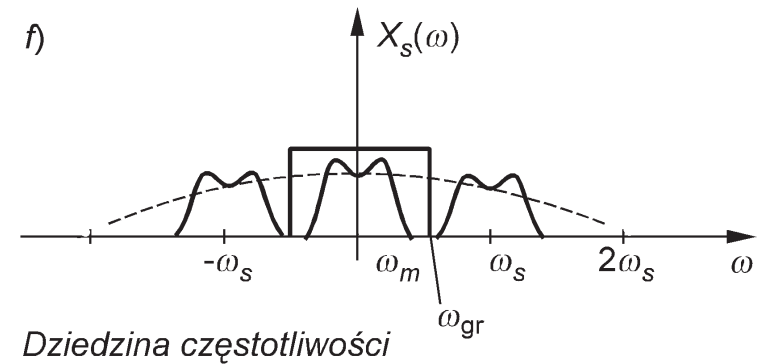
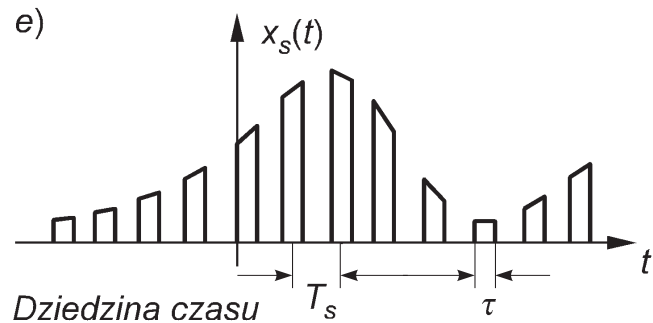
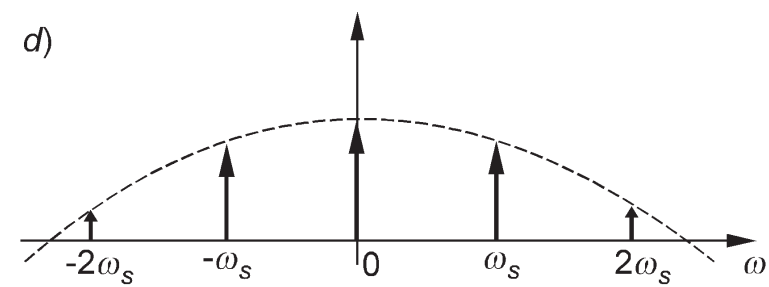
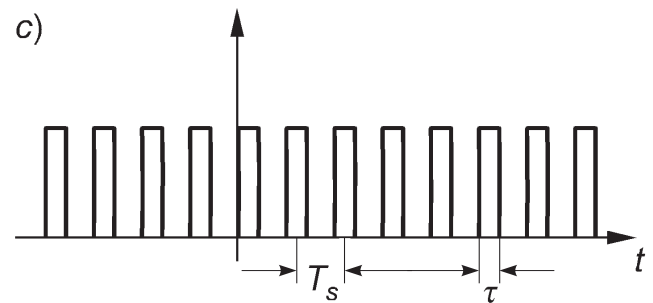
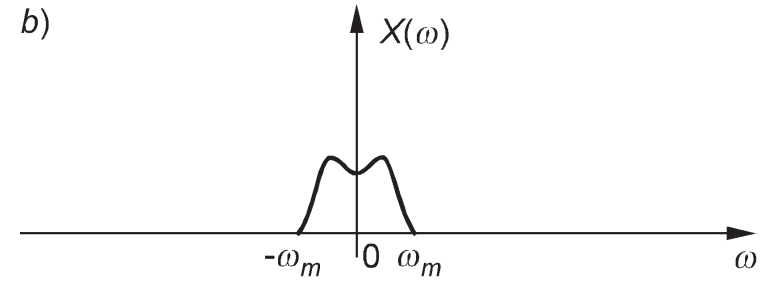
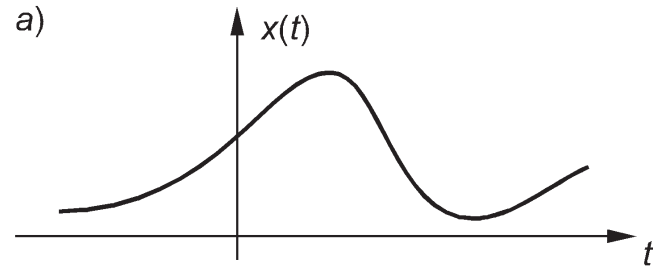


