DETERMINISTYCZNE SYGNAŁY DYSKRETNE

Parametry deterministycznych sygnałów dyskretnych

Wartość średnia dyskretnego sygnału deterministycznego $x[n]$:

- określonego w skończonym przedziale $[n_1, n_2]$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

- o nieskończonym czasie trwania

$$\langle x \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

- okresowego o okresie N_0

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n_0}^{n_0+N_0-1} x(n)$$

Energia dyskretnego sygnału deterministycznego $x[n]$:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$$

Moc (średnia) dyskretnego sygnału deterministycznego $x[n]$:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x^2(n)$$

W przypadku sygnałów okresowych:

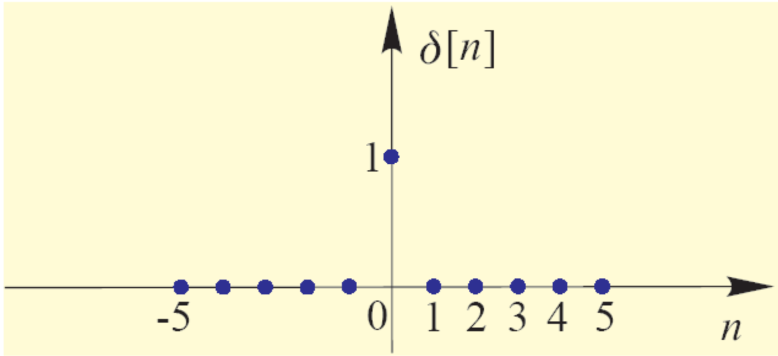
$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n_0}^{n_0+N_0-1} x^2(n)$$

Jeśli $0 < E_x < \infty$, to sygnał $x[n]$ jest *sygnałem o ograniczonej energii*.

Jeśli $0 < P_x < \infty$, to sygnał $x[n]$ jest *sygnałem o ograniczonej mocy*.

Przykłady sygnałów dyskretnych o ograniczonej energii

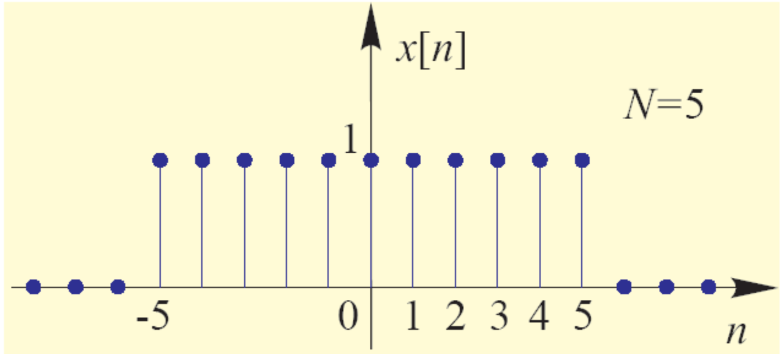
Delta Kroneckera $\delta[n]$



$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = 1, \quad E_x = 1$$

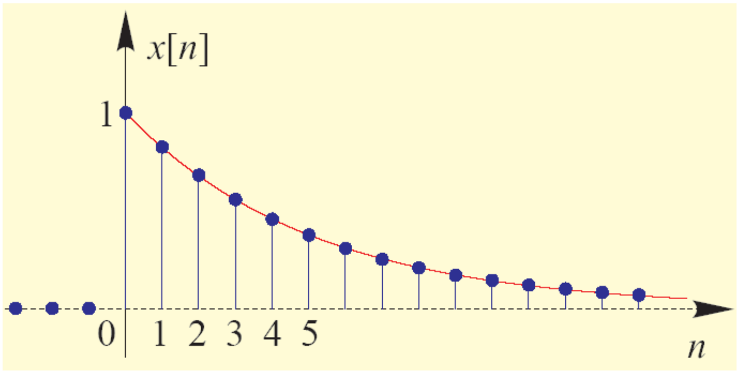
Impuls prostokątny



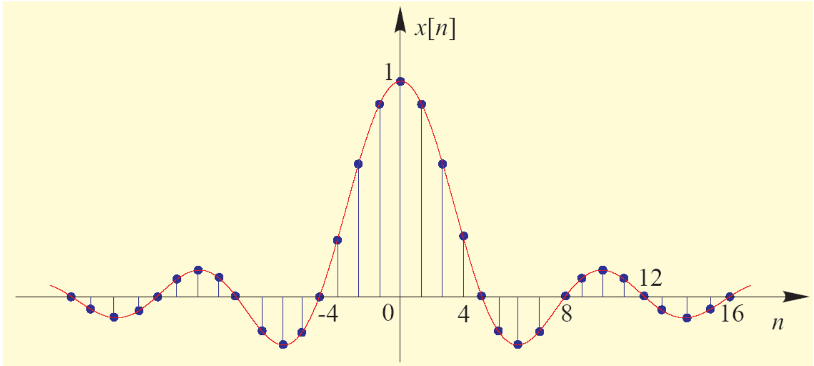
$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n > |N| \\ 1 & \text{dla} \quad n \leqslant |N| \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = 1, \quad E_x = 2N + 1$$

