PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW

Teoretyczny model operacji próbkowania – próbkowanie idealne

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Twierdzenie o próbkowaniu (Kotielnikowa-Shannona)
Niech $x(t)$ będzie sygnałem, którego widmo $X(\omega)$ spełnia warunek $X(\omega) = 0$ dla $\omega \geqslant \omega_m$. Sygnał $x(t)$ jest równoważny zbiorowi swoich próbek odległych od siebie o stały przedział $T_s \leqslant \frac{\pi}{\omega_m}$, tzn.

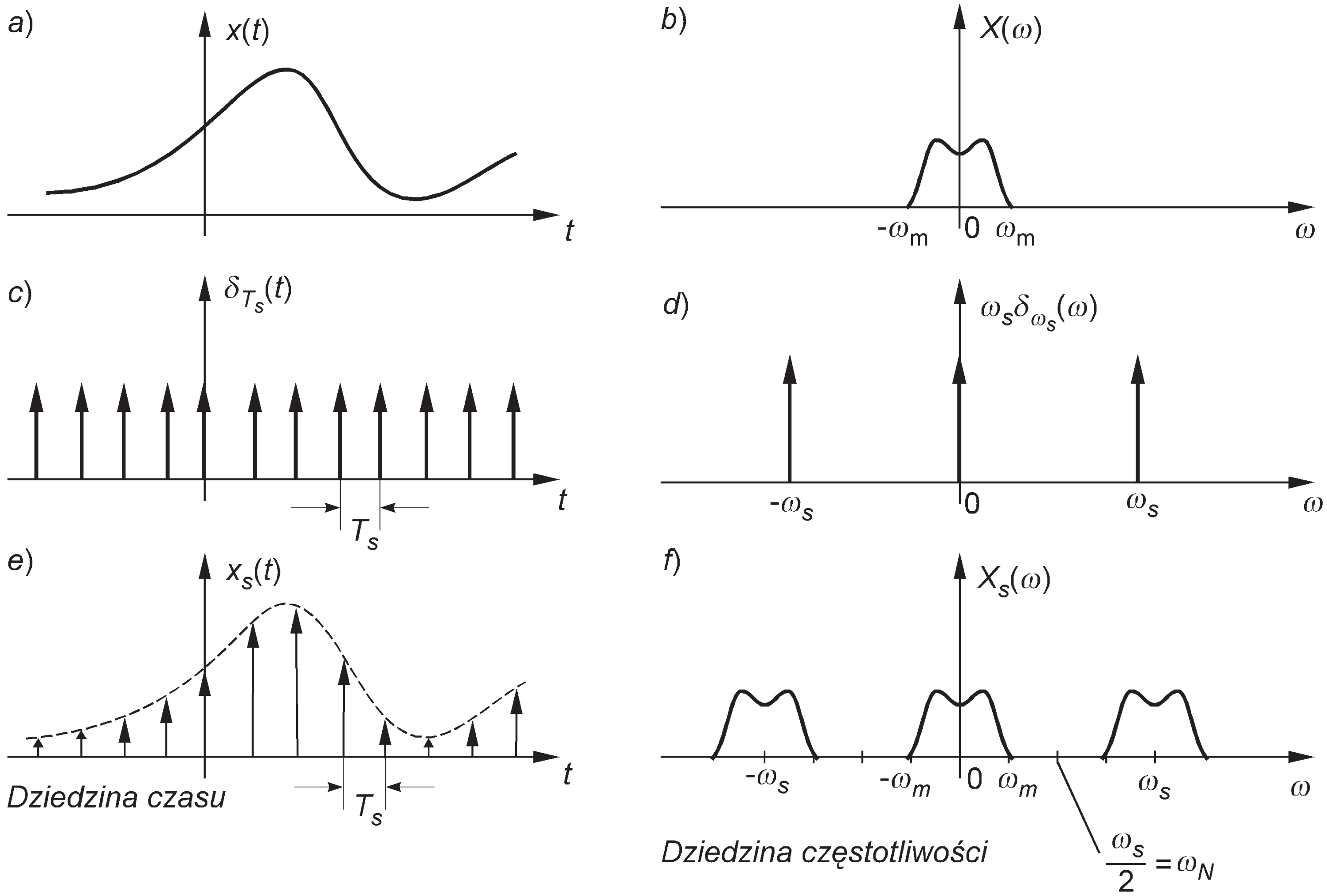
$$x(t) \equiv \left\{ x(nT_s) : \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \;\; \wedge \; T_s \leqslant \frac{\pi}{\omega_m} \right\}$$