Analiza odstępstw od idealnych założeń twierdzenia o próbkowaniu

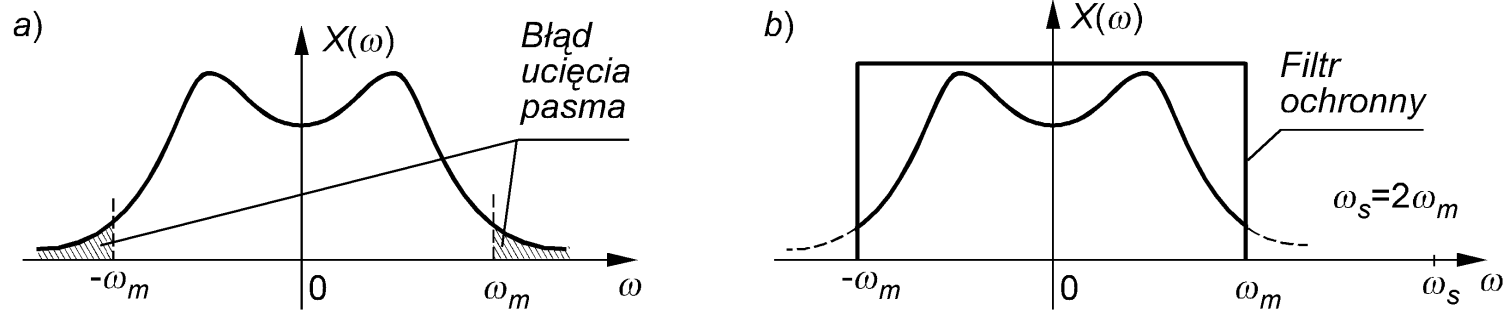
- nierealizowalność operacji próbkowania idealnego
- skończony czas trwania sygnału – błąd ucięcia pasma
- skończone okno czasowe obserwacji sygnału – błąd ucięcia w czasie
- zbyt wolne próbkowanie – ograniczenia przetworników A/C
- nierealizowalność idealnej filtracji dolnoprzepustowej
- skończona dokładność reprezentacji cyfrowej próbek
- losowy rozrzut rzeczywistych chwil, w których pobierane są próbki, wokół chwil teoretycznych nT_s

Nierealizowalność operacji próbkowania idealnego

Próbkowanie naturalne



Skończony czas trwania sygnału. Błąd ucięcia pasma



$$X_{\omega_m}(\omega) = X(\omega) \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)$$

$$x(t; \omega_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = x(t; \omega_m) + x_\varepsilon(t; \omega_m)$$

$$E_x = E_{x-x_\varepsilon} + E_{x_\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_m} |X(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_m}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\Delta(\omega_m) = \frac{E_{x_\varepsilon}}{E_x} = \frac{\int_{\omega_m}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

Skończony czas obserwacji sygnału. Błąd ucięcia w czasie

Przyjmijmy, że sygnał $x(t)$ o ograniczonym pasmie (nieograniczonym czasie trwania) i próbkowany z częstotliwością Nyquista $f_s = 2f_m$, jest obserwowany w skończonym oknie czasowym $[-T_0, T_0]$.

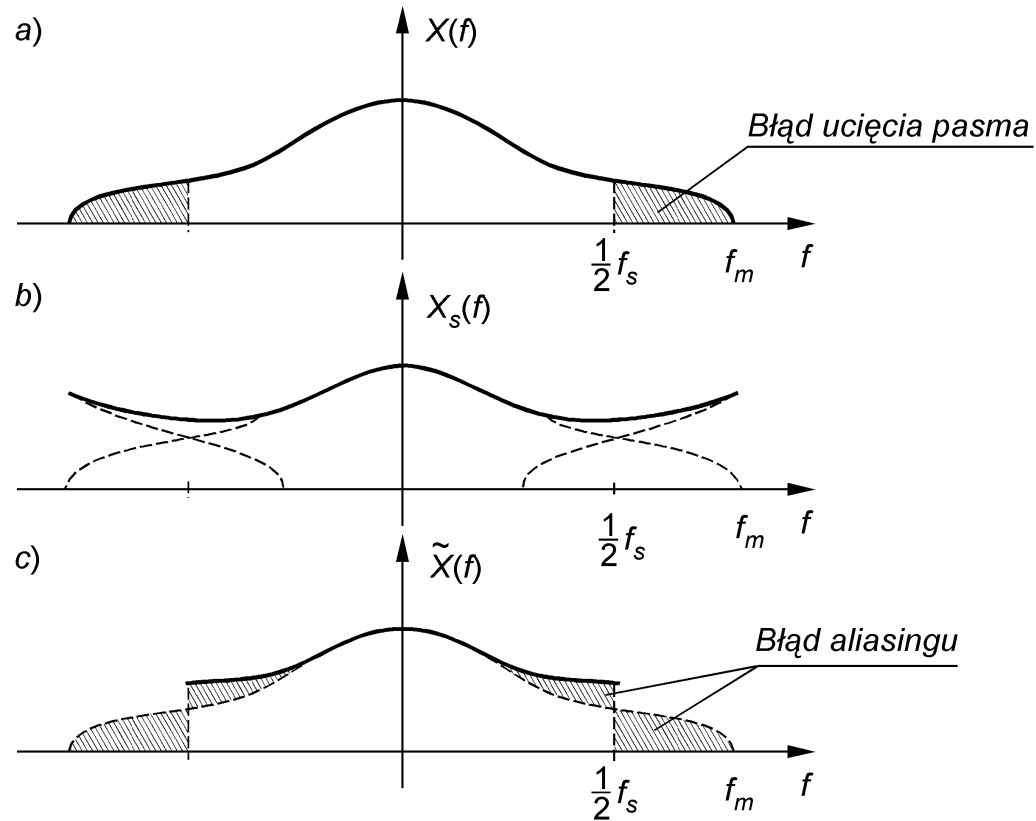
$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N x(nT_s) \text{Sa}[2\pi f_m(t - nT_s)], \quad T_s = \frac{1}{2f_m}$$

