

Wąskopasmowa modulacja fazy (przypadek $k_p |x(t)|_{\max} \ll 1$)

Rozwinięcie funkcji modulującej $m(t)$ w szereg potęgowy:

$$m(t) = e^{jk_p x(t)} = 1 + jk_p x(t) + \dots$$

Sygnały zmodulowane:

$$z_{\text{PM}}(t) \approx Y_0 [1 + jk_p x(t)] e^{j\Omega t}$$

$$y_{\text{PM}}(t) \approx Y_0 \cos \Omega t - Y_0 k_p x(t) \sin \Omega t$$

Szerokość pasma sygnału:

$$B_{\text{PM}} \approx 2f_m$$

Szerokopasmowa modulacja fazy

Modulacja tonem harmonicznym $x(t) = X_0 \sin \omega_0 t$ o pulsacji $\omega_0 \ll \Omega$.

Sygnał zmodulowany:

$$y_{\text{PM}}(t) = Y_0 \cos(\Omega t + k_p X_0 \sin \omega_0 t)$$

Kąt chwilowy zmodulowanego sygnału:

$$\psi_{\text{PM}}(t) = \Omega t + k_p X_0 \sin \omega_0 t$$

Częstotliwość chwilowa sygnału:

$$f_{\text{PM}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_{\text{PM}}(t)}{dt} = F + \frac{k_p X_0 \omega_0}{2\pi} \cos \omega_0 t = F + k_p X_0 f_0 \cos \omega_0 t$$

Szerokopasmowa modulacja fazy

Wskaźnik modulacji:

$$\beta_{\text{PM}} = k_p X_0$$

Dewiacja częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{PM}} = k_p X_0 f_0 = \beta_{\text{PM}} f_0$$

Widmo sygnału PM zmodulowanego jednym tonem

Sygnał zmodulowany w postaci analitycznej ($\beta \equiv \beta_{\text{PM}}$):

$$z_{\text{PM}}(t) = Y_0 e^{j[\Omega t + k_p X_0 \sin \omega_0 t]} = Y_0 e^{j[\Omega t + \beta \sin \omega_0 t]} = Y_0 e^{j\beta \sin \omega_0 t} e^{j\Omega t}$$

Funkcja $e^{j\beta \sin \omega_0 t}$ jest okresowa - rozwinięcie w szereg Fouriera.

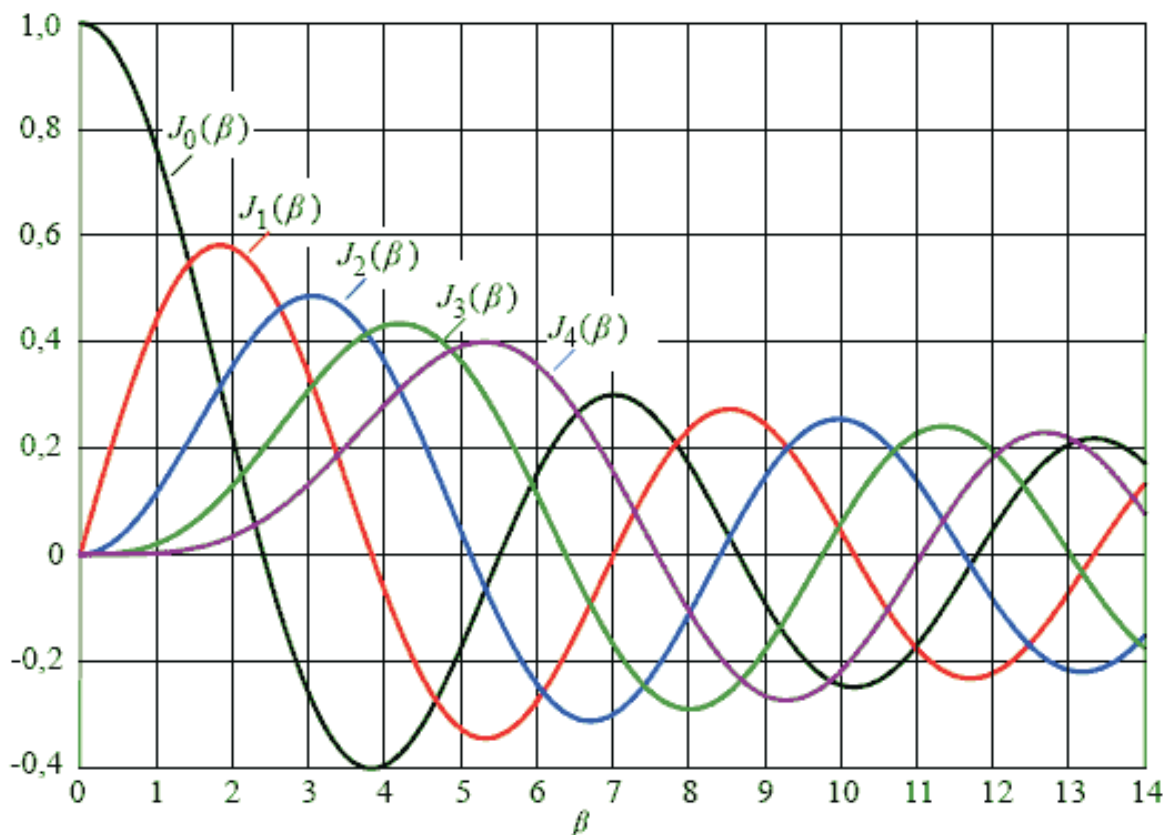
Współczynniki rozwinięcia są wartościami funkcji Bessela $J_k(x)$