Widmo impulsowego sygnału spróbkowanego

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}[x_s(t)] = \mathcal{F}[x(t)\delta_{T_s}(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]$$

$$\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)] = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$


a)
x(t)
t
b)
X(ω)
-ωm
0
ωm
ω
c)
δTs(t)
t
Ts
d)
ωsδωs(ω)
-ωs
0
ωs
ω
e)
xs(t)
t
Dziedzina czasu
Ts
f)
Xs(ω)
-ωs
-ωm
0
ωm
ωs
ω
Dziedzina częstotliwości
ωs/2 = ωN

Widmo sygnału dyskretnego

$$X_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT_s}$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} X_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}nT_s\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}, \qquad \theta = \frac{\omega}{f_s} = \omega T_s$$

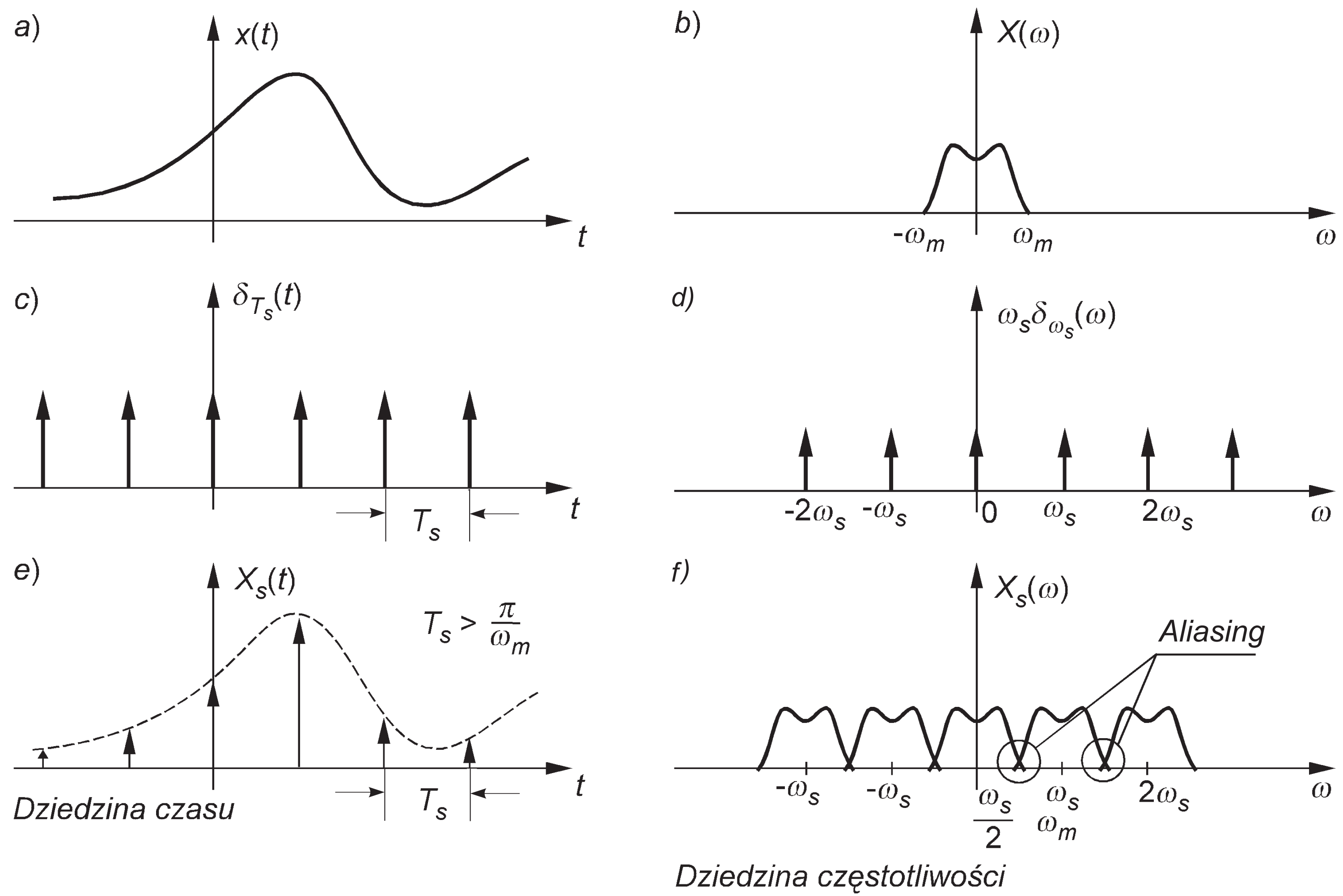
Warunek Nyquista – zjawisko *aliasingu*

$$T_s \leqslant \frac{\pi}{\omega_m}, \qquad T_s \leqslant \frac{1}{2f_m}$$

$$\omega_s \geqslant 2\omega_m, \qquad f_s \geqslant 2f_m$$

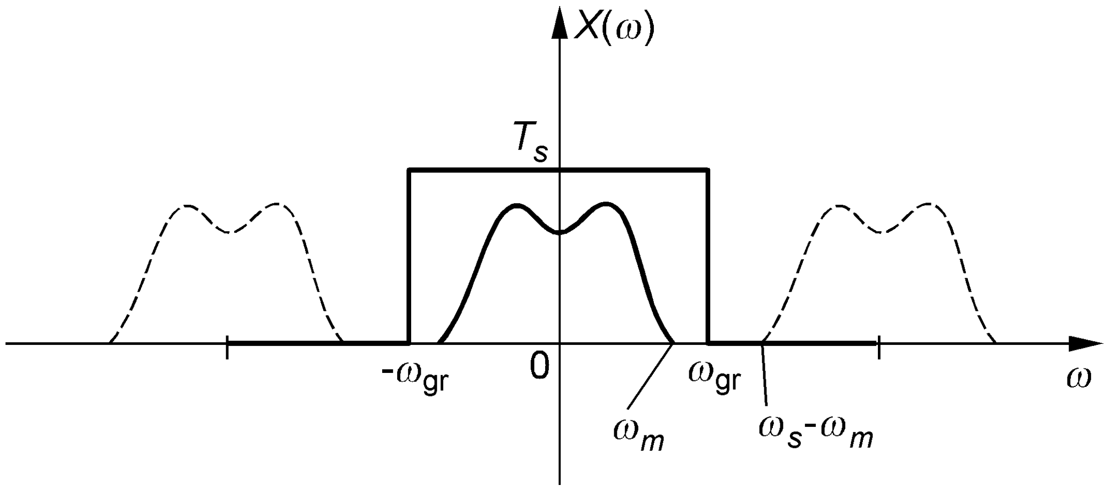
Częstotliwość Nyquista:

$$f_N \triangleq \frac{f_s}{2}$$



a)
x(t)
t
b)
X(ω)
-ωm
ωm
ω
c)
δTs(t)
t
Ts
d)
ωsδωs(ω)
-2ωs
-ωs
0
ωs
2ωs
ω
e)
Xs(t)
Ts > π/ωm
t
Ts
Dziedzina czasu
f)
Xs(ω)
Aliasing
-ωs
-ωs
ωs/2
ωs
ωm
2ωs
ω
Dziedzina częstotliwości

