SYGNAŁY STOCHASTYCZNE

Przestrzeń probabilistyczna i zmienna losowa

DEFINICJA

Przestrzenią probabilistyczną (doświadczeniem) nazywamy trójkę uporządkowaną $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$, gdzie:

$\mathcal{E}$ – *przestrzeń zdarzeń elementarnych*;
elementy $e \in \mathcal{E}$ – *zdarzenia elementarne*,

$\mathcal{B}$ – zbiór podzbiorów zbioru $\mathcal{E}$ – *zdarzenia losowe*,

$P: \ \mathcal{B} \to [0, 1]$ – funkcja odwzorowująca zbiór $\mathcal{B}$ w zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$ – *miara prawdopodobieństwa*.

Funkcja P spełnia następujące aksjomaty:

1. $\bigwedge\limits_{\beta \in \mathcal{B}} 0 \leqslant P(\beta) \leqslant 1$
2. $P(\mathcal{E}) = 1$

3. Dla każdego przeliczalnego zbioru $\{\beta_n\} \subseteq \mathcal{B}$ zdarzeń spełniających warunek $\beta_i \cap \beta_j = \varnothing$ dla $i \neq j$ zachodzi równość

$$P\left(\bigcup_n \beta_n\right) = \sum_n P(\beta_n)$$

Wartość funkcji $P(\beta)$ dla zdarzenia $\beta \in \mathcal{B}$ jest nazywana *prawdopodobieństwem* tego zdarzenia.

DEFINICJA

Zmienną losową rzeczywistą nazywamy funkcję $\xi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ odwzorowującą przestrzeń zdarzeń elementarnych w zbiór liczb rzeczywistych i spełniającą warunki:

1. $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \{e : \xi(e) < x\} \in \mathcal{B}$
2. $P\{e : \xi(e) = -\infty\} = P\{e : \xi(e) = \infty\} = 0$

Dystrybuanta i funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Definicja

Niech ξ będzie zmienną losową rzeczywistą określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$ i przyjmującą wartości x w zbiorze $\xi(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{R}$. *Dystrybuantą zmiennej losowej* ξ nazywamy funkcję $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ taką, że

$$F_\xi(x) = P\{e \in \mathcal{E} : \xi(e) < x\}.$$

Właściwości:

1. $F_\xi(-\infty) = 0$; $F_\xi(\infty) = 1$.
2. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą.
3. Dystrybuanta jest funkcją co najmniej lewostronnie ciągłą.

Definicja

Funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ nazywamy funkcję $f_\xi : \xi(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ taką, że dla $x \in \xi(\mathcal{E})$

$$f_\xi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{e \in \mathcal{E} : x \leqslant \xi(e) < x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

$$f_\xi(x) = \frac{\mathrm{d}F_\xi(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x')\mathrm{d}x'$$

Właściwości:

1. $f_\xi(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \xi(\mathcal{E})$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = 1$

Równość zmiennych losowych

DEFINICJA (RÓWNOŚĆ WSZĘDZIE)
Dwie zmienne losowe są *równe wszędzie*, jeżeli są one określone na zbiorze zdarzeń elementarnych $\mathcal{E}$ tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$ i jeśli dla każdego zdarzenia elementarnego $e \in \mathcal{E}$ realizacje obu zmiennych losowych są jednakowe.

DEFINICJA (RÓWNOŚĆ PRAWIE WSZĘDZIE)
Dwie zmienne losowe ξ i η są *równe z prawdopodobieństwem 1 (prawie wszędzie)*, jeżeli są one określone na zbiorze zdarzeń elementarnych $\mathcal{E}$ tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$ i jeśli

$$P\{e \in \mathcal{E} : \xi(e) = \eta(x)\} = 1$$

Definicja (równość średniokwadratowa)
Dwie zmienne losowe ξ i η są *równe w sensie średniokwadratowym*, jeżeli są one określone na zbiorze zdarzeń elementarnych tej samej przestrzeni i jeśli

$$\mathrm{E}\left[(\xi-\eta)^2\right]=0$$

Pojęcie zbieżności zmiennych losowych

Definicja (zbieżność wszędzie)
Ciąg zmiennych losowych $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ określony na zbiorze zdarzeń elementarnych $\mathcal{E}$ jest *zbieżny wszędzie* do zmiennej losowej ξ określonej na tym samym zbiorze, jeżeli

$$\bigwedge_{e\in\mathcal{E}} \xi(e)=\lim_{n\to\infty}\xi_n(e)$$

gdzie $\xi(e)$ jest realizacją zmiennej losowej ξ, a $\xi_n(e)$ są realizacjami zmiennych losowych ξ_n, określonymi dla tego samego $e\in\mathcal{E}$.

