DYSKRETNE SYGNAŁY STOCHASTYCZNE

Definicja (dyskretny sygnał stochastyczny)
Dyskretnym sygnałem stochastycznym (stochastycznym szeregiem czasowym) $\xi[n]$, określonym na zbiorze $\Im$, nazywamy ciąg zmiennych losowych ($n \in \Im$):

$$\xi[n] = \ldots, \xi(-1), \xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n), \ldots$$

$\xi(n)$ – *wartość* sygnału $\xi[n]$ w chwili n
$x[n]$ – *realizacja* sygnału $\xi[n]$

Momenty szeregu czasowego

<u>Wartość średnia</u>

$$\mu_\xi(n) = \mathrm{E}[\xi(n)], \qquad n \in \Im$$

Wartość średniokwadratowa (oczekiwana moc chwilowa)

$$P_\xi(n) = \mathrm{E}[\xi^2(n)], \qquad n \in \Im$$

Wariancja

$$\sigma_\xi^2(n) = \mathrm{E}\left\{[\xi(n) - \mu_\xi(n)]^2\right\}, \qquad n \in \Im$$

$$P_\xi(n) = \sigma_\xi^2(n) + \mu_\xi^2(n)$$

Funkcja autokorelacji

$$R_{\xi\xi}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[\xi(n_1)\xi(n_2)], \qquad n_1, n_2 \in \Im$$

Funkcja autokowariancji

$$C_{\xi\xi}(n_1, n_2) = \mathrm{E}\left\{[\xi(n_1) - \mu_\xi(n_1)][\xi(n_2) - \mu_\xi(n_2)]\right\}, \qquad n_1, n_2 \in \Im$$

Szeregi czasowe stacjonarne

Definicja (szereg stacjonarny w szerszym sensie)
Szereg czasowy $\xi[n]$ nazywamy *szeregiem czasowym stacjonarnym w szerszym sensie* (lub krótko *stacjonarnym*), jeżeli:

1. $\mathrm{E}[\xi(n)] = \mu_\xi = \mathrm{const}, \quad n \in \mathbb{C}$,
2. $R_{\xi\xi}(n_1, n_2) = R_{\xi\xi}(m), \quad m = n_1 - n_2, \quad m \in \mathbb{C}$,
3. $\sigma_\xi^2 < \infty$.

$$R_{\xi\xi}(m) = \mathrm{E}[\xi(n)\xi(n-m)] = \mathrm{E}[\xi(n)\xi(n+m)]$$

$$\begin{aligned} C_{\xi\xi}(m) &= \mathrm{E}\left\{[\xi(n) - \mu_\xi][\xi(n-m) - \mu_\xi]\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{[\xi(n) - \mu_\xi][\xi(n+m) - \mu_\xi]\right\} \end{aligned}$$

Właściwości charakterystyk rzędu drugiego stacjonarnych szeregów czasowych

- Funkcje autokorelacji i autokowariancji stacjonarnego szeregu czasowego są parzystymi funkcjami zmiennej m związanymi zależnością:

$$R_{\xi\xi}(m) = C_{\xi\xi}(m) + \mu_\xi^2$$

- Wartość funkcji autokorelacji w zerze stacjonarnego szeregu czasowego jest równa jego mocy:

$$R_{\xi\xi}(0) = \mathrm{E}[\xi^2] \triangleq P_\xi$$

- Wartość funkcji autokowariancji w zerze stacjonarnego szeregu czasowego jest równa jego wariancji, tj. mocy składowej zmiennej $\tilde{\xi}[n] = \xi[n] - \mu_\xi$:

$$C_{\xi\xi}(0) = \sigma_\xi^2 \triangleq P_{\tilde{\xi}}$$

- Funkcja autokorelacji i funkcja autokowariancji osiągają swoje wartości maksymalne dla $m = 0$:

$$\bigwedge_m |R_{\xi\xi}(m)| \leqslant R_{\xi\xi}(0), \qquad \bigwedge_m |C_{\xi\xi}(m)| \leqslant C_{\xi\xi}(0)$$

<u>Całkowita moc stacjonarnego szeregu czasowego</u>

$$P_\xi = P_{\tilde{\xi}} + P_{\bar{\xi}} = \sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2$$

Inny sposób interpretacji mocy szeregu czasowego

Moc pojedynczej realizacji $x[n]$ szeregu czasowego w skończonym przedziale czasu $[n_1, n_2]$:

$$\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x^2(n)$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2(n) \triangleq \overline{x^2[n]}$$