Teoretyczny model odtwarzania sygnału analogowego na podstawie jego próbek



$$H(\mathrm{j}\omega) = T_s \prod \left(\frac{\omega}{2\omega_{\mathrm{gr}}} \right)$$

$$\omega_m < \omega_{\mathrm{gr}} < \omega_s - \omega_m$$

$$Y(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)X_s(\omega) = T_s \prod\left(\frac{\omega}{2\omega_{\mathrm{gr}}}\right) X_s(\omega)$$

$$Y(\omega) = T_s \prod\left(\frac{\omega}{2\omega_{\mathrm{gr}}}\right) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) = X(\omega)$$

Dla $T_s = \frac{\pi}{\omega_m}$ otrzymujemy:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{\omega_m} \prod\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)\right] * \mathcal{F}^{-1}[X_s(\omega)]$$

$$h(t) = \mathrm{Sa}(\omega_m t)$$

$$x(t) = \mathrm{Sa}(\omega_m t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s), \qquad T_s = \frac{\pi}{\omega_m}$$

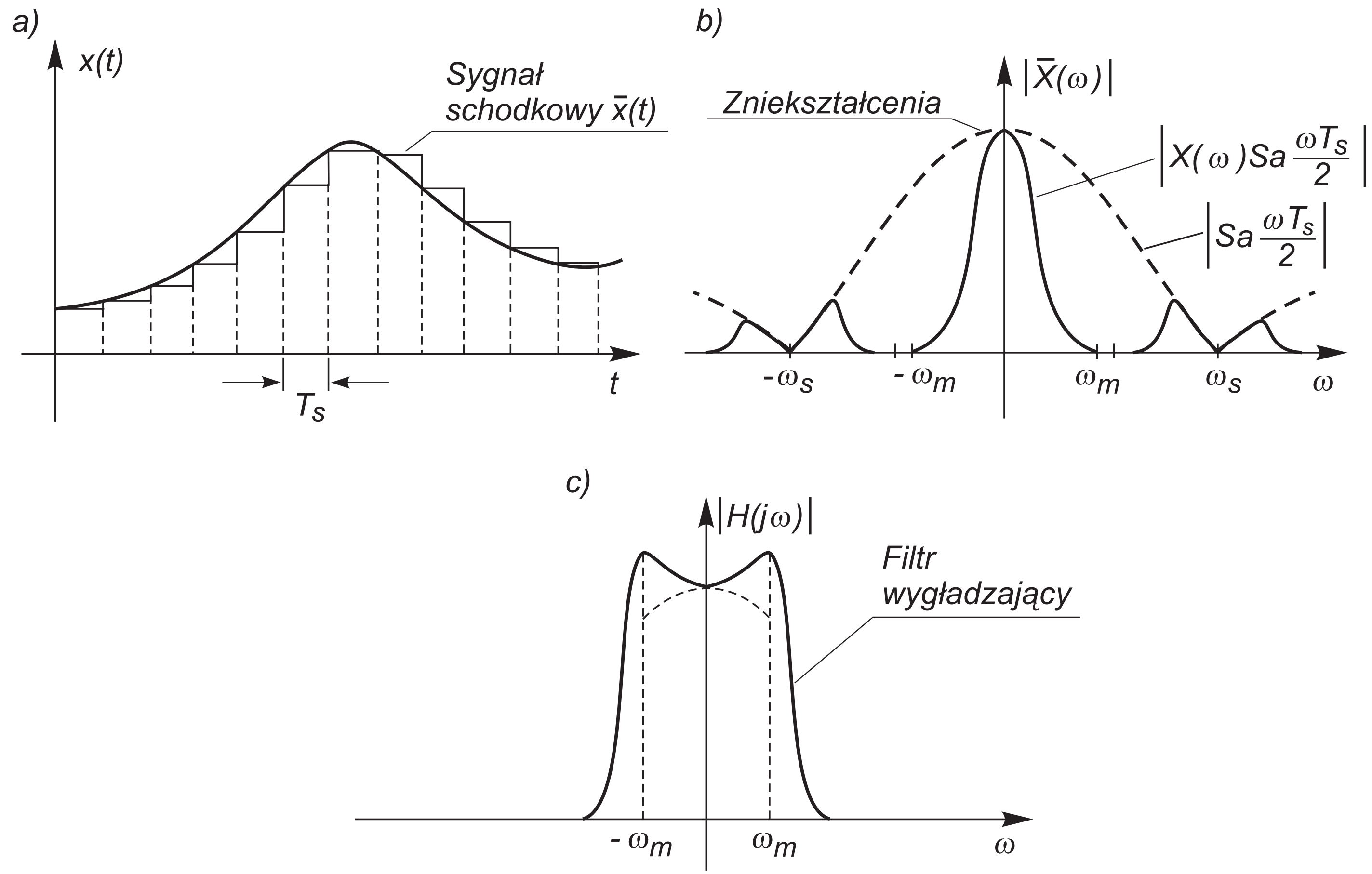
Szereg (interpolacyjny) Kotielnikowa-Shannona

