

MODULACJE ANALOGOWE

Nośna:

$$c(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

Sygnał analityczny sygnału zmodulowanego $y(t)$:

$$z_y(t) = m(t)z_c(t), \quad z_c(t) = Y_0 e^{j\Omega t}$$

Funkcja modulująca zależna od sygnału modulującego:

$$m(t) = |m(t)| e^{j \arg m(t)}$$

$$z_y(t) = |z_y(t)| e^{j\psi(t)} = Y_0 m(t) e^{j\Omega t} = \mathbf{Y}(t) e^{j\Omega t}$$

Obwiednia zespolona:

$$\mathbf{Y}(t) = Y_0 m(t) = Y_0 |m(t)| e^{j \arg m(t)}$$

Obwiednia rzeczywista:

$$|z_y(t)| = Y_0 |m(t)|$$

Kąt sygnału zmodulowanego:

$$\psi(t) = \Omega t + \arg m(t)$$

Faza chwilowa sygnału zmodulowanego określona względem pulsacji Ω :

$$\varphi(t) = \arg m(t)$$

Pulsacja i częstotliwość chwilowa sygnału zmodulowanego:

$$\omega(t) = \Omega t + \frac{d}{dt} \arg m(t) \quad f(t) = F + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg m(t)$$

Funkcje modulujące dla podstawowych modulacji analogowych

Rodzaje modulacji	Funkcja modulująca
Amplitudy	
AM-SC	$x(t)$
AM	$1 + kx(t)$
SSB-SC (wstęga górna)	$x(t) + j\hat{x}(t)$
SSB-SC (wstęga dolna)	$x(t) - j\hat{x}(t)$
SSB (wstęga górna)	$1 + x(t) + j\hat{x}(t)$
SSB (wstęga dolna)	$1 + x(t) - j\hat{x}(t)$
VSB	$x(t) + j[x(t) * h_Q(t)]$
kąta	
PM	$\exp[j k_p x(t)]$
FM	$\exp[j k_f \int x(t) dt]$
k, k_p, k_f – parametry modulacji $h_Q(t)$ – odpowiedź impulsowa filtru	

Modulacje jednowstęgowe SSB-SC i SSB

Single Sideband Suppressed Carrier

Funkcja modulująca:

$$m(t) = x(t) \pm j\hat{x}(t)$$

Reprezentacje analityczne sygnałów SSB-SC:

$$z_{\text{SSB-SC}}^g(t) = z_x(t)z_c(t), \quad z_{\text{SSB-SC}}^d(t) = z_x^*(t)z_c(t)$$

$$z_{\text{SSB-SC}}(t) = Y_0 \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} e^{j[\Omega t \pm \arctg[\hat{x}(t)/x(t)]]}$$

$$Y_{\text{SSB-SC}}(t) = Y_0 \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}, \quad \psi_{\text{SSB-SC}}(t) = \Omega t \pm \arctg[\hat{x}(t)/x(t)]$$

Postać rzeczywista sygnału SSB-SC:

$$y_{\text{SSB-SC}}(t) = Y_0 [x(t) \cos \Omega t \mp \hat{x}(t) \sin \Omega t] = x_I(t) \cos \Omega t \mp x_Q(t) \sin \Omega t$$

$x_I(t) = Y_0 x(t)$ – składowa synfazowa

$x_Q(t) = Y_0 \hat{x}(t)$ – składowa kwadraturowa

Widmo sygnału SSB-SC

$$Z_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) = \frac{1}{2\pi} [Z_x(\omega) * Z_c(\omega)]$$

$$Z_x(\omega) = 2X(\omega)\mathbf{1}(\omega), \quad Z_c(\omega) = 2\pi Y_0 \delta(\omega - \Omega)$$