Błąd ucięcia w czasie

$$\varepsilon_N = x(t) - x_N(t)$$

$$X_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2T_0 \text{Sa}(\omega T_0)$$

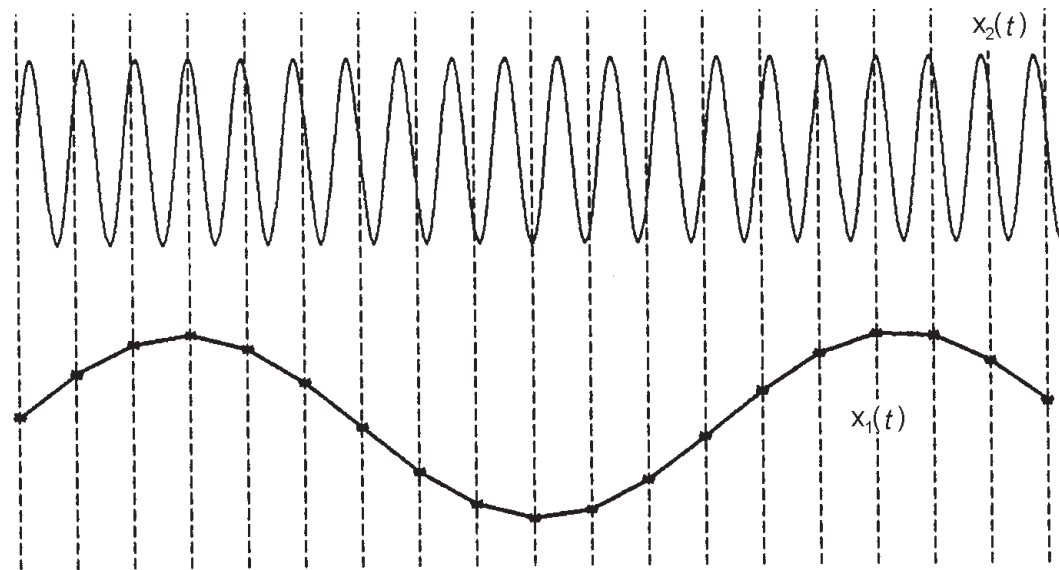
Próbkowanie z częstotliwością mniejszą od częstotliwości Nyquista. Błąd aliasingu

