

## DETERMINISTYCZNE SYGNAŁY ANALOGOWE

### Parametry deterministycznych sygnałów analogowych

*Wartość średnia* analogowego sygnału deterministycznego  $x(t)$ :

- określonego w przedziale  $[t_1, t_2]$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

- o nieskończonym czasie trwania

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

- okresowego o okresie  $T_0$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} x(t) dt$$

*Energia* analogowego sygnału deterministycznego  $x(t)$ :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

*Moc (średnia)* analogowego sygnału deterministycznego  $x(t)$ :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

W przypadku sygnałów okresowych:

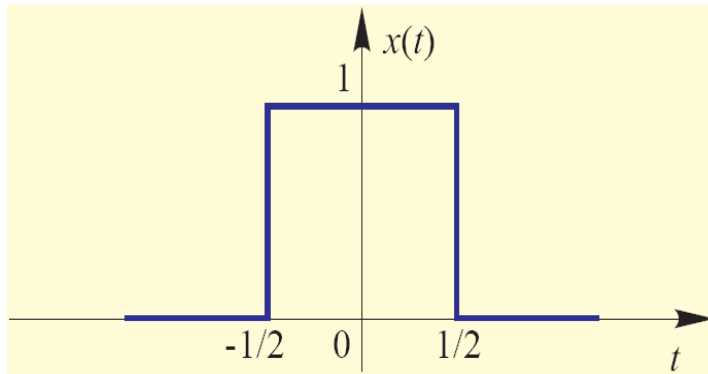
$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x^2(t) dt$$

Jeśli  $0 < E_x < \infty$ , to sygnał  $x(t)$  jest *sygnałem o ograniczonej energii*.

Jeśli  $0 < P_x < \infty$ , to sygnał  $x(t)$  jest *sygnałem o ograniczonej mocy*.

## Przykłady sygnałów analogowych o ograniczonej energii

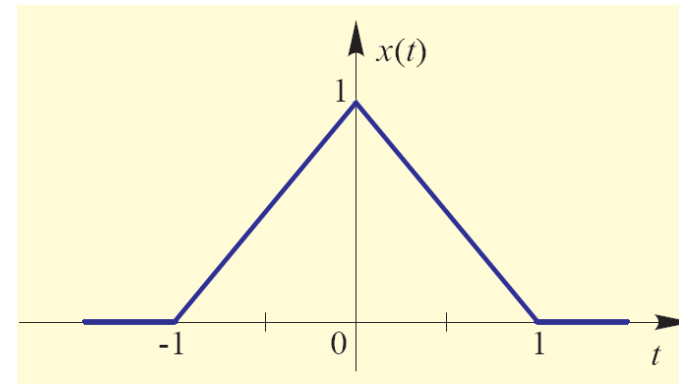
Impuls prostokątny  $x(t) = \square(t)$



$$\square(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < 1/2 \\ 1/2 & \text{dla } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = 1, \quad E_x = 1$$

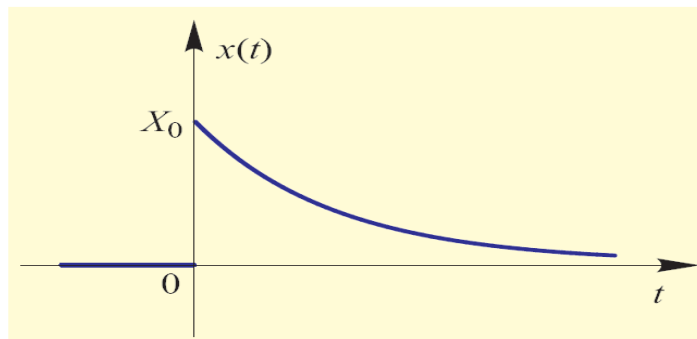
Impuls trójkątny  $x(t) = \wedge(t)$



$$\wedge(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}, \quad E_x = \frac{2}{3}$$