Definicja (zbieżność prawie wszędzie)

Ciąg zmiennych losowych $\{\xi_n\}$ jest *zbieżny* do zmiennej losowej ξ *z prawdopodobieństwem 1 (prawie wszędzie)*, jeżeli

$$P\{e \in \mathcal{E} : \lim_{n\to\infty} \xi_n(e) = \xi(e)\} = 1$$

Definicja (zbieżność średniokwadratowa)

Ciąg zmiennych losowych $\{\xi_n\}$ jest *zbieżny* do zmiennej losowej ξ *w sensie średniokwadratowym*, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[(\xi - \xi_n)^2\right] = 0$$

Pojęcie procesu stochastycznego – sygnał stochastyczny

DEFINICJA
Niech $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{T}$ niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. *Procesem stochastycznym rzeczywistym* nazywamy funkcję $\xi : \mathcal{E} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego ustalonego $t \in \mathcal{T}$ funkcja $\xi(t) : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową rzeczywistą określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych $\mathcal{E}$ przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, P)$.

Sposoby rozpatrywania sygnałów stochastycznych:

- zbiór deterministycznych funkcji czasu będących realizacjami sygnału $\{x_e(t) : e \in \mathcal{E}\}$
- zbiór zmiennych losowych będących wartościami procesu $\{\xi(t) : t \in \mathcal{T}\}$

Sposoby opisu sygnałów stochastycznych

- jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa (FGP) $f(x_1; t_1)$
- łączna n-wymiarowa FGP $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2 \ldots, t_n)$

Momenty sygnału stochastycznego

1. *Wartość oczekiwana* (wartość średnia, moment rzędu pierwszego)

$$\mu_\xi(t) \triangleq \mathrm{E}[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x;t)\mathrm{d}x$$

2. *Wartość średniokwadratowa* (moment zwykły rzędu drugiego)

$$\mathrm{E}\left[\xi^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x;t)\mathrm{d}x$$

3. *Wariancja* (moment centralny rzędu drugiego)

$$\sigma_\xi^2 \triangleq \mathrm{E}\left[\left(\xi(t) - \mu_\xi(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - \mu_\xi(t)\right]^2 \; f(x;t)\mathrm{d}x$$

4. *Funkcja autokorelacji* (moment mieszany zwykły rzędu drugiego)

$$R_\xi(t_1, t_2) \triangleq \mathrm{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \; f(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

5. *Funkcja autokowariancji* (moment mieszany centralny rzędu drugiego)

$$\begin{aligned} C_\xi(t_1, t_2) &\triangleq \mathrm{E}\left\{[\xi(t_1) - \mu_\xi(t_1)][\xi(t_2) - \mu_\xi(t_2)]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu_\xi(t_1)][x_2 - \mu_\xi(t_2)] \; f(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

Związki między momentami:

$$\mathrm{E}\left[\xi^2(t)\right] = \sigma_\xi^2(t) + \mu_\xi^2(t)$$

$$R_\xi(t,t) = \mathrm{E}\left[\xi^2(t)\right]$$

$$C_\xi(t,t) = \sigma_\xi^2(t)$$

Sygnały stacjonarne

DEFINICJA (STACJONARNOŚĆ W ŚCISŁYM SENSIE)
Sygnał stochastyczny $\xi(t)$ określony w zbiorze $\mathcal{T} \in (-\infty, \infty)$ jest *stacjonarny w ścisłym sensie*, jeżeli dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej ε łączne n-wymiarowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa sygnału $\xi(t)$ i sygnału przesuniętego $\xi(t+\varepsilon)$ są sobie równe dla każdego ciągu punktów $t_1, \ldots, t_n, t_i \in \mathcal{T}, i = 1, \ldots, n$, tzn. jeżeli

$$f_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = f_{\xi'_1 \ldots \xi'_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \varepsilon, \ldots, t_n + \varepsilon)$$

$$\xi_i = \xi(t_i), \qquad \xi'_i = \xi(t_i + \varepsilon)$$

Definicja (stacjonarność w szerszym sensie)