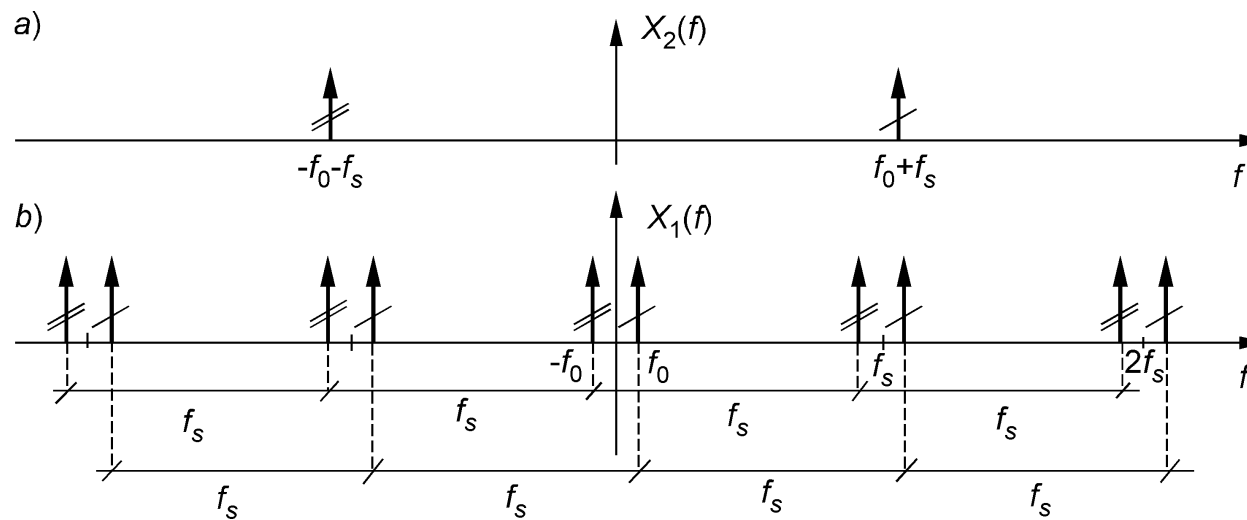


Efekt stroboskopowy

$$x_1(nT_s) = \sin(2\pi f_0 nT_s)$$

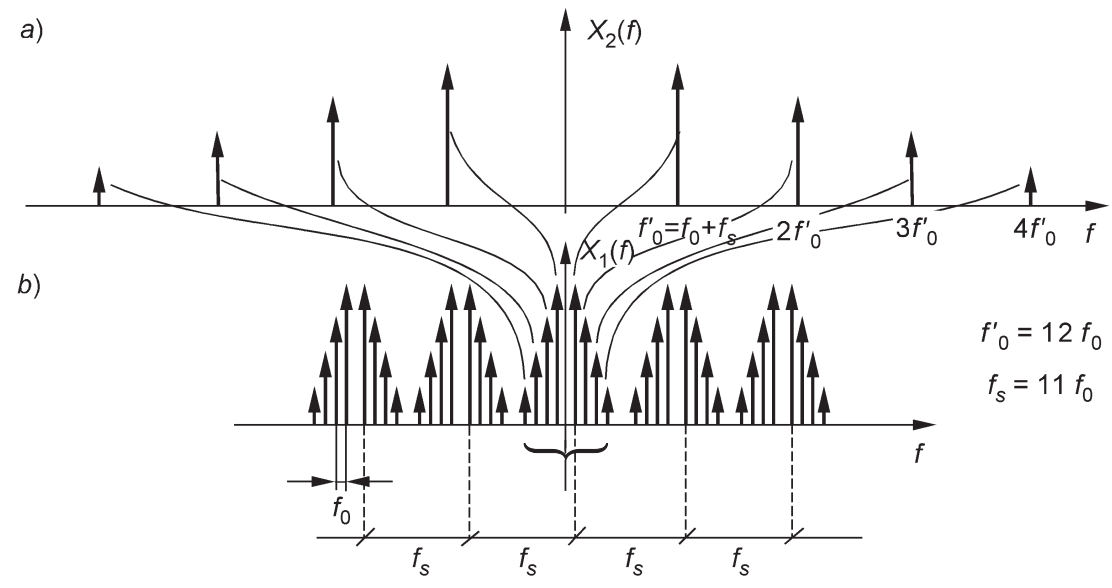
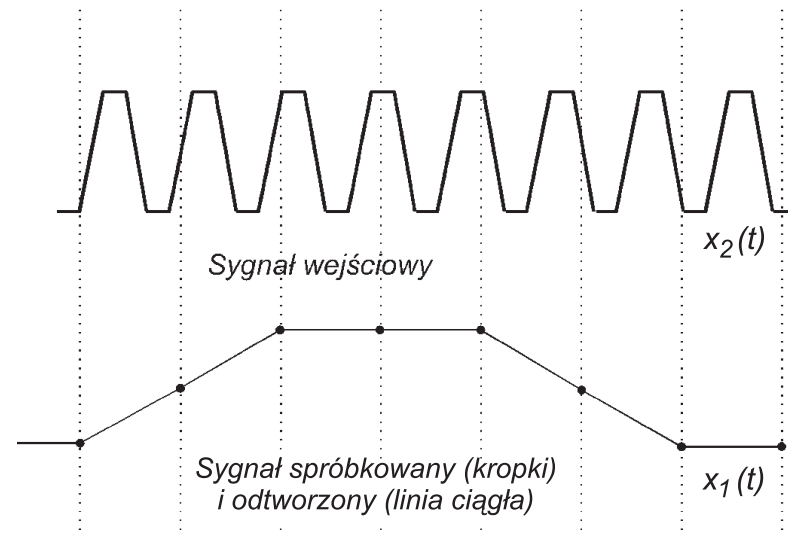
$$x_2(nT_s) = \sin[2\pi(f_0 + K f_s)nT_s] = \sin(2\pi f_0 nT_s + 2\pi nK) = \sin(2\pi f_0 nT_s)$$