## Sygnał wykładniczy malejący

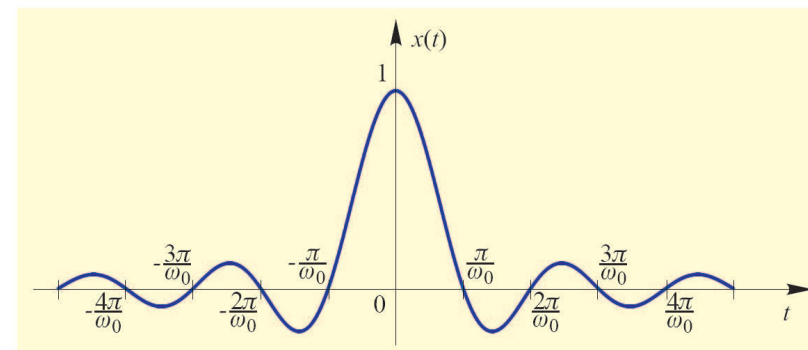


$$x(t) = \begin{cases} X_0 e^{-\alpha t} & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$\alpha > 0$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad E_x = \frac{X_0^2}{2\alpha}$$

## Sygnał Sa

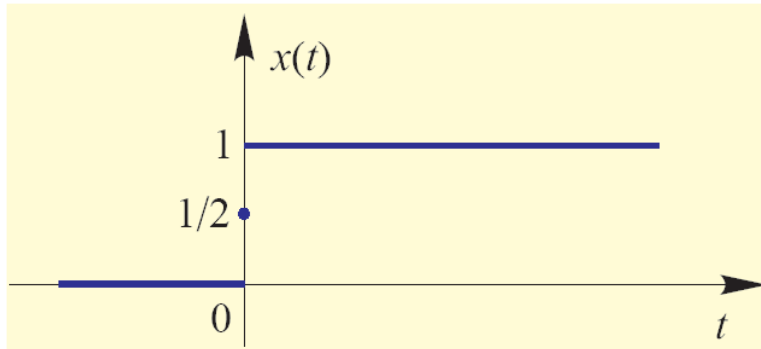


$$x(t) = \text{Sa } \omega_0 t \begin{cases} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad E_x = \frac{\pi}{\omega_0}$$

## Przykłady sygnałów analogowych o ograniczonej mocy

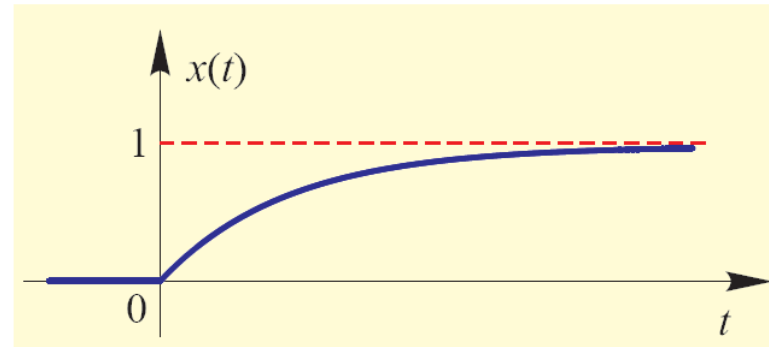
Skok jednostkowy  $x(t) = \mathbf{1}(t)$



$$x(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1/2 & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}, \quad P_x = \frac{1}{2}$$