Sygnał stochastyczny $\xi(t)$ nazywamy sygnałem *stacjonarnym w szerszym sensie (słabo stacjonarnym)*, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. $\mathrm{E}[\xi(t)] = \mu_\xi = \mathrm{const}, \quad t \in (-\infty, \infty)$
2. $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2, \quad \tau \in (-\infty, \infty)$

$$\mathrm{E}\left[\xi^2(t)\right] = \mathrm{E}[\xi^2] = \mathrm{const}$$

$$\sigma_\xi^2(t) = \sigma_\xi^2 = \mathrm{const}$$

Właściwości momentów sygnałów stacjonarnych:

$$C_\xi(\tau) = R_\xi(\tau) - \mu_\xi^2$$

$$R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau), \qquad C_\xi(\tau) = C_\xi(-\tau)$$

$$R_\xi(0) = \mathrm{E}[\xi^2], \qquad C_\xi(0) = \sigma_\xi^2$$

$$\bigwedge_{\tau} |R_\xi(\tau)| \leqslant R_\xi(0), \qquad \bigwedge_{\tau} |C_\xi(\tau)| \leqslant C_\xi(0)$$

Sygnały ergodyczne

Niech sygnał $x(t)$ będzie realizacją stacjonarnego sygnału stochastycznego $\xi(t)$ o wartości średniej μ_ξ i funkcji autokorelacji $R_\xi(\tau)$. Definiujemy średnie czasowe:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \mathrm{d}t$$

$$\psi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t-\tau) \mathrm{d}t$$

DEFINICJA (ERGODYCZNOŚĆ ZE WZGLĘDU NA WARTOŚĆ ŚREDNIĄ)
Sygnał $\xi(t)$ nazywamy *ergodycznym ze względu na wartość średnią*, jeżeli dla prawie wszystkich jego realizacji $x(t)$, tzn. z prawdopodobieństwem 1, jest spełniona równość:

$$\langle x(t) \rangle \equiv \mu_\xi$$

Definicja (ergodyczność ze względu na funkcję autokorelacji)

Sygnał $\xi(t)$ nazywamy *ergodycznym ze względu na funkcję autokorelacji*, jeżeli dla prawie wszystkich jego realizacji $x(t)$ jest spełniona równość:

$$\psi_x(\tau) \equiv R_\xi(\tau)$$

Estymaty wartości oczekiwanej i funkcji autokorelacji

$$\hat{\mu}_\xi = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\mathrm{d}t$$

$$\hat{R}_\xi(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

Sygnały gaussowskie

DEFINICJA

Stacjonarny sygnał stochastyczny $\xi(t)$ o wartości średniej μ_ξ, wariancji σ_ξ^2 i funkcji autokowariancji $C_\xi(\tau)$ opisany łączną n-wymiarową FGP nazywamy *sygnałem gaussowskim (normalnym)*, jeśli dla dowolnego zbioru chwil $t_1, \ldots, t_n$ i dowolnego n n-wymiarowa FGP ma postać:

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C})}} \exp\left[-\frac{1}{2\det(\boldsymbol{C})} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{C}_{ij}(x_i - \mu_\xi)(x_j - \mu_\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C})}} \exp\left[\tilde{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{x}}\right]$$

$\boldsymbol{C} = [C_{ij}]_{n\times n}$, $C_{ij} = C_\xi(t_i - t_j)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = [x_1 - \mu_\xi, \ldots, x_n - \mu_\xi]^T$

Widmo stochastyczne sygnału stacjonarnego

Rozważmy stacjonarny sygnał stochastyczny $\xi(t)$ o zerowej wartości średniej $\mu_\xi = 0$ i załóżmy, że dla każdej jego realizacji $x(t)$ o skończonej mocy istnieje widmo Fouriera w sensie granicznym:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$

$X(\omega)$ jest realizacją procesu stochastycznego $\Xi_\xi(\omega)$ w dziedzinie częstotliwości:

$$\Xi_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$

Proces stochastyczny $\Xi_\xi(\omega)$ nazywamy *widmem stochastycznym* sygnału $\xi(t)$.