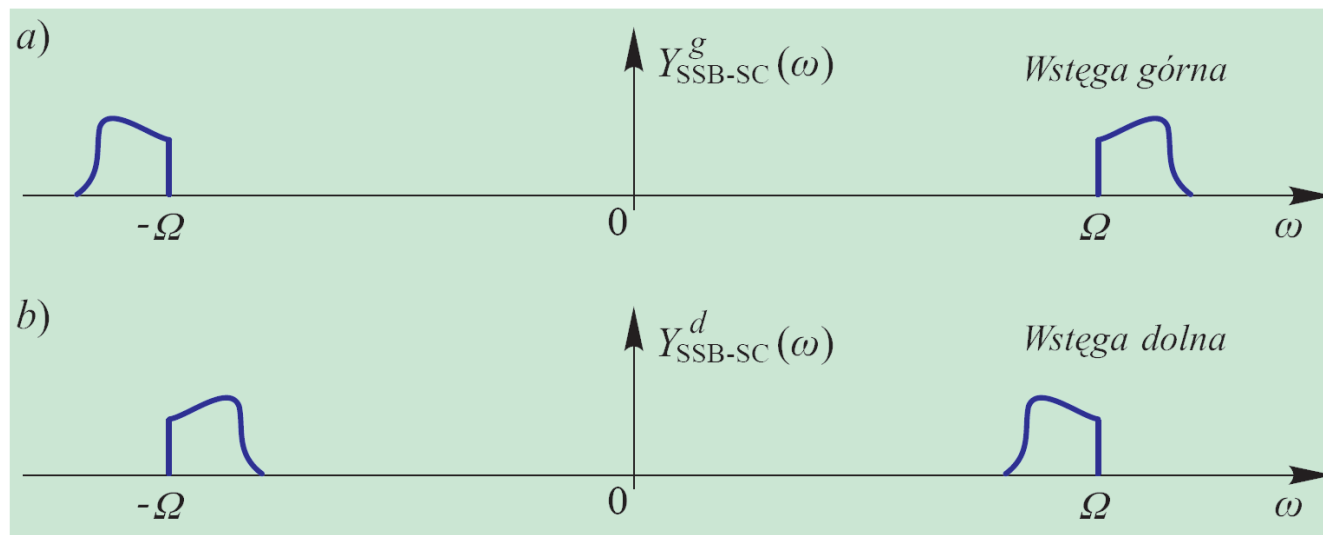
$$Z_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) = \frac{1}{2\pi} [2\pi Y_0 \delta(\omega - \Omega) * 2X(\omega)\mathbf{1}(\omega)] = 2 Y_0 X(\omega - \Omega) \mathbf{1}(\omega - \Omega)$$

$$Y_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) = \frac{1}{2} [Z_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) + Z_{\text{SSB-SC}}^{g*}(-\omega)]$$

$$Y_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) = Y_0 [X(\omega - \Omega)\mathbf{1}(\omega - \Omega) + X^*(-\omega - \Omega)\mathbf{1}(-\omega - \Omega)]$$

$$Y_{\text{SSB-SC}}^g(\omega) = Y_0 [X(\omega - \Omega)\mathbf{1}(\omega - \Omega) + X(\omega + \Omega)\mathbf{1}(-\omega - \Omega)]$$

$$Y_{\text{SSB-SC}}^d(\omega) = Y_0 [X(\omega - \Omega)\mathbf{1}(-\omega + \Omega) + X(\omega + \Omega)\mathbf{1}(\omega + \Omega)]$$



