ 1}{=} \theta$$

4. Dostateczność estymatora

Estymator $\hat{\Theta} = T[X(n)]$ jest estymatorem dostatecznym parametru θ, jeśli FGP $f[x(0), \ldots, x(M-1)|\hat{\theta}]$ nie zależy od θ.

5. Efektywność estymatora

Im mniejsza jest wariancja estymatora, tym jest on bardziej efektywny.

Twierdzenie

Wariancja estymatora skonstruowanego na podstawie M obserwacji jest nie mniejsza od pewnej wartości granicznej zwanej *kresem dolnym Cramera-Rao*. ■

Efektywność względna

$$\mathrm{eff}_{\mathrm{rel}}(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2) \triangleq \frac{\sigma^2_{\hat{\Theta}_1}}{\sigma^2_{\hat{\Theta}_2}} \cdot 100\%$$

ESTYMATORY MOMENTÓW

Estymator wartości oczekiwanej

Jeśli sygnał $X[n]$ jest stacjonarny, to jako estymator wartości oczekiwanej μ można przyjąć *średnią czasową*:

$$\underline{\hat{\mu}} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X(n), \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)$$

Estymator ten jest nieobciążony:

$$\mathrm{E}[\underline{\hat{\mu}}] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \mathrm{E}[X(n)] = \mu$$

Sygnał jest **ergodyczny** ze względu na wartość oczekiwaną, jeśli:

$$\lim_{M \to \infty} \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n) \right] = \mu$$

Estymator funkcji autokorelacji

Jako estymator funkcji korelacji sygnału stacjonarnego możemy przyjąć:

$$\underline{\hat{R}}(m) = \frac{1}{M - |m|} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} X(n)X(n+|m|)$$

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{M - |m|} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} x(n)x(n+|m|)$$

<u>Właściwości estymatora:</u>

- estymator jest nieobciążony,
- estymator jest zgodny, tzn. $\sigma^2_{\underline{\hat{R}}(m)} \to 0$, gdy $M \to \infty$,
- wariancja estymatora rośnie wraz z wartością opóźnienia autokorelacyjnego m,
- macierz $\hat{\boldsymbol{R}}$ nie jest macierzą Toeplitza, nie jest dodatnio półokreślona.

Wolny od dwóch ostatnich wad jest następujący estymator:

$$\underline{\hat{R}}(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} X(n)X(n+|m|)$$

Jest to jednak estymator obciążony:

$$\mathrm{E}[\underline{\hat{R}}(m)] = \frac{M-|m|}{M} R(m)$$

Predykcja liniowa – optymalny filtr predykcyjny

Rozważmy stacjonarny sygnał $X[n]$ o zerowej wartości oczekiwanej. *Predykcją* (prognozą) jednokrokową rzędy p nazywamy estymację aktualnej próbki $X(n)$ sygnału z wykorzystaniem p poprzednich próbek $X(n-1), \ldots, X(n-p)$:

$$\hat{X}(n) = \sum_{i=1}^{p} c_i X(n-i)$$

Uogólnienie na predykcję K krokową:

$$\hat{X}(n) = \sum_{i=1}^{p} c_i X(n-i-K+1)$$

Dalej zakładamy $K = 1$. Błąd predykcji:

$$E_p(n) = X(n) - \hat{X}(n) = X(n) - \sum_{i=1}^{p} c_i X(n-i)$$

W notacji wektorowej:

$$\boldsymbol{c} = [c_1, \ldots, c_p]^T$$

$$\boldsymbol{X}_n = [X(n-1), \ldots, X(n-p)]^T$$

$$\hat{X}(n) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{X}_n, \qquad E_p(n) = X(n) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{X}_n$$

Funkcja kosztu (miara błędu):

$$J = \mathrm{E}[E_p^2(n)] = \mathrm{E}\left\{ \left[X(n) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{X}_n \right]^2 \right\}$$

Układ równań normalnych:

$$\boldsymbol{Rc} = \boldsymbol{r}$$

gdzie: $\boldsymbol{R}$ jest toeplitzowską macierzą autokorelacji sygnału $X[n]$ rzędu p;
$\boldsymbol{r}$ jest p-wymiarowym wektorem korelacji.

$$\boldsymbol{r} = [\mathrm{E}[X(n)X(n-1)], \ldots, \mathrm{E}[X(n)X(n-p)]]^T = [R(1), \ldots, R(p)]^T$$

Rozwiązanie:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}$$

Do rozwiązanie potrzebna jest znajomość $p+1$ wartości funkcji korelacji $R(0), R(1), \ldots, R(p)$.

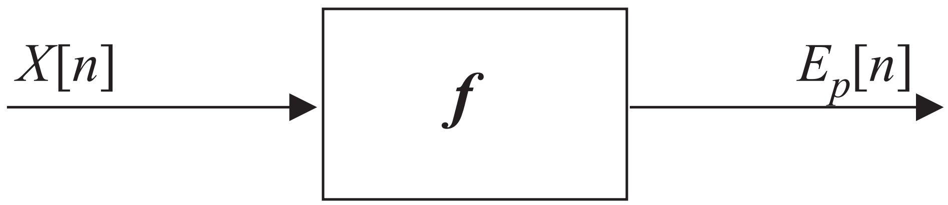
Filtr predykcyjny

$$E_p(n) = X(n) - \sum_{i=1}^{p} c_i X(n-i) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{X}_n$$

Wektor:

$$\boldsymbol{f} = [1, -c_1, \ldots, -c_p]^T$$

określa (stabilny) *filtr predykcyjny*, którego wejściem jest sygnał $X[n]$, a wyjściem sygnał błędu predykcji $E_p[n]$.



Związek liniowej predykcji z modelem AR

Rozważmy filtr modelujący AR rzędu M o transmitancji:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_M z^{-M}}$$

pobudzany szumem białym $W[n]$ o zerowej wartości średniej i wariancji σ_W^2. Sygnał na wyjściu:

$$X(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i X(n-i) + W(n)$$

Rozważmy z kolei predykcję rzędu p tego sygnału:

$$\hat{X}(n) = \sum_{i=1}^{p} c_i X(n-i)$$

Załóżmy, że $p = M$ i zbadajmy błąd predykcji:

$$E_p(n) = X(n) - \hat{X}(n) = \sum_{i=1}^{p} (a_i - c_i) X(n-i) + W(n)$$

Optymalne współczynniki predykcyjne minimalizujące funkcję kosztu $J = \mathrm{E}[E_p^2(n)]$ są równe:

$$c_i = a_i, \qquad i = 1, \ldots, p$$

przy czym $J = \mathrm{E}[E_p^2(n)] = \mathrm{E}[W^2(n)] = \sigma_W^2$.
Identyczne rozwiązanie uzyskuje się dla $p > M$, przy czym c_{p+j} dla $j = 1, 2, \ldots$.
Zatem jeśli $p > M$, to optymalny filtr predykcyjny sygnału $\mathrm{AR}(M)$ ma następującą transmitancję i odpowiedź impulsową:

$$F(z) = \frac{1}{H(z)}, \qquad \boldsymbol{f} = [1, -a_1, \ldots, -a_p]^T$$