Widmo mocy sygnału stacjonarnego

$$\mathrm{E}[\Xi_\xi(\omega)] \equiv 0$$

$$\mathrm{E}\left[\Xi_\xi(\omega)\Xi_\xi^*(\omega')\right] = 2\pi S_\xi(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

TWIERDZENIE WIENERA-CHINCZYNA

Funkcja autokorelacji $R_\xi(\tau)$ stacjonarnego sygnału stochastycznego $\xi(t)$ oraz jego *widmo mocy* $S_\xi(\omega)$ tworzą parę transformat Fouriera:

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

Widmo mocy sygnału o niezerowej wartości średniej

$$S_\xi(\omega) = 2\pi\mu_\xi^2\delta(\omega) + S_{\tilde{\xi}}(\omega), \qquad S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \mathcal{F}[C_\xi(\tau)]$$

$$\xi(t) = \mu_\xi + \tilde{\xi}(t)$$

$$\mathrm{E}[\xi^2] = \mu_\xi^2 + \sigma_\xi^2$$

Właściwości widma mocy

1. Widmo mocy $S_\xi(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą, ponieważ funkcja autokorelacji jest funkcją hermitowską, tzn. $R_\xi(\tau) = R_\xi^*(-\tau)$.
2. Jeżeli sygnał $\xi(t)$ jest rzeczywisty, to $S_\xi(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą

parzystą o dodatnich wartościach, tzn.

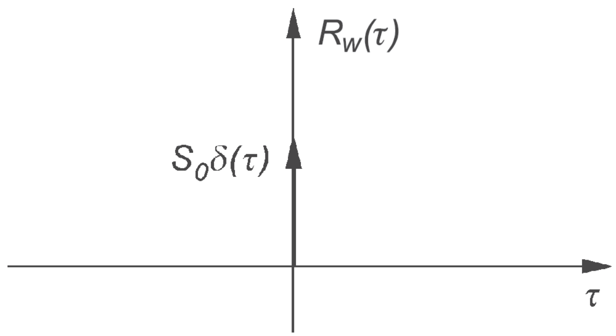
$$\bigwedge_{\omega} S_\xi(\omega) = S_\xi(-\omega) \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{\omega} S_\xi(\omega) \geqslant 0$$

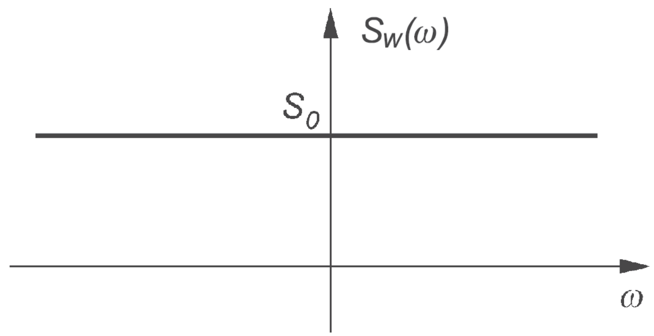
3. Moc średnia sygnału $\xi(t)$ jest równa:

$$R_\xi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega = \mathrm{E}[\xi^2]$$

Przykłady sygnałów stacjonarnych

Szum biały

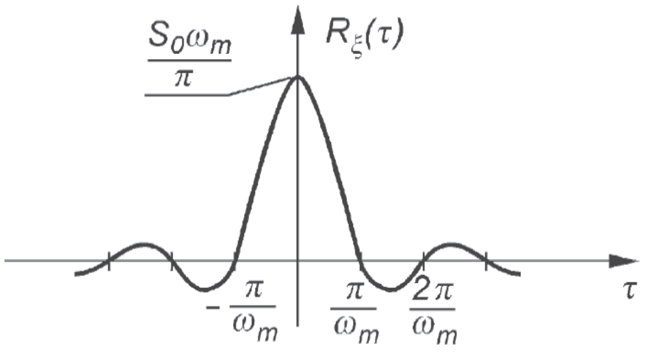


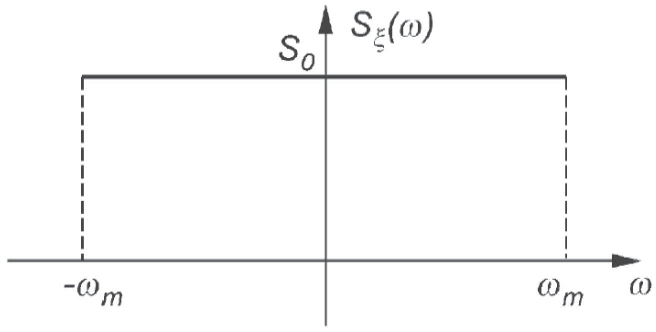


$$S_w(\omega) = S_0 = \text{const}, \quad \omega \in (-\infty, \infty)$$

$$R_w(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_0] = S_0\delta(\tau)$$