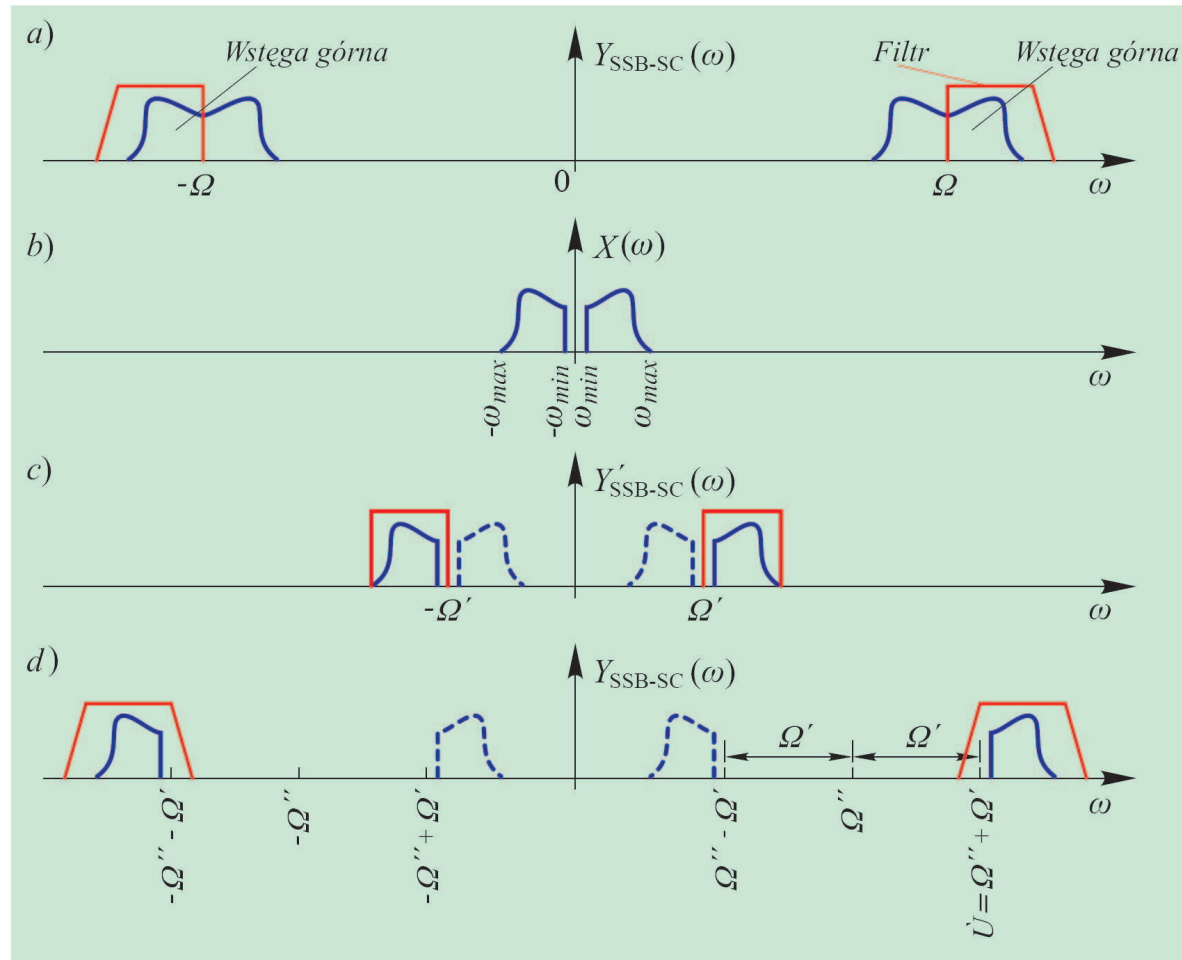
Szerokość pasma sygnału SSB-SC

$$B_{SSB-SC} = f_m$$

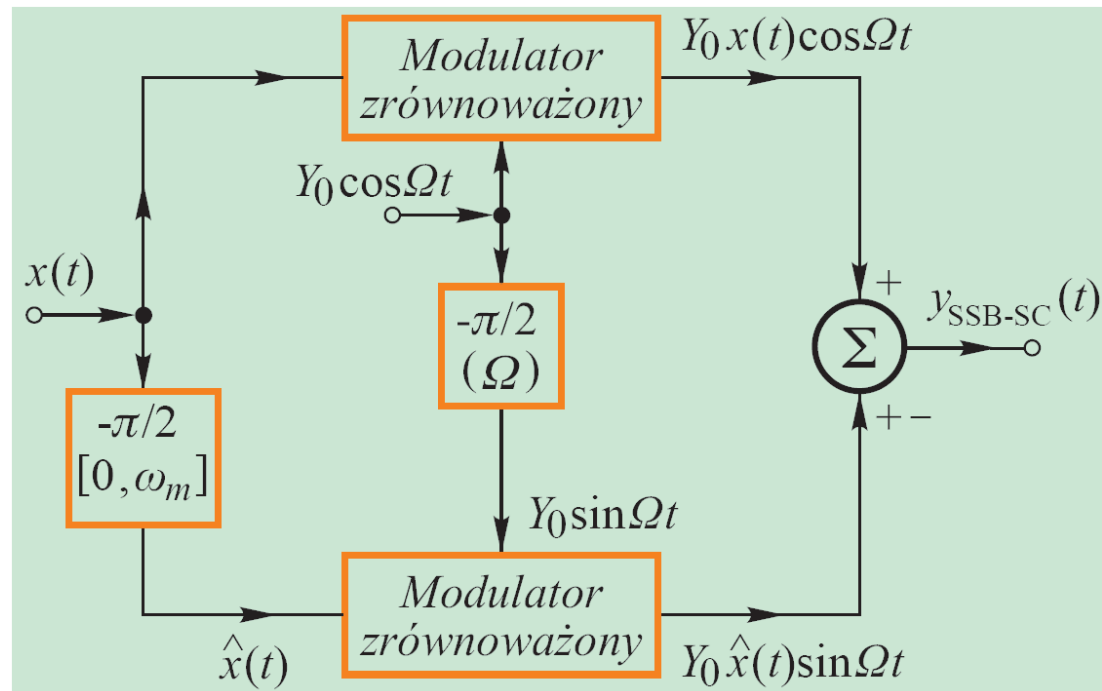
Generacja sygnału SSB-SC:

- metodą filtracji z pośrednią przemianą częstotliwości,
- za pomocą modulatora Hartleya.