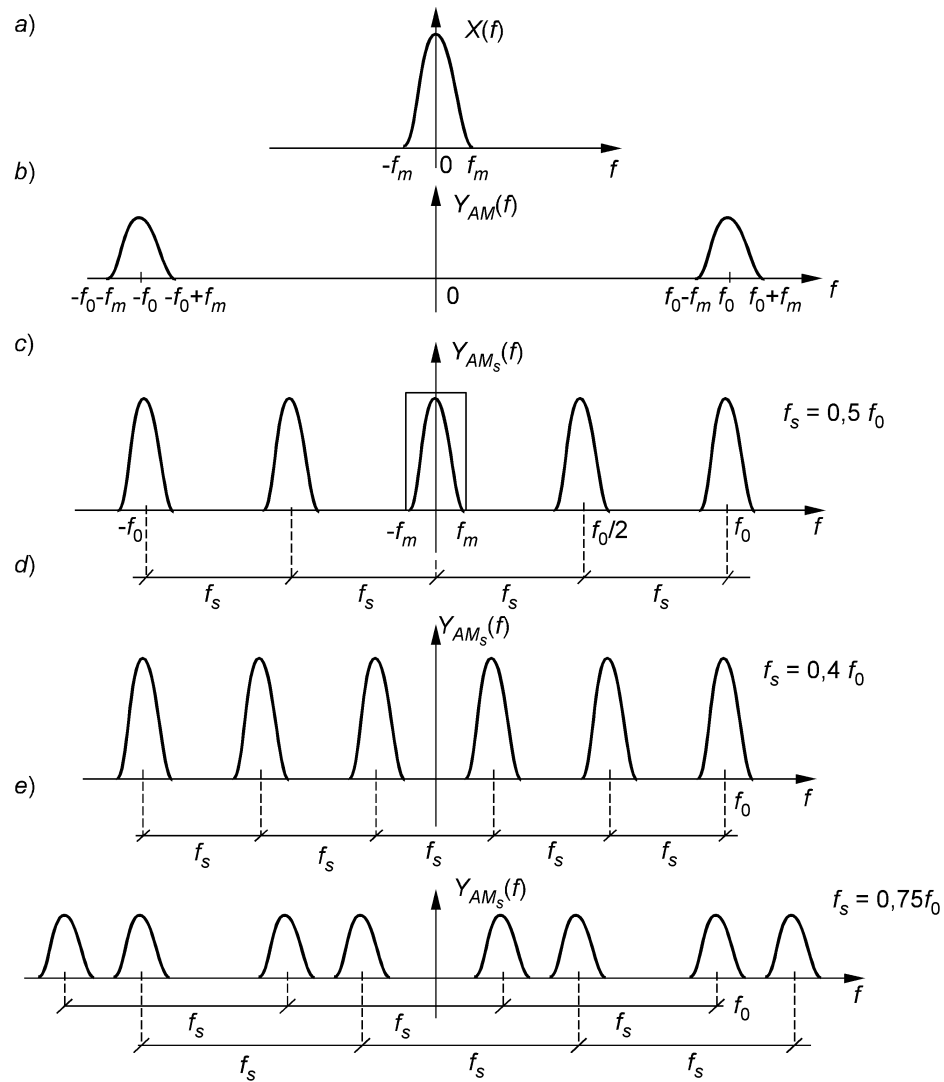


Efekt stroboskopowy w przypadku dowolnego sygnału okresowego

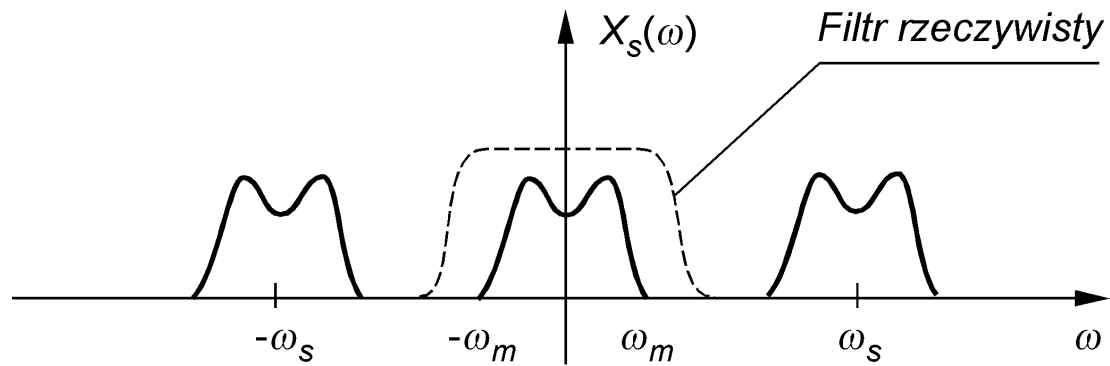
$$f_s > 2Kf_0$$



Próbkowanie sygnałów wąskopasmowych



Nierealizowalność idealnego filtra dolnoprzepustowego



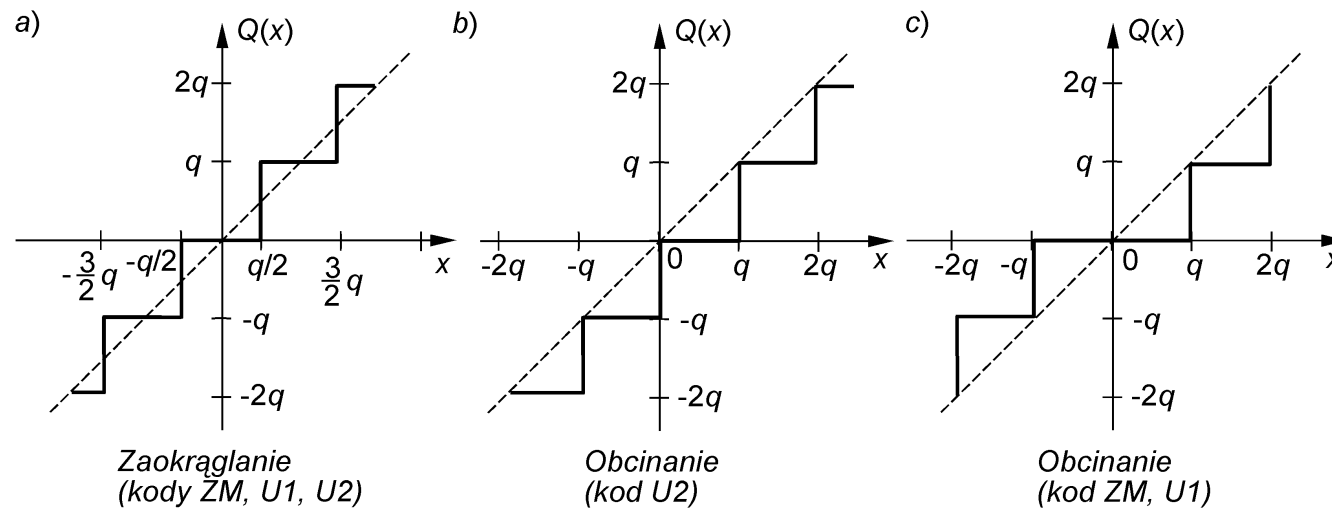
Skończona dokładność reprezentacji cyfrowej próbek

Błąd (szum) kwantowania

$$x_c[nT_s] = Q(x[nT_s])$$

Szum kwantowania

$$\varepsilon(nT_s) = x_c(nT_s) - x(nT_s)$$



Jeżeli rozkład wartości sygnału jest zbliżony do rozkładu równomiernego w pewnym przedziale symetrycznym $|x| \leq X_{\max}$ lub do rozkładu gaussowskiego uciętego w tym przedziale, to błąd kwantowania ma odpowiednio postać:

a) zaokrąglanie (kody ZM, U1, U2)

$$\varepsilon(nT_s) = w(nT_s)$$

b) obcinanie (kod U2)

$$\varepsilon(nT_s) = w(nT_s) - \frac{q}{2}$$

c) obcinanie (kod ZM, U1)

$$\varepsilon(nT_s) = w(nT_s) - \frac{q}{2} \operatorname{sgn}[x(nT_s)]$$

$w[nT_s]$ – szum biały o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-q/2, q/2]$ i wariancji

$$\sigma_w^2 = \frac{q^2}{12}$$

Związek między funkcjami gęstości prawdopodobieństwa: $f_\varepsilon(x)$ błędu kwantowania oraz $f(x)$ wartości sygnału próbkowanego dla kodu U2 z zaokrągleniem:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} f(x+iq) \Pi\left(\frac{x}{q}\right)$$

$N = 2^b$ – liczba poziomów kwantowania przetwornika b -bitowego

$q = 2X_{\max}/N$ – kwant przetwornika

Warunki jakie muszą być spełnione, aby błąd kwantowania był w przybliżeniu szumem o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-q/2, q/2]$:

1. liczba przedziałów kwantowania powinna być dostatecznie duża;
2. funkcja gęstości prawdopodobieństwa wartości sygnału powinna być dostatecznie gładka.

Fala trójkątna symetryczna

Równomierny rozkład wartości sygnału w przedziale $[-X_{\max}, X_{\max}]$

Sygnał sinusoidalny

$$x(t) = X_{\max} \sin(2\pi f_0 t)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{X_{\max}^2 - x^2}}, \quad |x| < X_{\max}$$