Sygnał wykładniczy



Sygnał Sa



$$x[n] = a^n, \quad n \geqslant 0, \quad 0 < a < 1$$

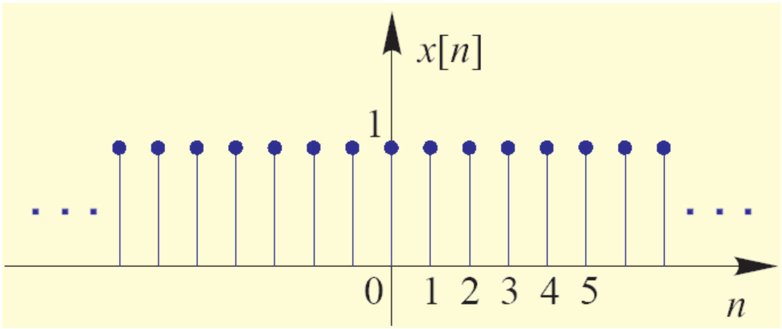
$$x[n] = \mathrm{Sa}\, n\theta_0 \begin{cases} \frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad E_x = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad E_x = \frac{\pi}{\theta_0}$$

Przykłady sygnałów dyskretnych o ograniczonej mocy

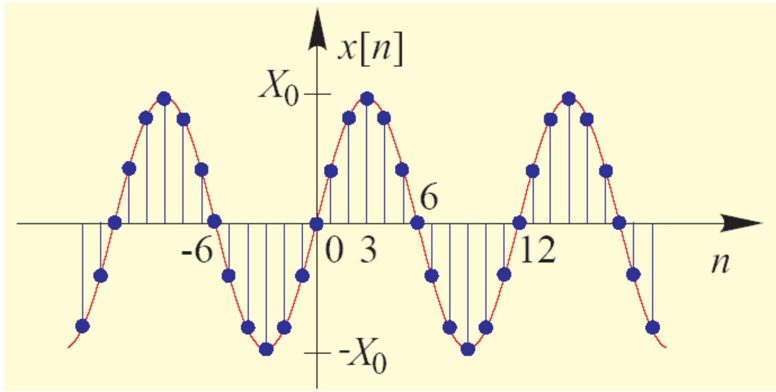
Sygnał stały



$$x[n] = 1, \quad -\infty < n < \infty$$

$$\langle x \rangle = 1, \quad P_x = 1$$

Sygnał harmoniczny



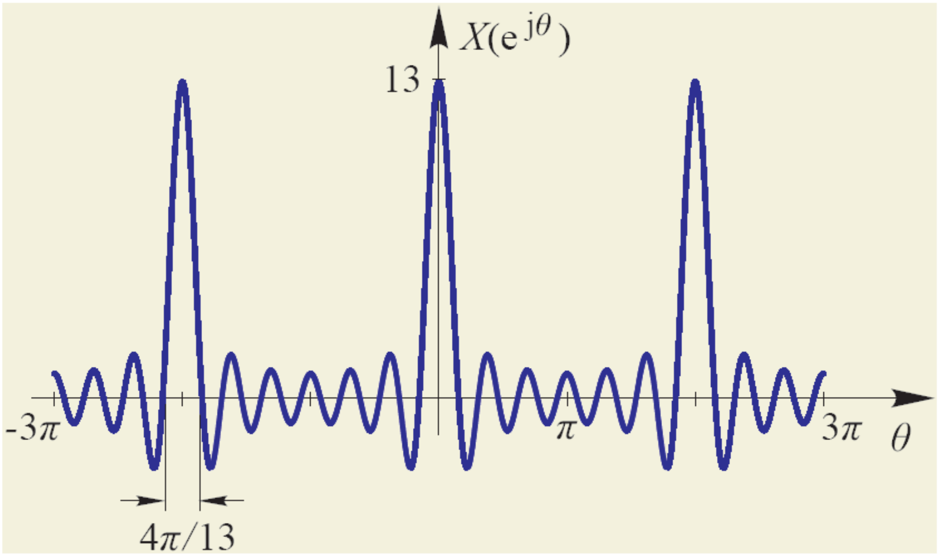
$$x[n] = X_0 \sin(n\theta_0 + \phi_0), \quad -\infty < n < \infty$$

$$\langle x \rangle = 0, \quad P_x = \frac{1}{2} X_0^2$$

Analiza częstotliwościowa sygnałów dyskretnych

Proste przekształcenie Fouriera sygnału $x[n]$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$$