Idealny dolnopasmowy sygnał stochastyczny

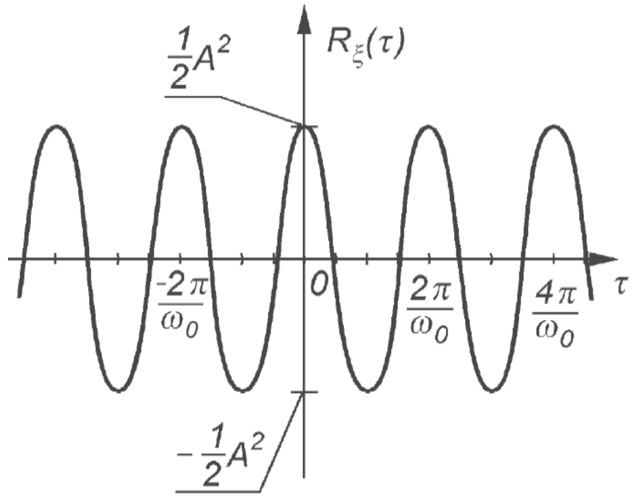


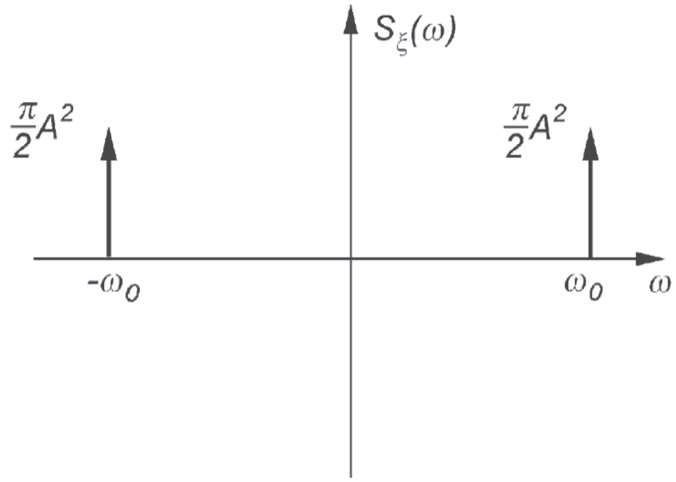


$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{dla} \quad |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{dla} \quad |\omega| \geqslant \omega_m \end{cases}$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{S_0\omega_m}{\pi}\frac{\sin\omega_m\tau}{\omega_m\tau}$$