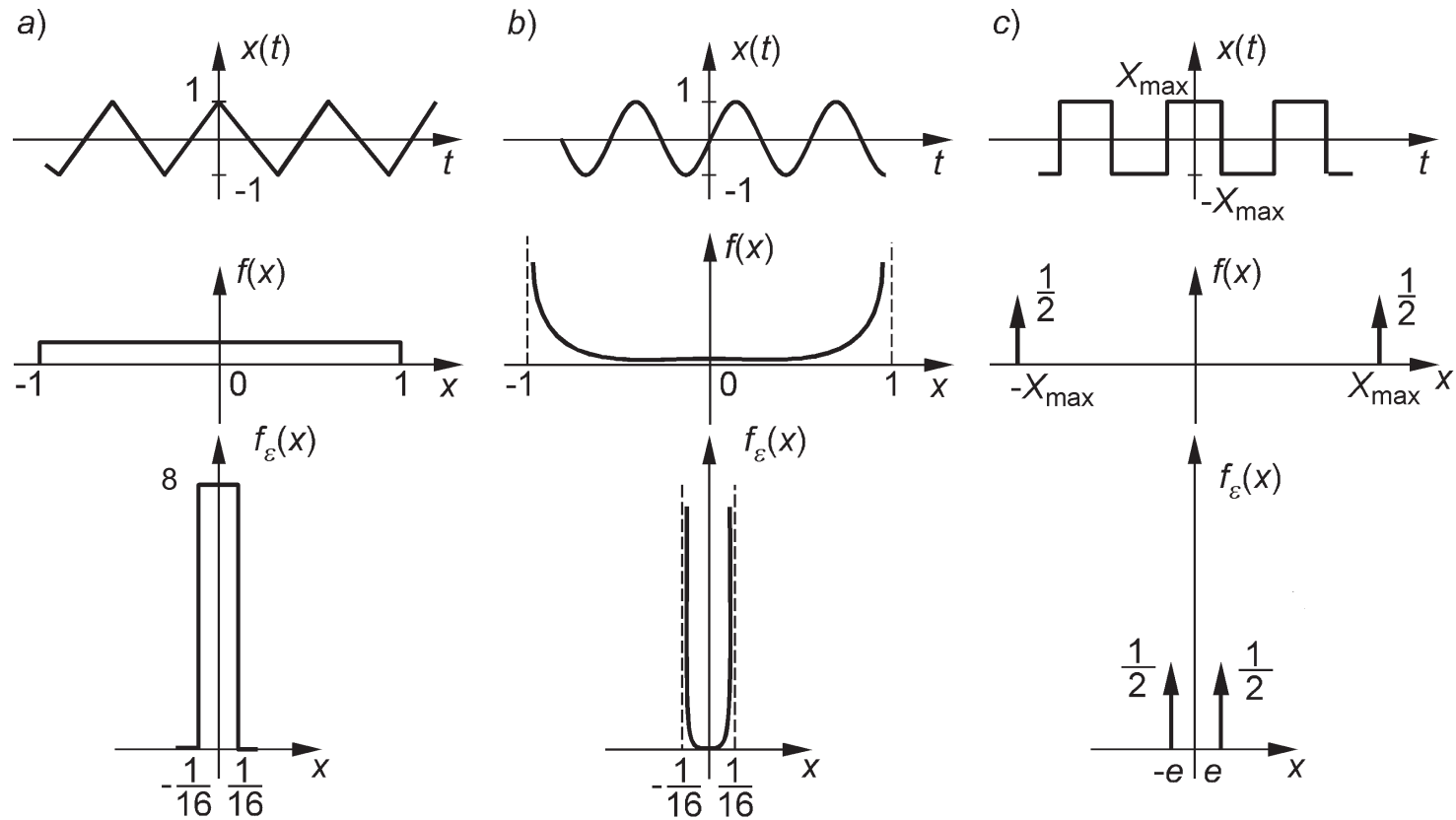
Fala prostokątna bipolarna

$$f(x) = \frac{1}{2} [\delta(x - X_{\max}) + \delta(x + X_{\max})]$$

$$f_{\varepsilon}(x) = [\delta(x - e) + \delta(x + e)]$$

$$e = \frac{q}{2} \wedge \left(\frac{X_{\max} - q/2}{q/2} \right) \text{ mod } q$$

Rozkłady wartości sygnału i błędu kwantowania



Heurystyczne kryteria braku korelacji między próbkami szumu

kwantowania:

1. wartości sąsiadujących próbek powinny różnić się na tyle, aby nie trafiały w ten sam przedział kwantowania;
2. w przypadku sygnałów okresowych okres sygnału nie powinien być wielokrotnością ani podwielokrotnością okresu próbkowania.

Dla sygnału sinusoidalnego:

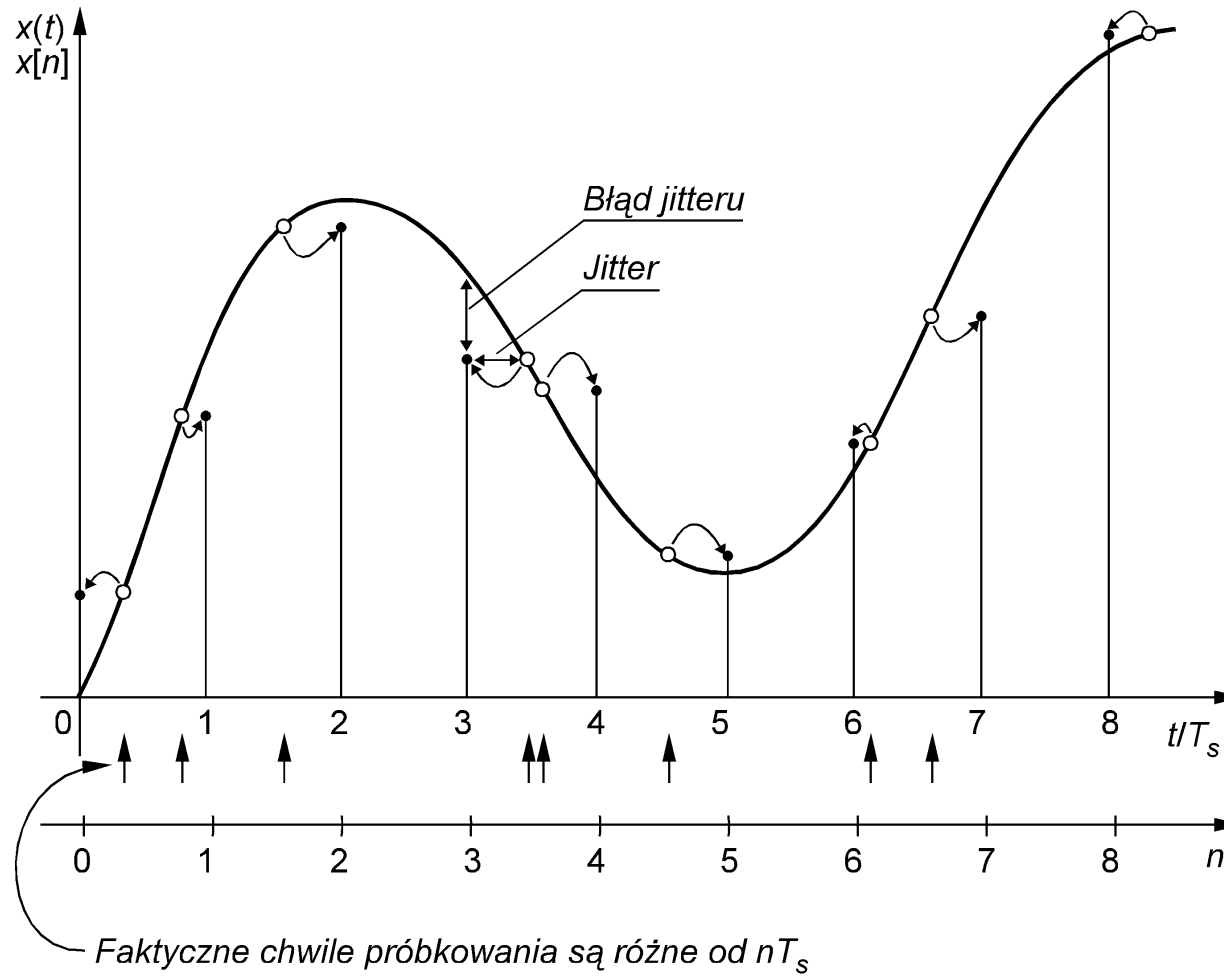
$$|X_{\max} \sin(2\pi f_0 t) - X_{\max} \sin[2\pi f_0 (t + T_s)]| > q$$

$$f_0 > f_{0_{\min}} = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \left(1 - \frac{q}{X_{\max}} \right) \right] f_s$$

Warunek silnej korelacji:

$$f_0 < \left[\frac{1}{2\pi} \arcsin \left(\frac{q}{X_{\max}} \right) \right] f_s$$

Błąd jitteru



Błąd jitteru:

$$\varepsilon_j(nT_s) = x(nT_s + \zeta) - x(nT_s)$$

ζ jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-\alpha T_s, \alpha T_s]$, $\alpha < 1/2$ i wariancji:

$$\sigma_\zeta^2 = \frac{(\alpha T_s)^2}{3}$$

Dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\varepsilon_j(nT_s) \approx \zeta \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT_s}$$

$$\sigma_j^2(nT_s) = \sigma_\zeta^2 \left[\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT_s} \right]^2$$

Fala trójkątna symetryczna

$$\varepsilon_j(nT_s) \approx \frac{4X_{\max}}{T_0} \zeta$$

$$\sigma_j^2(nT_s) \equiv \sigma_j^2 = \frac{16}{3} \alpha^2 \frac{T_s^2}{T_0^2} X_{\max}^2$$

Sygnał sinusoidalny

$$\varepsilon_j(nT_s) = [2\pi f_0 X_{\max} \cos(2\pi f_0 nT_s)] \zeta$$

$$\sigma_j^2(nT_s) = \frac{4}{3} \pi^2 \alpha^2 \frac{T_s^2}{T_0^2} X_{\max}^2 \cos^2(2\pi f_0 nT_s)$$