Moc (oczekiwana) szeregu czasowego $\xi[n]$:

$$\mathrm{E}[P_x] = \mathrm{E}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \xi^2(n)\right]$$

$$P_\xi = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{E}[\xi^2(n)]$$

Szeregi czasowe ergodyczne

Niech sygnał dyskretny $x[n]$ będzie realizacją stacjonarnego szeregu czasowego $\xi[n]$ o wartości średniej μ_ξ i funkcji autokorelacji $R_{\xi\xi}(m)$. Definiujemy średnie czasowe (wartość średnią i funkcje autokorelacji):

$$\overline{x[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

$$\psi_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n-m)$$

Definicja (ergodyczność ze względu na wartość średnią)
Szereg $\xi[n]$ nazywamy *ergodycznym ze względu na wartość średnią*, jeżeli dla prawie wszystkich jego realizacji $x[n]$, tzn. z prawdopodobieństwem 1, jest spełniona równość:

$$\overline{x[n]} \equiv \mu_\xi$$

Definicja (ergodyczność ze względu na funkcję autokorelacji)

Szereg $\xi[n]$ nazywamy *ergodycznym ze względu na funkcję autokorelacji*, jeżeli dla prawie wszystkich jego realizacji $x[n]$ jest spełniona równość:

$$\psi_x(m) \equiv R_{\xi\xi}(m)$$

Estymaty wartości oczekiwanej i funkcji autokorelacji

$$\hat{\mu}_\xi = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$$

$$\hat{R}_{\xi\xi}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)x(n-m)$$

Sygnały gaussowskie

DEFINICJA (SZEREG GAUSSOWSKI)
Rozważmy stacjonarny szereg czasowy $\xi[n]$ o wartości średniej μ_ξ, wariancji σ_ξ^2 i funkcji autokowariancji $C_{\xi\xi}(m)$. Wyróżnijmy N jego dowolnych wartości $\xi_i = \xi(n_i)$ określonych w chwilach $n_i,\ i = 1, \ldots, N$. Szereg czasowy nazywamy *szeregiem gaussowskim (normalnym)*, jeśli dla dowolnego zbioru chwil $n_1, \ldots, n_N$ i dowolnego N łączna N-wymiarowa FGP zmiennych losowych $\xi_1, \ldots, \xi_N$ jest funkcją gaussowską, tzn. ma postać:

$$f(x_1, \ldots, x_N; m_1, \ldots, m_{N-1}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_\xi^2)^N \det(\boldsymbol{c})}} \exp\left[-\frac{1}{2\det(\boldsymbol{c})\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{ij}(x_i - \mu_\xi)(x_j - \mu_\xi)\right]$$

$m_{i-1} = n_i - n_1,\ i = 2, 3, \ldots, N$, $\boldsymbol{c} = [c_{ij}]_{N\times N}$, $c_{ij} = C_{\xi\xi}(m_i - m_j)/\sigma_\xi^2$

Widmo mocy stacjonarnego szeregu czasowego

$$S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\theta}$$

$$R_{\xi\xi}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta}\mathrm{d}\theta$$

<u>Właściwości widma mocy:</u>

$$\bigwedge_{\theta} S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) \geqslant 0 \quad \wedge \quad S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$$

$$S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2k\pi)}), \quad k \in \mathbb{C}$$

$$P_{\xi} = \mathrm{E}[\xi^2(n)] = R_{\xi\xi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta$$

Dwa szeregi czasowe

Funkcje korelacji wzajemnej między szeregiem $\xi[n]$ i $\eta[n]$ (odpowiednio między szeregiem $\eta[n]$ a $\xi[n]$)

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[\xi(n_1)\eta(n_2)]$$

$$R_{\eta\xi}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[\eta(n_1)\xi(n_2)]$$

Funkcje kowariancji wzajemnej

$$C_{\xi\eta}(n_1, n_2) = \mathrm{E}\left\{[\xi(n_1) - \mu_\xi(n_1)][\eta(n_2) - \mu_\eta(n_2)]\right\}$$

$$C_{\eta\xi}(n_1, n_2) = \mathrm{E}\left\{[\eta(n_1) - \mu_\eta(n_1)][\xi(n_2) - \mu_\xi(n_2)]\right\}$$