Metoda filtracji z pośrednią przemianą częstotliwości



Modulator Hartleya



Demodulacja sygnału SSB-SC za pomocą detektora koherentnego

$$y_{\text{SSB-SC}}(t) \cos \Omega t = Y_0 [x(t) \cos \Omega t \mp \hat{x}(t) \sin \Omega t] \cos \Omega t$$

$$y_{\text{SSB-SC}}(t) \cos \Omega t = Y_0 [x(t) \cos^2 \Omega t \mp \hat{x}(t) \sin \Omega t \cos \Omega t]$$

$$y_{\text{SSB-SC}}(t) \cos \Omega t = \frac{1}{2} Y_0 x(t) + \frac{1}{2} Y_0 [x(t) \cos 2\Omega t \mp \hat{x}(t) \sin 2\Omega t]$$

Wpływ stałego błędu fazy $\Delta\varphi$ przy założeniu zerowego błędu częstotliwości lokalnego generatora fali nośnej:

$$y_{\text{SSB-SC}}(t) \cos(\Omega t + \Delta\varphi) = Y_0 [x(t) \cos \Omega t \cos(\Omega t + \Delta\varphi) \mp \hat{x}(t) \sin \Omega t \cos(\Omega t + \Delta\varphi)]$$

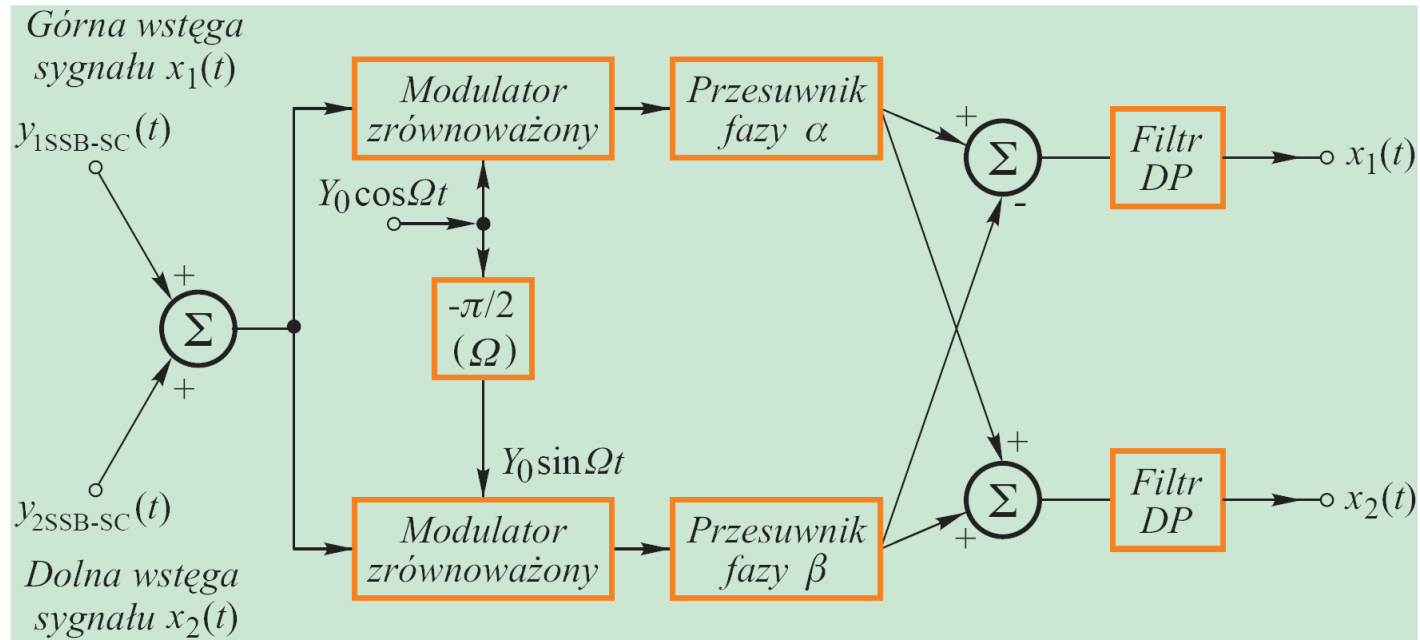
$$y_{\text{SSB-SC}}(t) \cos(\Omega t + \Delta\varphi) = \frac{Y_0}{2} [x(t) \cos \Delta\varphi \pm \hat{x}(t) \sin \Delta\varphi] + \\ + \frac{Y_0}{2} [x(t) \cos(2\Omega t + \Delta\varphi) \mp \hat{x}(t) \sin(2\Omega t + \Delta\varphi)]$$

$$y_d(t) = \frac{Y_0}{2} [x(t) \cos \Delta\varphi \pm \hat{x}(t) \sin \Delta\varphi]$$

Widmo sygnału zmodulowanego:

$$Y_d(\omega) = \frac{Y_0}{2} [X(\omega) \cos \Delta\varphi \pm (-j \operatorname{sgn} \omega) X(\omega) \cos \Delta\varphi] = \\ = \frac{Y_0}{2} X(\omega) e^{\mp j \Delta\varphi (\operatorname{sgn} \omega)}$$