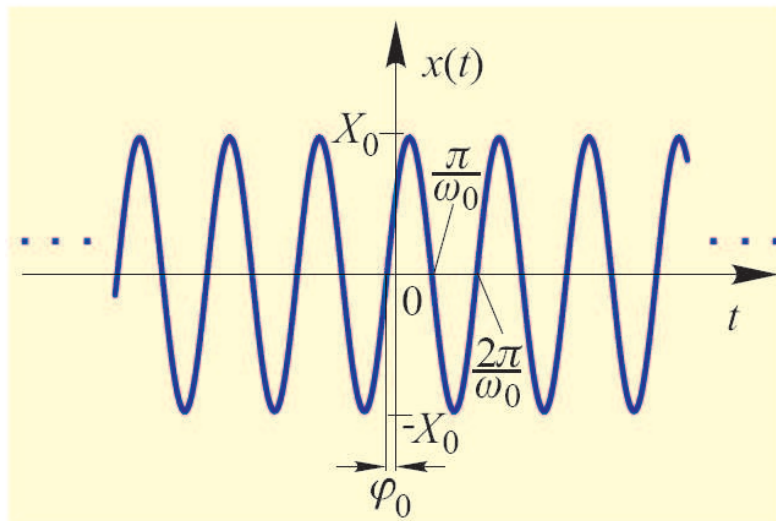
Sygnał wykładniczy narastający



$$x(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \mathbf{1}(t), \quad \alpha > 0$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}, \quad P_x = \frac{1}{2}$$

### Sygnał harmoniczny

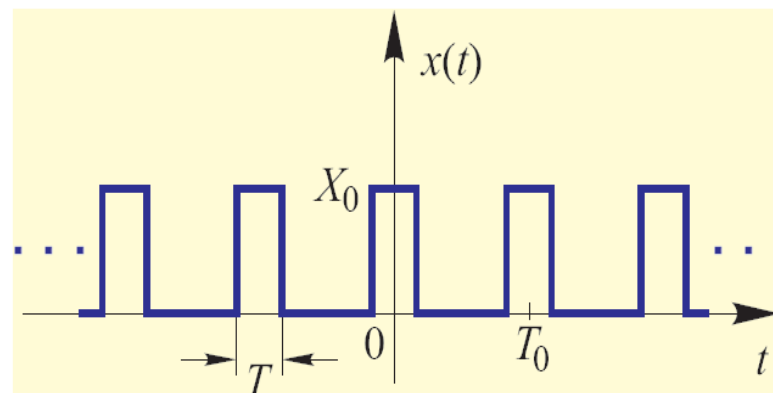


$$x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad P_x = \frac{1}{2} X_0^2$$

### Unipolarna fala prostokątna



$$\langle x \rangle = \frac{T}{T_0} X_0, \quad P_x = \frac{T}{T_0} X_0^2$$

## **Analiza częstotliwościowa sygnałów analogowych**

Proste przekształcenie Fouriera sygnału  $x(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in (-\infty, \infty)$$

$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$  – transformata Fouriera,  $\mathcal{F}$ -transformata

Odwrotne przekształcenie Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$  – odwrotna transformata Fouriera, retransformata Fouriera

## $\mathcal{F}$ -transformowalność i wzajemna jednoznaczność

Warunek dostateczny  $\mathcal{F}$ -transformowalności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

### TWIERDZENIE

Jeżeli sygnał  $x(t)$  jest sygnałem bezwzględnie całkownym oraz w każdym skończonym przedziale jest sygnałem *przedziałami regularnym* lub o *ograniczonej zmienności*, to dla każdego  $t$  zachodzi równość

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{x(t+) + x(t-)}{2}$$



## Przekształcenie Fouriera w sensie granicznym

Ciąg sygnałów  $\{x_\alpha(t) : \alpha \in \mathbb{R}^+\}$   $\mathcal{F}$ -transformowalnych w sensie zwykłym aproksymuje sygnał  $x(t)$ , który nie ma  $\mathcal{F}$ -transformaty w sensie zwykłym.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha(t) = x(t)$$

$$X_\alpha(\omega) = \mathcal{F}[x_\alpha(t)]$$

Jeżeli  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha(t) = x(t)$  dla każdego  $t$  oraz  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} X_\alpha(\omega) = X(\omega)$  dla każdego  $\omega$ , to parę  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$  nazywamy parą transformat Fouriera w sensie granicznym.