Związki między funkcjami korelacji wzajemnej i kowariancji wzajemnej

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = R_{\eta\xi}(n_2, n_1), \qquad C_{\xi\eta}(n_1, n_2) = C_{\eta\xi}(n_2, n_1)$$

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = C_{\xi\eta}(n_1, n_2) + \mu_\xi(n_1)\mu_\eta(n_2)$$

$$R_{\eta\xi}(n_1, n_2) = C_{\eta\xi}(n_1, n_2) + \mu_\eta(n_1)\mu_\xi(n_2)$$

Szeregi czasowe ortogonalne i nieskorelowane

Szeregi $\xi[n]$ i $\eta[n]$ nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli dla dowolnych n_1,n_2

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = 0$$

Szeregi $\xi[n]$ i $\eta[n]$ nazywamy *nieskorelowanymi*, jeśli dla dowolnych n_1,n_2

$$C_{\xi\eta}(n_1, n_2) = 0$$

Szeregi czasowe łącznie stacjonarne

DEFINICJA (SZEREGI ŁĄCZNIE STACJONARNE)
Dwa szeregi $\xi[n]$ i $\eta[n]$ nazywamy *łącznie stacjonarnymi*, jeśli oba są stacjonarne a ich funkcje korelacji wzajemnej $R_{\xi\eta}(n_1, n_2)$ oraz $R_{\eta\xi}(n_1, n_2)$ są funkcjami tylko jednej zmiennej $m = n_1 - n_2$:

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = R_{\xi\eta}(m) = \mathrm{E}[\xi(n)\eta(n-m)] = \mathrm{E}[\xi(n+m)\eta(n)]$$

$$R_{\eta\xi}(n_1, n_2) = R_{\eta\xi}(m) = \mathrm{E}[\eta(n)\xi(n-m)] = \mathrm{E}[\eta(n+m)\xi(n)]$$

$$R_{\xi\eta}(m) = R\eta\xi(-m), \qquad m \in \mathbb{C}$$

Dwa szeregi czasowe łącznie stacjonarne są ortogonalne $\iff$ $R_{\xi\eta}(m) = 0$ dla każdego m
Dwa szeregi czasowe łącznie stacjonarne są nieskorelowane $\iff$ $C_{\xi\eta}(m) = 0$ dla każdego m

Widma wzajemne mocy

Widma wzajemne mocy dwóch szeregów łącznie stacjonarnych

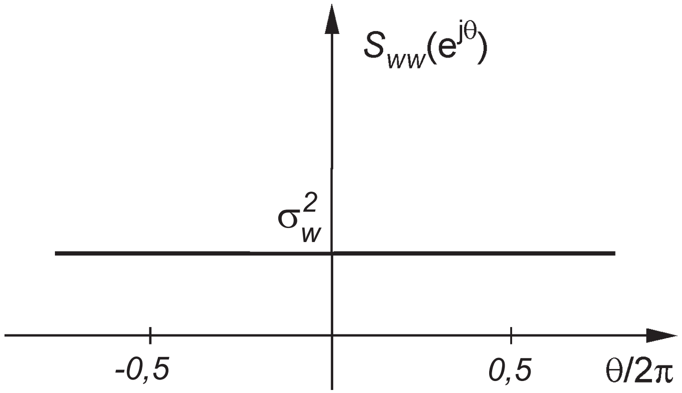
$$S_{\xi\eta}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\theta}$$

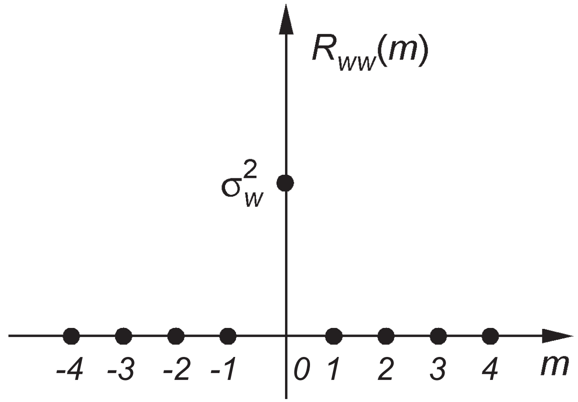
$$S_{\eta\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\eta\xi}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\theta}$$

$$S_{\xi\eta}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = S^{*}_{\eta\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$$