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\omega_m(t - nT_s)\right], \qquad T_s = \frac{\pi}{\omega_m}}$$

<u>Praktyczna realizacja operacji odtwarzania sygnału analogowego z jego próbek</u>

$$\bar{x}(t) = v(t) * x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)v(t - nT_s)$$

$$v(t) = \prod\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \qquad 0 < t < T_s \\ 0 & \text{dla pozostałych } \ t \end{cases}$$



$$\bar{X}(\omega) = V(\omega) X_s(\omega)$$

$$V(\omega) = T_s \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$\bar{X}(\omega) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s), \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Twierdzenie o próbkowaniu sygnałów stochastycznych

DEFINICJA

Powiemy, że sygnał stacjonarny $\xi(t)$ jest sygnałem *o ograniczonym pasmie*, inaczej sygnałem *dolnopasmowym*, jeżeli istnieje skończona liczba ω_m taka, że $S_\xi(\omega) = 0$ dla $|\omega| > \omega_m$. Pulsację ω_m nazwiemy *pulsacją graniczną* sygnału.

Próbką sygnału $\xi(t)$ w punkcie $t = t_0$ nazwiemy zmienną losową $\xi(t_0)$ określoną w tym punkcie. Próbkę sygnału w punkcie $t = t_0$ będziemy reprezentować impulsem Diraca w punkcie t_0 o wysokości $\xi(t_0)$, tzn. dystrybucją stochastyczną $\xi(t_0)\delta(t - t_0)$.

Stochastyczny sygnał spróbkowany:

$$\xi_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

TWIERDZENIE

Niech $\xi(t)$ będzie sygnałem stacjonarnym o funkcji autokorelacji $R_\xi(\tau)$ i widmie gęstości mocy $\xi(\omega)$ spełniającym warunek $S_\xi(\omega) = 0$ dla $|\omega| \geqslant \omega_m$. Sygnał $\xi(t)$ jest równoważny zbiorowi swoich próbek odległych od siebie o stały przedział próbkowania $T_s \leqslant \frac{\pi}{\omega_m}$ i jest określony przez te próbki wyrażeniem:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t - nT_s)]$$

Równoważność tę rozumiemy jako <u>równoważność w sensie średniokwadratowym.</u>

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t - nT_s)]$$

$$\bigwedge_t \quad \mathrm{E}\left\{\left|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\right|^2\right\} = 0$$

Analiza odstępstw od idealnych założeń twierdzenia o próbkowaniu

- nierealizowalność operacji próbkowania idealnego
- skończony czas trwania sygnału – nieograniczone pasmo
- skończone okno czasowe obserwacji sygnału
- zbyt wolne próbkowanie – ograniczenia przetworników A/C
- nierealizowalność idealnej filtracji dolnoprzepustowej
- skończona dokładność reprezentacji cyfrowej próbek
- losowy rozrzut rzeczywistych chwil, w których pobierane są próbki, wokół chwil teoretycznych nT_s