Dwukanałowy kompensacyjny demodulator sygnału SSB-SC



Modulacja SSB

$$m(t) = 1 + x(t) \pm j\hat{x}(t)$$

$$y_{SSB}(t) = Y_0[1 + x(t) \cos \Omega t \mp \hat{x}(t) \sin \Omega t]$$

$$y_{SSB}(t) = Y_0 \sqrt{[1 + x^2(t)] + \hat{x}^2(t)} \cos \left(\Omega t \pm \operatorname{arctg} \frac{\hat{x}(t)}{1 + x(t)} \right)$$

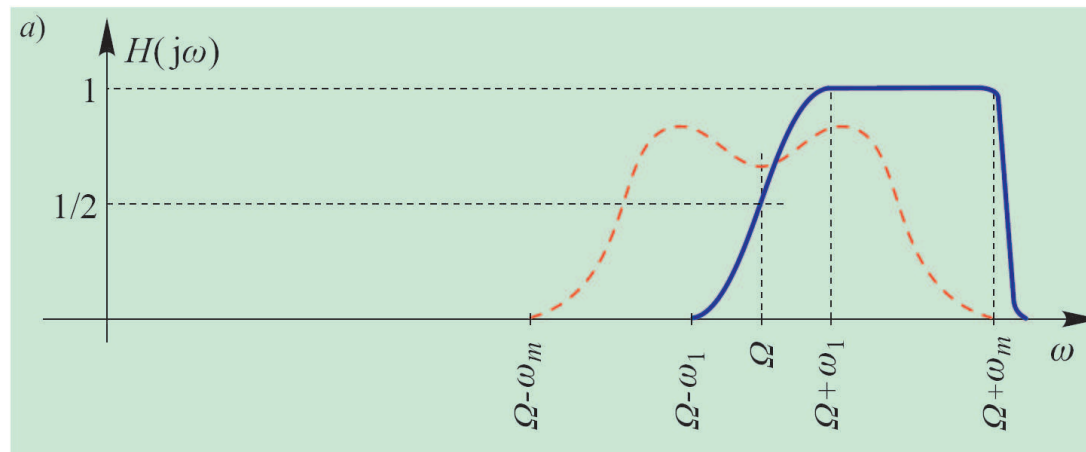
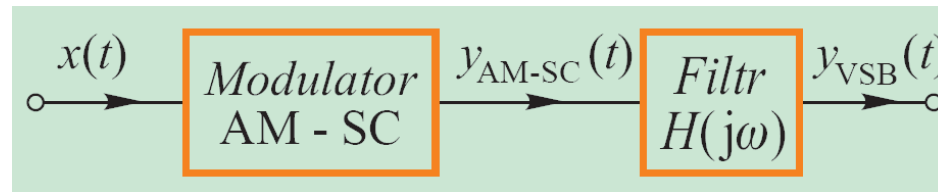
$$Y_{SSB}(t) = Y_0 \sqrt{[1 + x^2(t)] + \hat{x}^2(t)}$$

$$\psi_{SSB}(t) = \Omega t \pm \operatorname{arctg} \frac{\hat{x}(t)}{1 + x(t)}$$