Przykłady stacjonarnych szeregów czasowych

Dyskretny szum biały



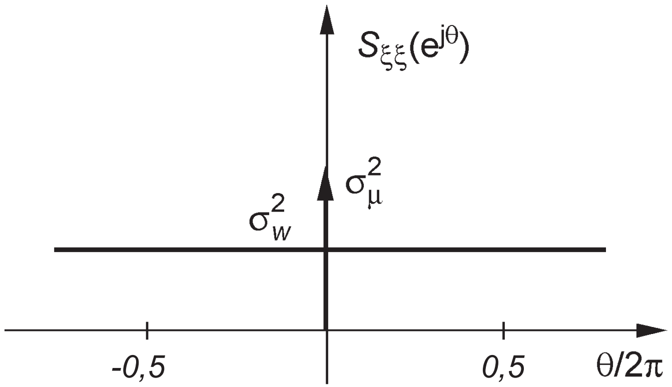


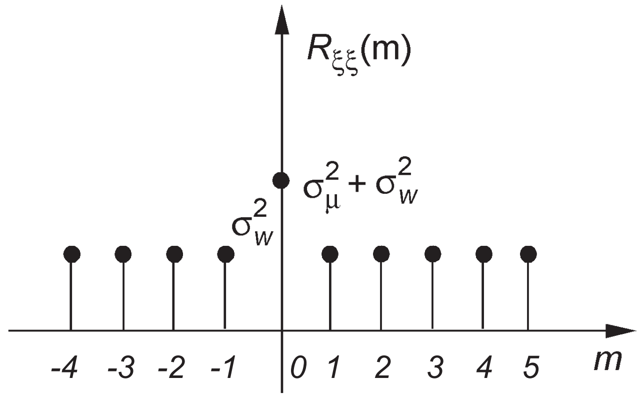
$$S_{ww}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sigma_w^2 = \mathrm{const}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$

$$R_{ww}(m) = \mathcal{F}^{-1}[\sigma_w^2] = \sigma_w^2 \delta(m)$$

$$\mathrm{E}[w(n_1)w(n_2)] = 0 \quad \text{dla} \quad n_1 \neq n_2$$

Szum biały z losową składową stałą





$$\xi[n] = \mu + w[n]$$

μ – zmienna losowa o zerowej średniej i wariancji σ_μ^2

$$S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = 2\pi\sigma_\mu^2\delta(\theta) + \sigma_w^2$$