Widmo dyskretnego impulsu prostokątnego dla $N = 6$

Odwrotne przekształcenie Fouriera

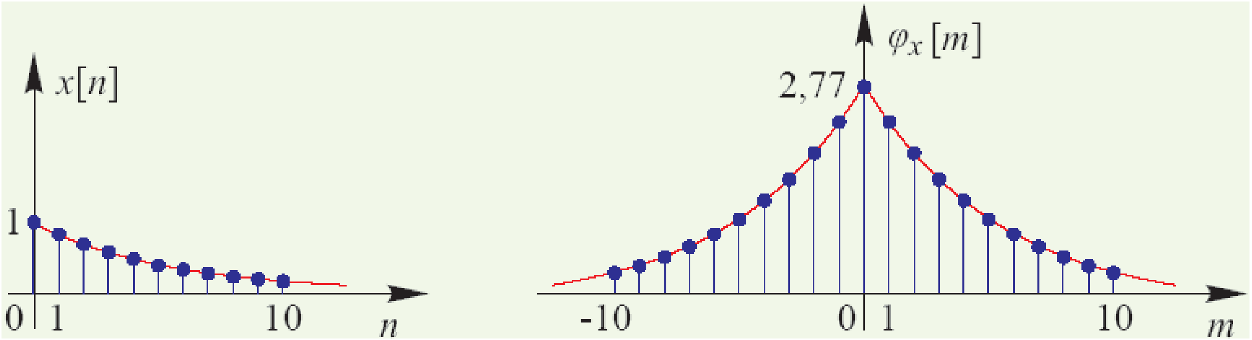
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}\mathrm{d}\theta, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Analiza korelacyjna sygnałów dyskretnych

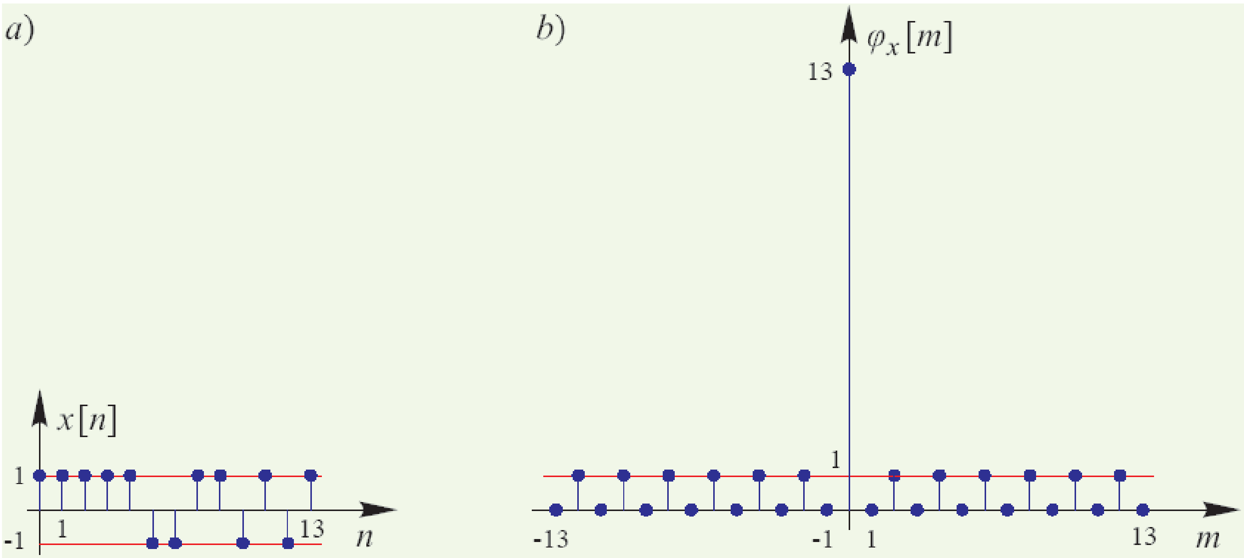
Funkcją autokorelacji $\varphi_x[m]$ dyskretnego sygnału $x[n]$ o ograniczonej energii nazywamy funkcję całkowitego parametru m (przesunięcia) określoną wzorem:

$$\varphi_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m)$$

$$\varphi_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = E_x$$



x[n]
1
0
1
10
n
φx [m]
2,77
-10
0
1
10
m



a)
x[n]
1
-1
1
13
n
b)
φx [m]
13
1
-13
-1
1
13
m

Związek funkcji autokorelacji z widmem energii

Widmem energii sygnału dyskretnego $x[n]$ nazywamy kwadrat widma amplitudowego $\Phi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = A_x^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})|^2$ tego sygnału.

Funkcja korelacji $\varphi_x[m]$ oraz widmo energii $\Phi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$ sygnału $x[n]$ tworzą parę transformat Fouriera:

$$\Phi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\theta}$$

$$\varphi_x(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta}\mathrm{d}\theta$$

Energia sygnału:

$$E_x = \varphi_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta$$

Funkcja autokorelacji sygnału o ograniczonej mocy

$$\psi_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x^*(n-m)$$

W przypadku sygnału okresowego:

$$\psi_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n)x^*(n-m)$$

Widmo mocy i jego związek z funkcją autokorelacji

$$\Psi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \Phi_N(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$$

Funkcja autokorelacji $\psi_x[m]$ sygnału $x[n]$ i jego widmo mocy $\Psi_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$ tworzą parę transformat Fouriera w sensie granicznym.