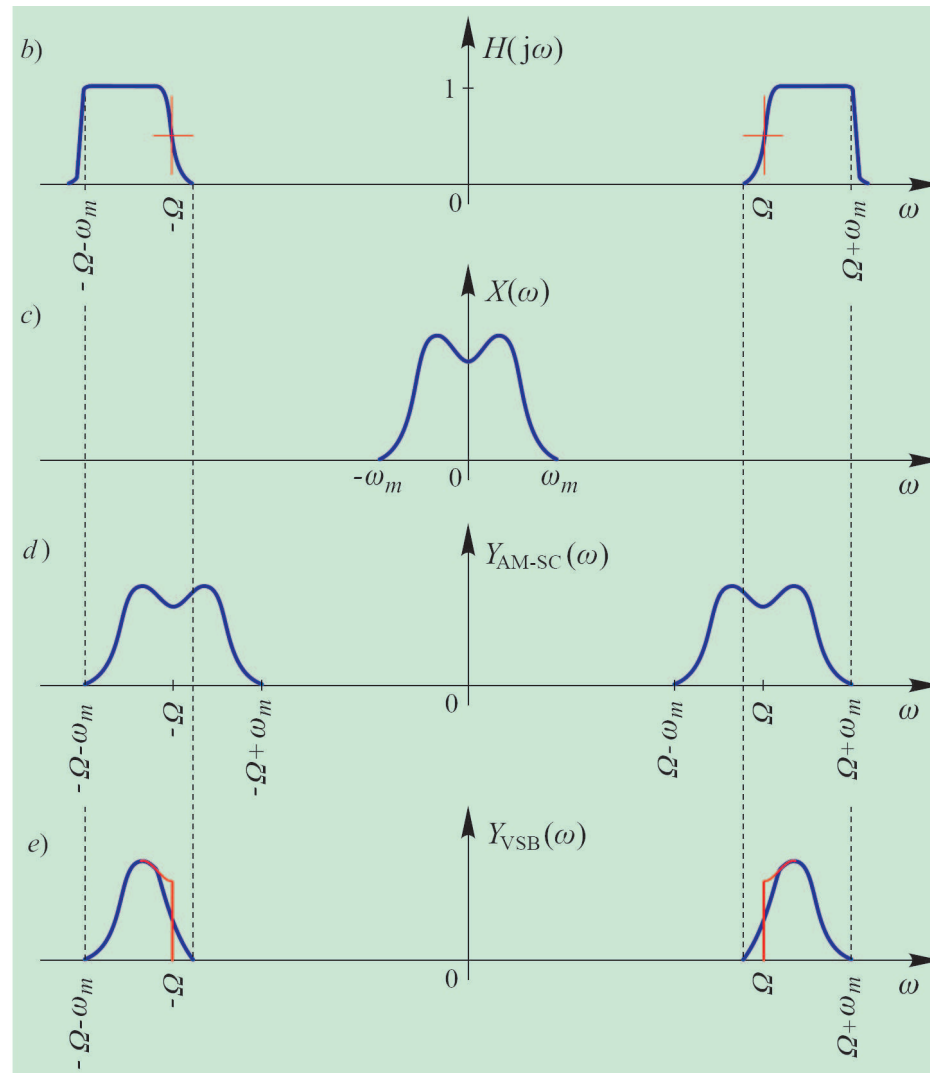
Modulacja VSB Vestigial Sideband

z częściowo stłumioną wstęgą boczną, (ze szczątkową wstęgą boczną)

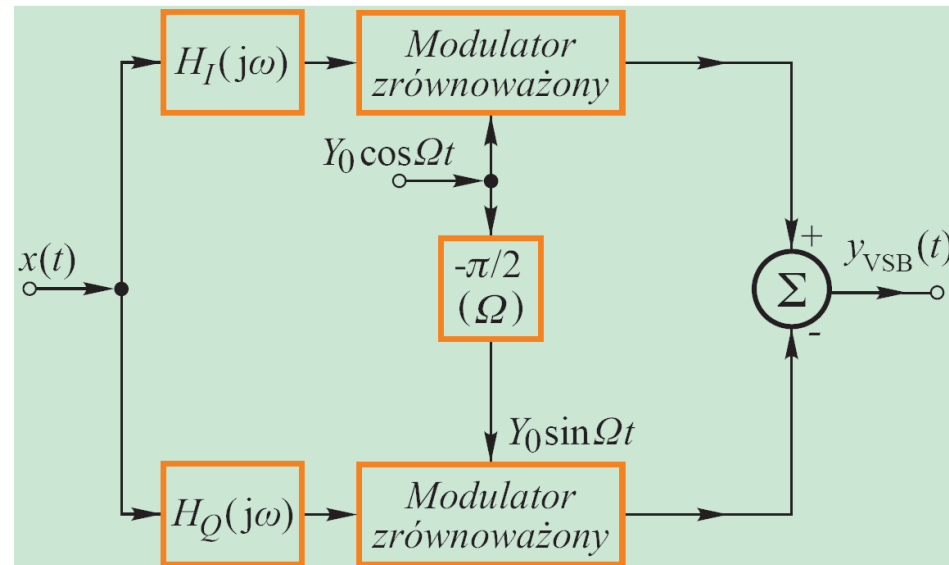
$$y_{\text{VSB}}(t) = y_{\text{AM-SC}}(t) * h(t)$$