$$R_{\xi\xi}(m) = \sigma_\mu^2 + \sigma_w^2\delta(m)$$

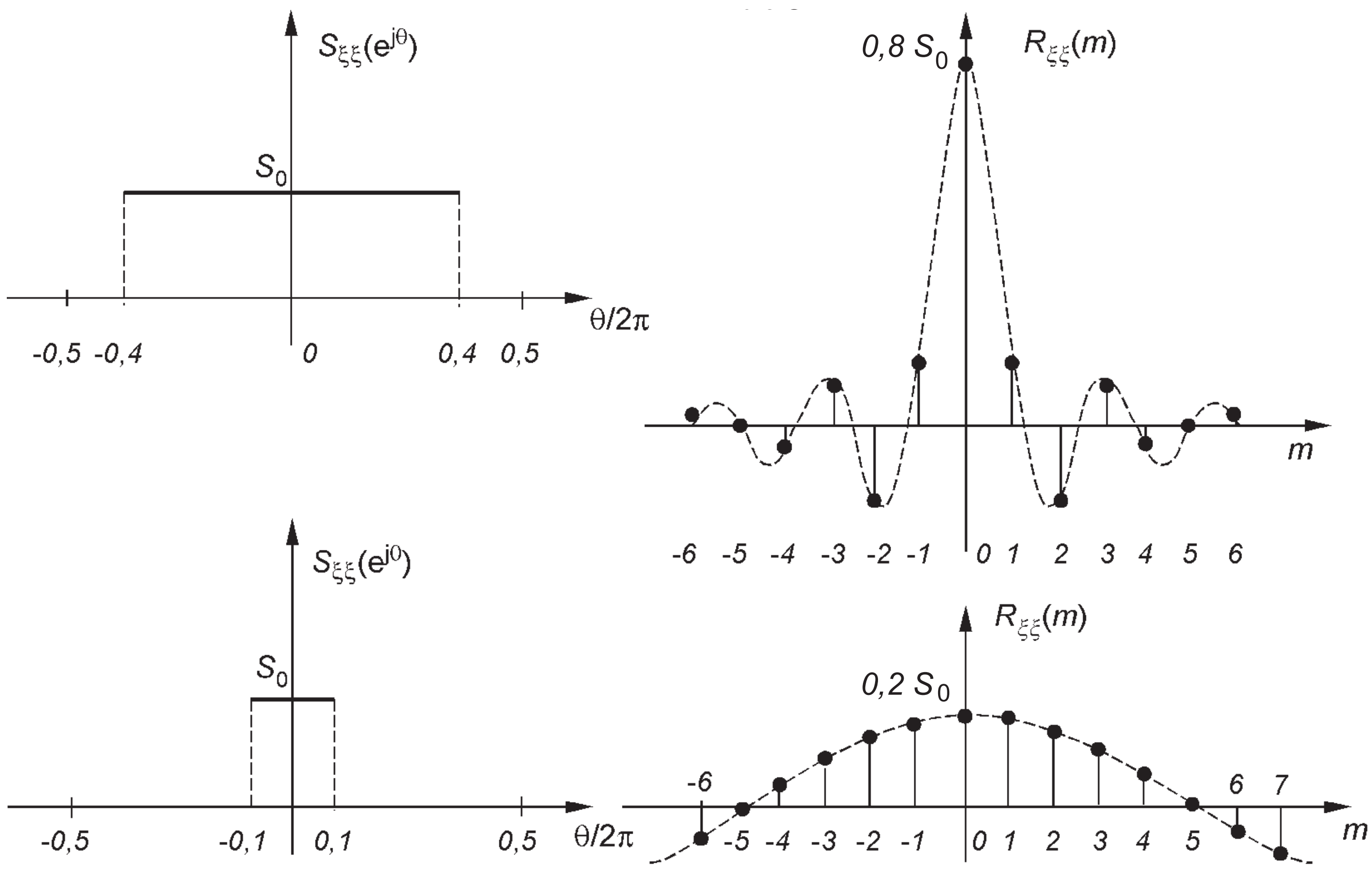
Dyskretny idealny szum dolnopasmowy

$$S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \begin{cases} S_0 & \text{dla} \quad |\theta| < \theta_m \\ 0 & \text{dla} \quad |\theta| \geqslant \theta_m \end{cases} , \qquad \theta_m \in (0, \pi)$$

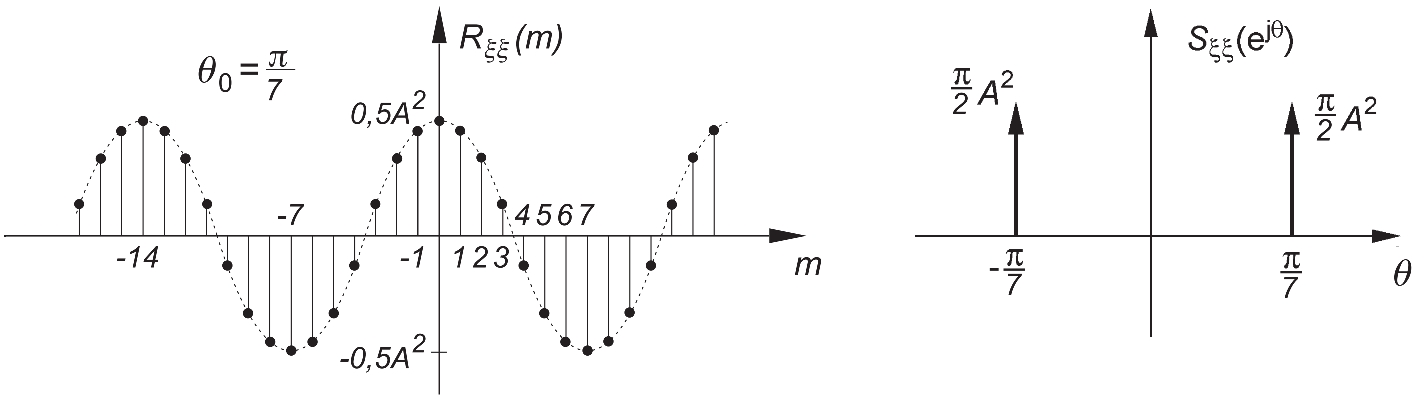
$$R_{\xi\xi}(m) = S_0 \frac{\sin m\theta_m}{\pi m} = \sigma_\xi^2 \mathrm{Sa}(m\theta_m)$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{S_0 \theta_m}{\pi}$$

Dyskretny idealny szum dolnopasmowy c.d.