Przykłady:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega), \quad \text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}, \quad \mathbf{1}(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

## Widmo sygnału

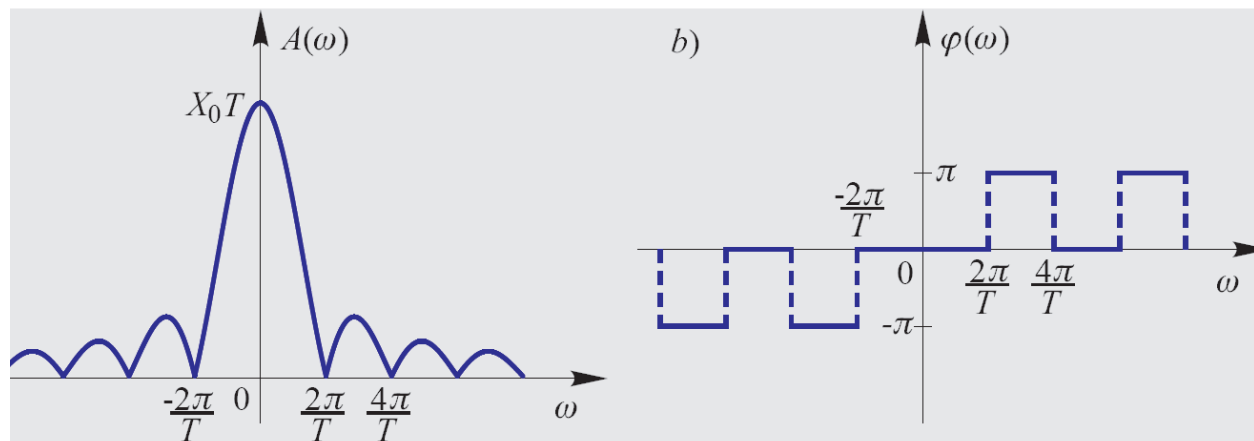
$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j \arg X(\omega)} \triangleq A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$|X(\omega)| \triangleq A(\omega)$  – *widmo amplitudowe*

$$A(\omega) = A(-\omega)$$

$\arg X(\omega) \triangleq \varphi(\omega)$  – *widmo fazowe*

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$



Widmo amplitudowe i fazowe impulsu prostokątnego

## Analiza korelacyjna sygnałów

Iloczyn skalarny sygnału  $x(t)$  i jego przesuniętej kopii

$x_\tau(t) \triangleq x(t - \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ :

$$(x, x_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

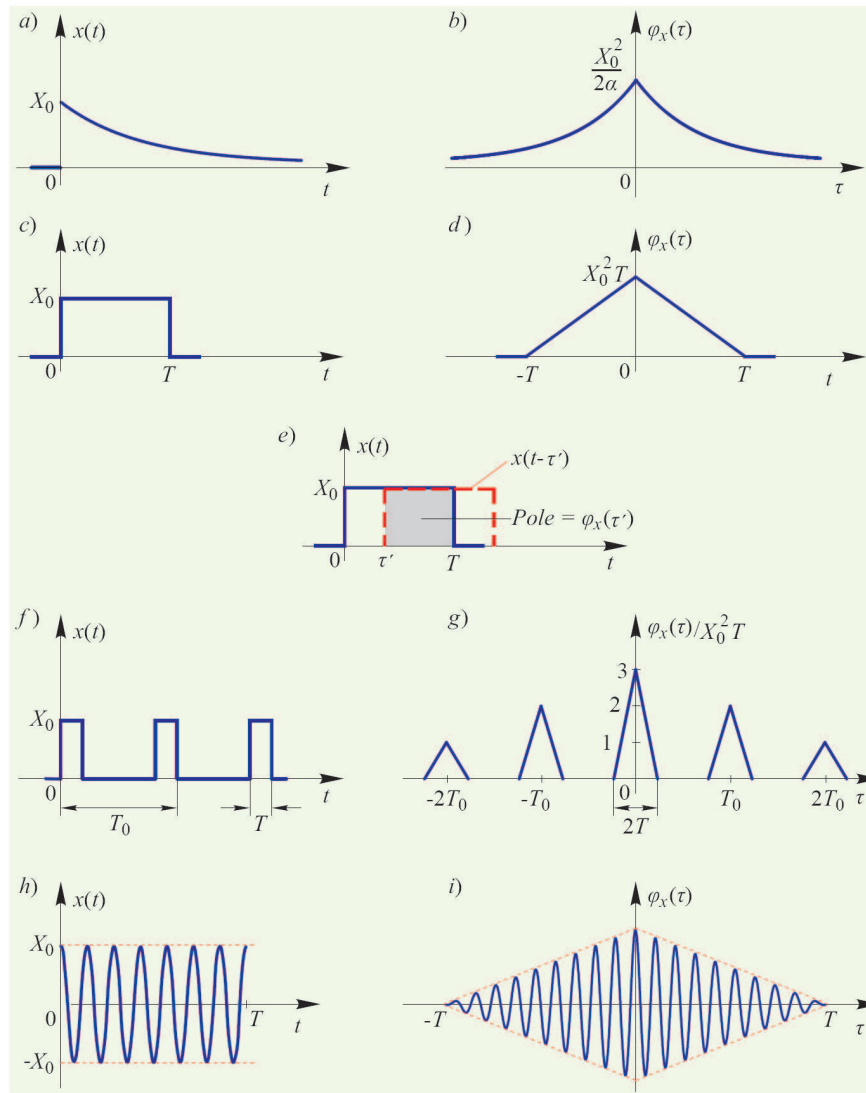
*Funkcja korelacji*  $\varphi_x(\tau)$  sygnału  $x(t)$  o ograniczonej energii:

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

Właściwości funkcji korelacji:

1.  $\varphi_x(\tau) = \varphi_x^*(-\tau)$  – *funkcja hermitowska*,
2.  $\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$ ,
3.  $|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0)$ .

# Przykłady funkcji korelacji sygnałów o ograniczonej energii



## Związek funkcji autokorelacji z widmem energii

Widmem energii sygnału  $x(t)$  nazywamy kwadrat widma amplitudowego  $\Phi_x(\omega) = A_x^2(\omega) = |X(\omega)|^2$  tego sygnału.

### TWIERDZENIE

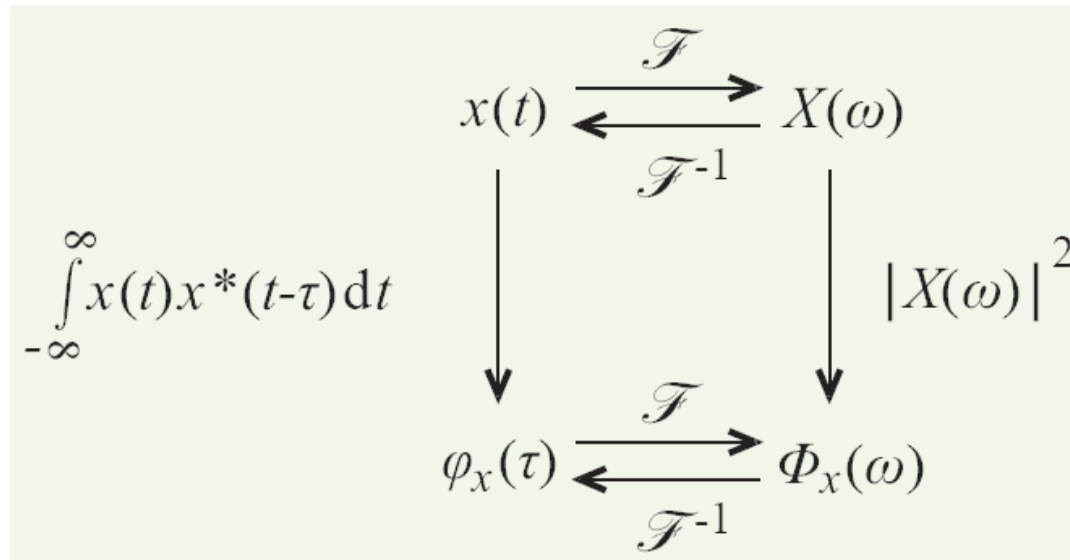
Funkcja korelacji  $\varphi_x(\tau)$  oraz widmo energii  $\Phi_x(\omega)$  sygnału  $x(t)$  tworzą parę transformat Fouriera w sensie zwykłym:

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Energia sygnału (równość Parsevala):

$$E_x = \varphi_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) d\omega$$

Związki między opisami sygnałów w dziedzinie czasu, korelacyjnej i częstotliwości



## Funkcja autokorelacji sygnału o ograniczonej mocy

$$\psi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t - \tau)dt$$

W przypadku sygnału okresowego:

$$\psi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

Właściwości:

1.  $\psi_x(\tau) = \psi_x^*(-\tau)$  – funkcja hermitowska,
2.  $\psi_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = P_x$ ,
3.  $|\psi_x(\tau)| \leq \psi_x(0)$ .

## Widmo mocy i jego związek z funkcją autokorelacji

Centralny segment sygnału  $x(t)$  o ograniczonej mocy:

$$x_T(t) = x(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Widmo energii centralnego segmentu:

$$\Phi_T(\omega) = |X_T(\omega)|^2$$

*Widmem mocy* sygnału  $x(t)$  o ograniczonej mocy nazywamy granicę:

$$\Psi_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Phi_T(\omega)$$

Funkcja autokorelacji  $\psi_x(\tau)$  sygnału  $x(t)$  i jego widmo mocy  $\Psi_x(\omega)$  tworzą parę transformat Fouriera w sensie granicznym.



## Sygnal analityczny. Przekształcenie Hilberta.

Sygnalem analitycznym, reprezentującym rzeczywisty sygnał  $x(t)$ , nazywamy sygnał zespolony o postaci:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = |z(t)|e^{j\psi(t)}$$

$\hat{x}(t)$  jest *transformatą Hilberta* sygnału  $x(t)$  określoną wzorem

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

*Obwiednią*  $X(t)$  (*amplitudą chwilową*) sygnału rzeczywistego  $x(t)$  nazywamy moduł jego sygnału analitycznego:

$$X(t) = |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

*Pulsacją chwilową*  $\omega(t)$  sygnału  $x(t)$  nazywamy pochodną argumentu sygnału analitycznego:

$$\omega(t) = \psi'(t) = \operatorname{Im}[\ln z(t)]' = \operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{x(t)\hat{x}'(t) - x'(t)\hat{x}(t)}{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

Faza chwilowa sygnału względem ustalonej wartości  $\omega_0$

Niech  $\omega_0$  będzie stałą dodatnią ustaloną pulsacją. *Fazą chwilową* sygnału  $x(t)$ , którego sygnał analityczny jest równy  $z(t) = |z(t)|e^{j\psi(t)}$  określoną względem stałej  $\omega_0$  nazywamy funkcję  $\varphi(t)$  taką, że:  
 $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ .

Reprezentacja sygnału  $x(t)$  za pomocą drgania uogólnionego  
wyznaczona względem pulsacji  $\omega_0$

$$x(t) = X(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Transformata Hilberta:

$$\hat{x}(t) = X(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Drganie uogólnione w zapisie Rice'a:

$$x(t) = X(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - X(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t$$

$$\hat{x}(t) = X(t) \cos \varphi(t) \sin \omega_0 t + X(t) \sin \varphi(t) \cos \omega_0 t$$

$$\hat{x}(t) = a(t) \sin \omega_0 t - b(t) \cos \omega_0 t$$

$$a(t) = X(t) \cos \varphi(t) - \text{składowa synfazowa sygnału } x(t)$$

$$b(t) = X(t) \sin \varphi(t) - \text{składowa kwadraturowa sygnału } x(t)$$

Odpowiedź impulsowa i transmitancja częstotliwościowa  
filtru kwadraturowego

$$k(t) = \frac{1}{\pi t}$$

$$K(\omega) = -j\text{sgn}\omega = e^{j[\frac{\pi}{2} - \pi\mathbf{1}(\omega)]}$$

Widmo sygnału analitycznego

$$Z(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + j(-j\text{sgn}\omega)X(\omega) = 2X(\omega)\mathbf{1}(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} [Z(\omega) + Z^*(-\omega)]$$