Stochastyczny sygnał harmoniczny

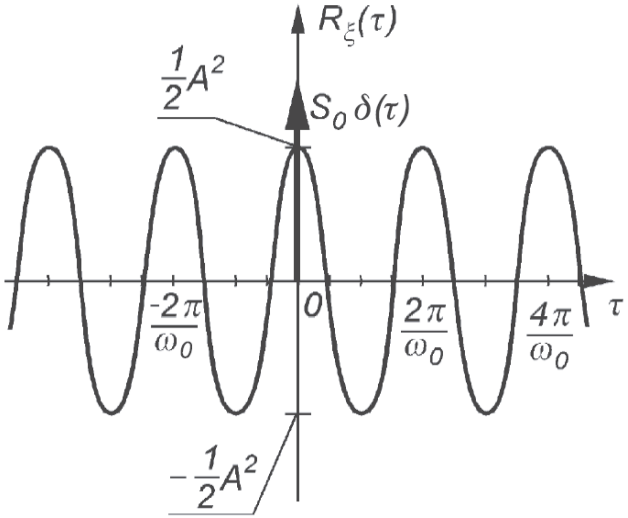


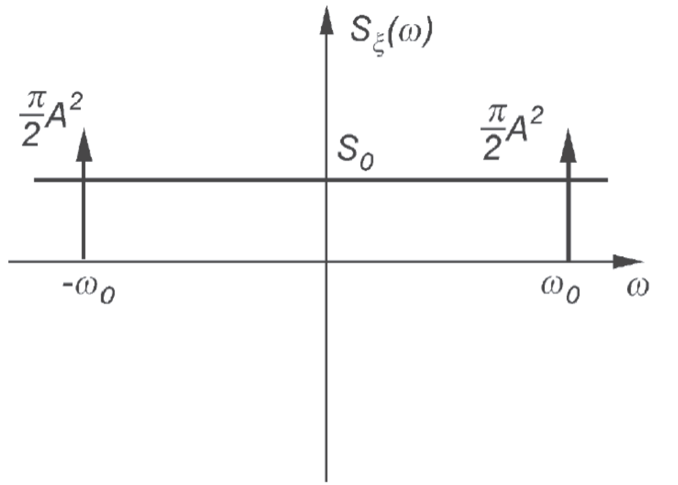


$$\xi(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(\omega_0\tau), \qquad S_\xi(\omega) = \frac{\pi}{2}A^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

Stochastyczny sygnał harmoniczny zakłócany addytywnym szumem białym

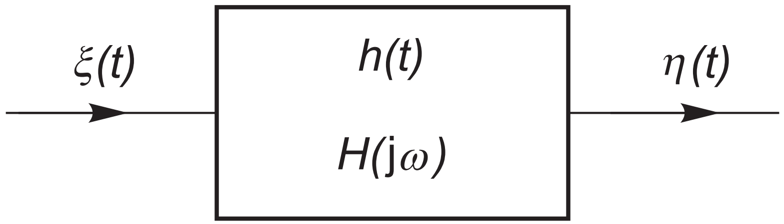




$$\xi(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + w(t)$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(\omega_0\tau) + S_0\delta(\tau), \qquad S_\xi(\omega) = \frac{\pi}{2}A^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0] + S_0$$

Przetwarzanie sygnałów stochastycznych przez liniowe układy stacjonarne



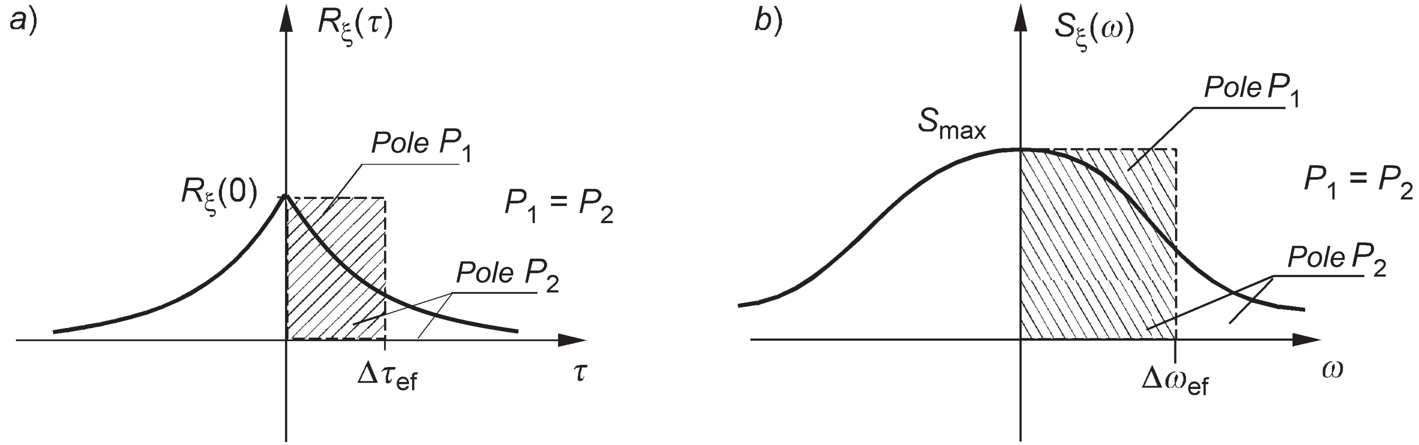
$$\mu_\eta = H(0)\mu_\xi$$

$$R_\eta(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_\xi(\tau)$$

$$S_\eta(\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|^2 S_\xi(\omega)$$

$$\mathrm{E}[\eta^2] = R_\eta(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_\xi(\omega)|H(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

Efektywny czas korelacji i efektywna szerokość pasma sygnału



$$\Delta\tau_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{R_\xi(0)} \int_0^\infty R_\xi(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \Delta\omega_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{S_{\max}} \int_0^\infty S_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{\pi} S_{\max}\Delta\omega_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\xi_{\mathrm{sk}} = \sqrt{\frac{S_{\max\Delta\omega_{\mathrm{ef}}}}{\pi}}$$