Dyskretny sygnał harmoniczny o losowej fazie

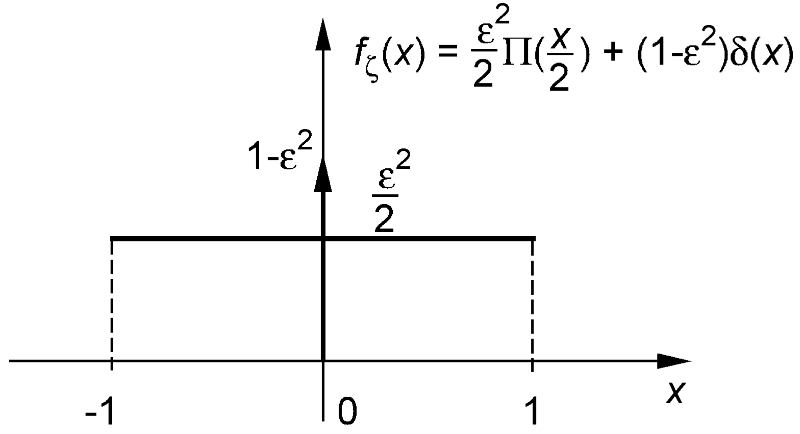


$$\xi(n) = A\sin(n\theta_0 + \varphi), \quad n \in \mathbb{C}$$

$$S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \frac{1}{2}\pi A^2[\delta(\theta - \theta_0) + \delta(\theta + \theta_0)]$$

$$R_{\xi\xi}(m) = \frac{1}{2}A^2\cos(m\theta_0), \quad m \in \mathbb{C}$$

Szum impulsowy o widmie białym

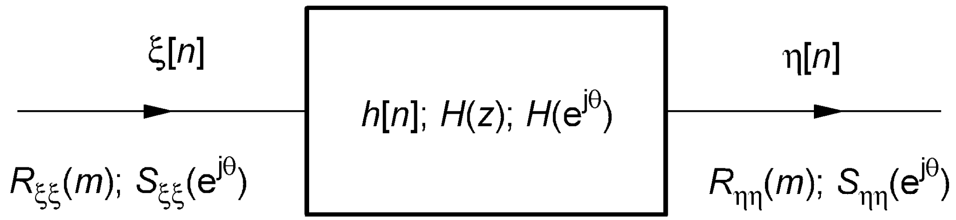


$$\zeta(n) = \begin{cases} \zeta & \text{z prawdopodobieństwem} \quad \varepsilon^2 \\ 0 & \text{z prawdopodobieństwem} \quad 1-\varepsilon^2 \end{cases}$$

ζ jest zmienną losową o rozkładzie $U(-1,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$

$$R_{\zeta\zeta} = \frac{\varepsilon^2}{3}\delta(m)$$

Przetwarzanie dyskretnych sygnałów stochastycznych przez dyskretne liniowe układy stacjonarne



$$\eta[n] = h[n] * \xi[n] = \xi[n] * h[n]$$

$$\eta(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\xi(i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\xi(n-i)$$

$$\mu_\eta = \mu_\xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)$$

$$R_{\eta\eta}(m) = h(m) * h(-m) * R_{\xi\xi}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(i)h(l)R_{\xi\xi}(m+l-i)$$

$$\boxed{S_{\eta\eta}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\right|^2 S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}$$

$$R_{\eta\eta}(z) = H(z)H^*(-z)R_{\xi\xi}(z)$$

<u>Charakterystyki wzajemne</u>

$$R_{\eta\xi}(m) = h(m) * R_{\xi\xi}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)R_{\xi\xi}(m-i)$$

$$R_{\xi\eta}(m) = h(-m) * R_{\xi\xi}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(-i)R_{\xi\xi}(m-i)$$

$$S_{\eta\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$$

$$S_{\xi\eta}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = H^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})S_{\xi\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$$

„Ugaussowienie" sygnału przy jego przejściu przez układ LS

$$\eta(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} h(n-i)\xi(i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\xi(n-i)$$

TWIERDZENIE (CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE)

Jeżeli $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym dowolnym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa, takiej samej wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2, to