Koncepcja generacji sygnału VSB



Modulator sygnału VSB z modyfikacją składowej kwadraturowej

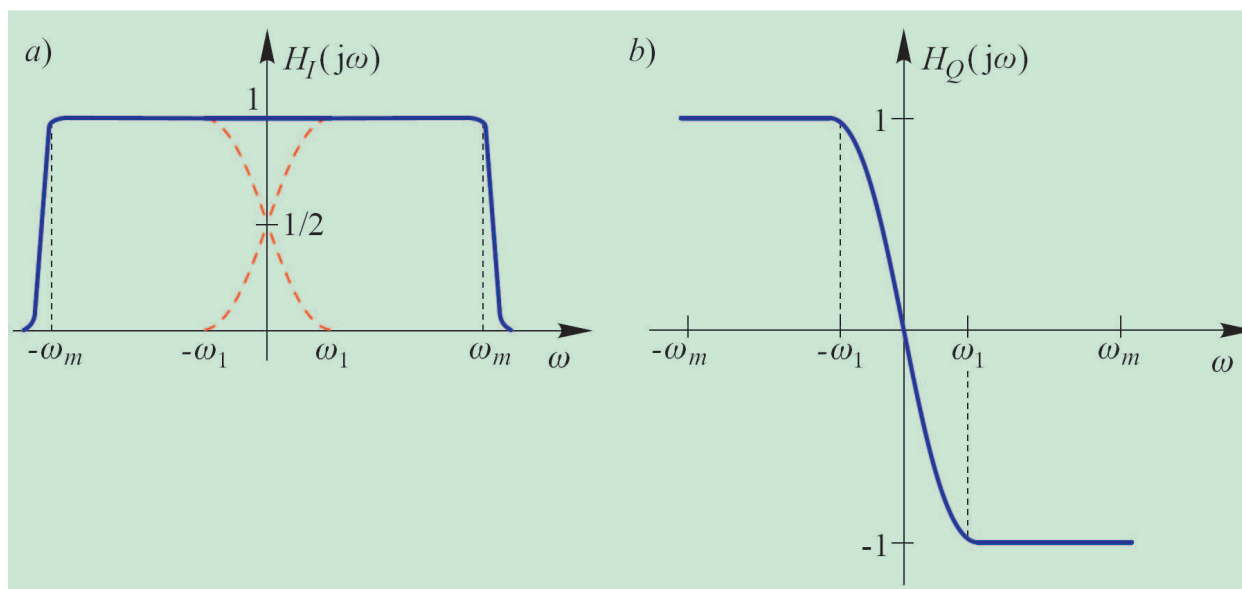


$$h_I(t) = h(t) \cos \Omega t$$

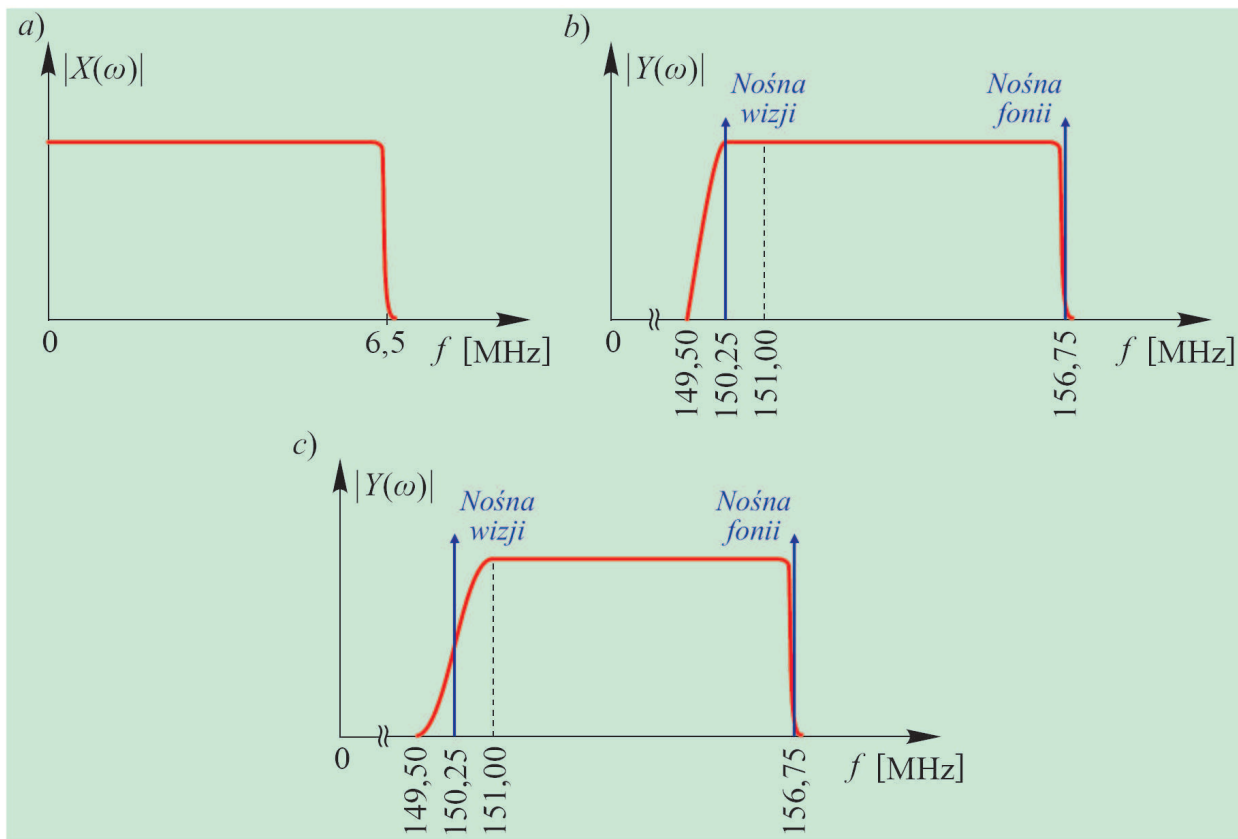
$$h_Q(t) = -h(t) \sin \Omega t$$

$$H_I(j\omega) = \frac{1}{2}[H[j(\omega - \Omega)] + H[j(\omega + \Omega)]]$$

$$H_I(j\omega) = -\frac{1}{2j}[H[j(\omega - \Omega)] - H[j(\omega + \Omega)]]$$



Sygnał telewizyjny



Modulacje analogowe kąta – PM i FM

$$y(t) = Y_0 \cos \psi(t)$$

W przypadku modulacji fazy PM:

$$m(t) = e^{jk_p x(t)}, \quad k_p > 0$$

Sygnał analityczny sygnału PM:

$$z_{\text{PM}}(t) = Y_0 e^{jk_p x(t)} e^{j\Omega t} = Y_0 e^{j[\Omega t + k_p x(t)]}$$

Rzeczywista postać sygnału PM:

$$y_{\text{PM}}(t) = Y_0 \cos[\Omega t + k_p x(t)]$$

Amplituda chwilowa sygnału PM:

$$Y_{\text{PM}}(t) = Y_0 = \text{const}$$

Kąt chwilowy sygnału PM:

$$\psi_{\text{PM}}(t) = \Omega t + k_p x(t)$$

W przypadku modulacji częstotliwości FM:

$$m(t) = e^{jk_f \int x(t)dt}, \quad k_f > 0$$

$$z_{\text{FM}}(t) = Y_0 e^{jk_f \int x(t)dt} e^{j\Omega t} = Y_0 e^{j[\Omega t + k_f \int x(t)dt]}$$

$$y_{\text{FM}}(t) = Y_0 \cos \left[\Omega t + k_f \int x(t)dt \right]$$

Amplituda chwilowa i kąt chwilowy sygnału FM:

$$Y_{\text{FM}}(t) = Y_0 = \text{const}$$

$$\psi_{\text{FM}}(t) = \Omega t + k_f \int x(t) dt$$

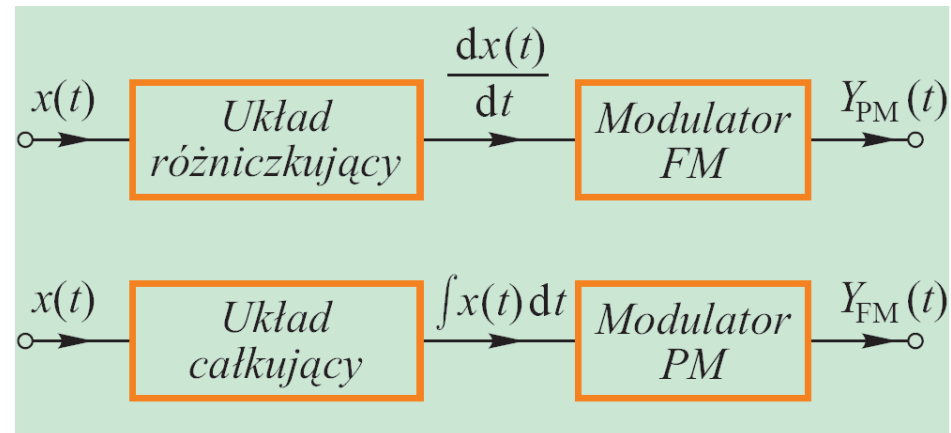
Częstotliwość chwilowa sygnału PM:

$$f_{\text{PM}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_{\text{PM}}(t)}{dt} = F + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dx(t)}{dt}$$

Częstotliwość chwilowa sygnału FM:

$$f_{\text{FM}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_{\text{FM}}(t)}{dt} = F + \frac{k_f}{2\pi} x(t)$$

Wymienne realizacje modulatorów



Dewiacja fazy

$$\Delta\varphi = |\varphi(t)|_{\max} = |\psi(t) - \Omega t|_{\max}$$

Dewiacja fazy jest nazywana również *wskaznikiem* lub *indeksem modulacji* i oznaczana przez β .

Dewiacja częstotliwości

$$\Delta f = |f(t) - F|_{\max}$$

Wskaźniki modulacji sygnałów PM i FM:

$$\Delta\varphi_{\text{PM}} \triangleq \beta_{\text{PM}} = k_p |x(t)|_{\max}$$

$$\Delta\varphi_{\text{FM}} \triangleq \beta_{\text{FM}} = k_f \left| \int x(t) dt \right|_{\max}$$

Dewiacje częstotliwości sygnałów PM i FM:

$$\Delta f_{\text{PM}} = \frac{k_p}{2\pi} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\max}$$

$$\Delta f_{\text{FM}} = \frac{k_f}{2\pi} |x(t)|_{\max}$$