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

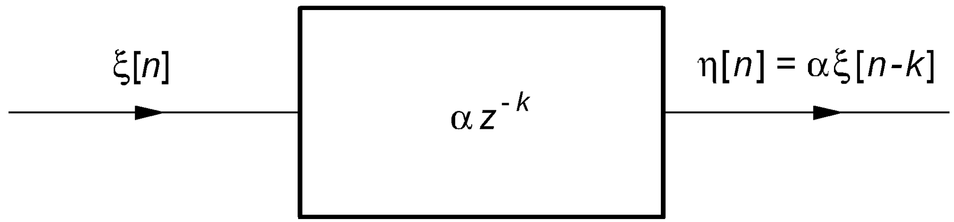
Tezę tę można zapisać w równoważnej postaci:

$$a_n(X_1 + \cdots + X_n) - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

gdzie $a_n = 1/\sigma\sqrt{n}$, zaś $b_n = \sqrt{n}\mu/\sigma$. Symbol $\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}}$ oznacza zbieżność według rozkładu przy n dążącym do nieskończoności, natomiast $\mathcal{N}(0,1)$ oznacza znormalizowany rozkład normalny. $\square$

Przykład zastosowania analizy korelacyjnej

Estymacja opóźnienia układu



$$h[n] = \alpha\delta[n-k]$$

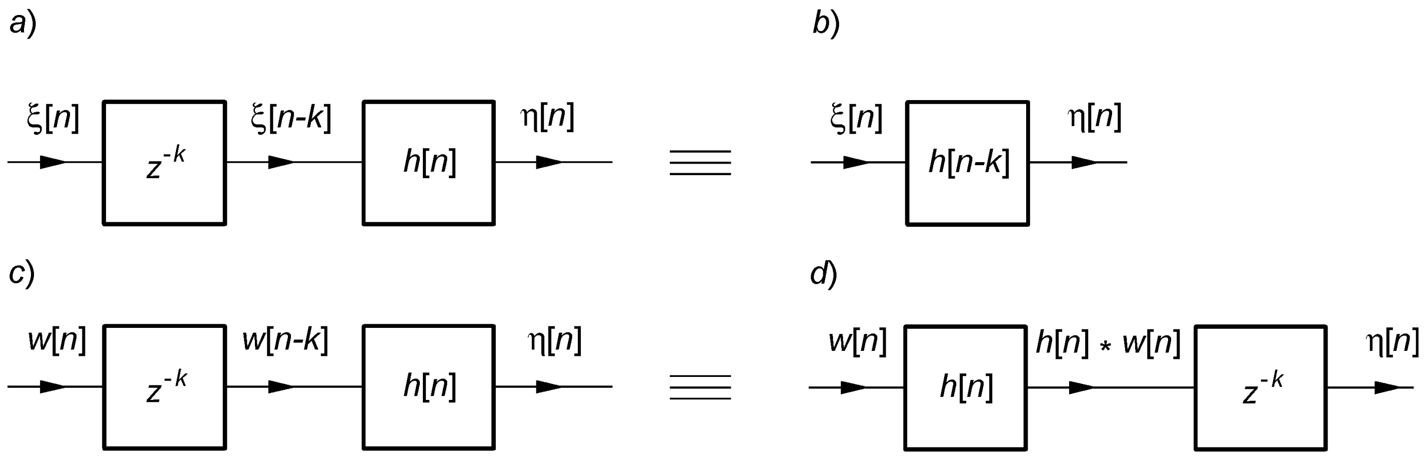
$$\eta[n] = \alpha\xi[n-k]$$

$$\begin{aligned} R_{\eta\xi}(m) = \mathrm{E}[\eta(n)\xi(n-m)] &= \mathrm{E}[\alpha\xi(n-k)\xi(n-m)] \\ &= \alpha\mathrm{E}[\xi(n-k)\xi(n-m)] = \alpha R_{\xi\xi}(m-k) \end{aligned}$$

Estymacja opóźnienia

$$\hat{R}_{\eta\xi}(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0 - m} x(n) y(n+m)$$

Estymacja opóźnienia



$$\eta[n] = h[n-k] * \xi[n]$$

$$R_{\eta\xi}(m) = h(m-k) * R_{\xi\xi}(m)$$

$$R_{\eta w}(m) = h(m-k) * R_{ww}(m) = h(m-k) * \delta(m) = h(m-k)$$