1-go rodzaju, k-tego rzędu w punkcie $x = \beta$:

$$e^{j\beta \sin \omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{jk\omega_0 t}$$

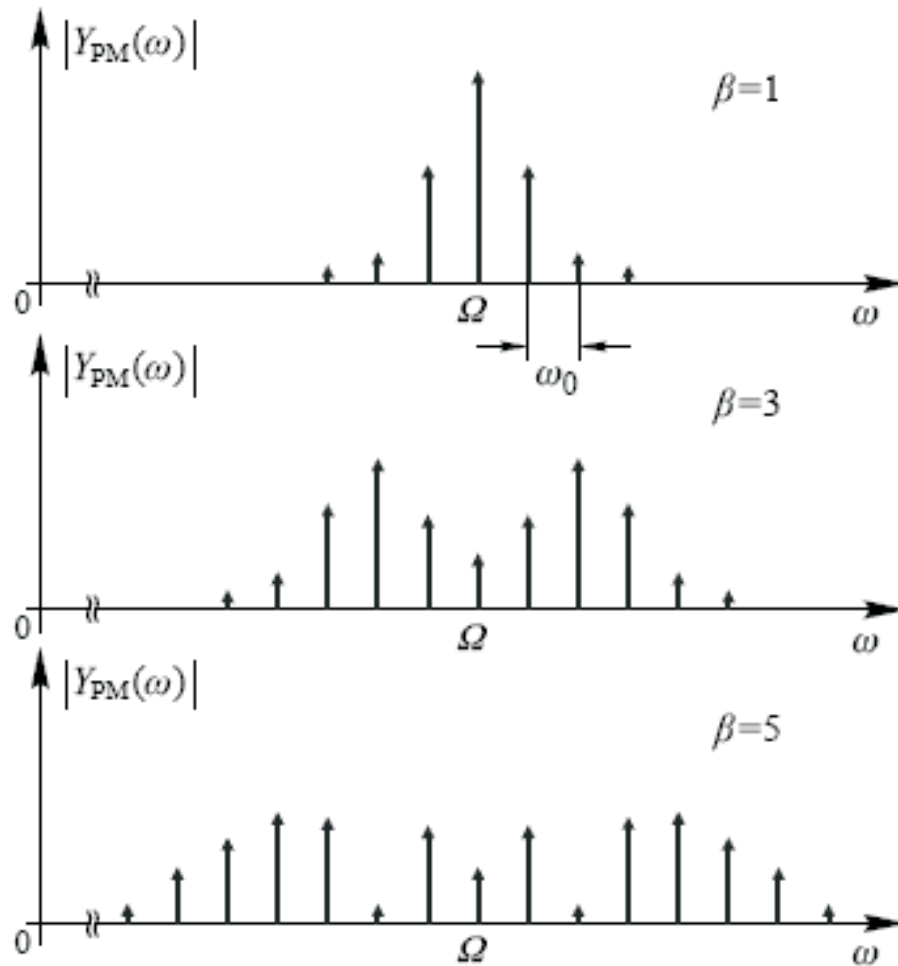
Funkcja Bessela 1-go rodzaju jest opisana wzorem:

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+k}}{n!(n+k)!}$$



Widmo sygnału PM zmodulowanego jednym tonem

Widmo ma charakter prążkowy:



Właściwości widma sygnału PM

- Widmo jest teoretycznie nieograniczone
- W praktyce wartości $J_k(\beta)$ szybko maleją wraz ze wzrostem k ,
Np. 99% mocy sygnału ($\beta = 3$) skupionych jest w prążkach $|k| \leq 4$
99,9% mocy sygnału ($\beta = 3$) skupionych jest w prążkach $|k| \leq 7$
- Amplituda prążka $k = 0$ (fala nośna) zależy od β - możliwość optymalizacji efektywności energetycznej !

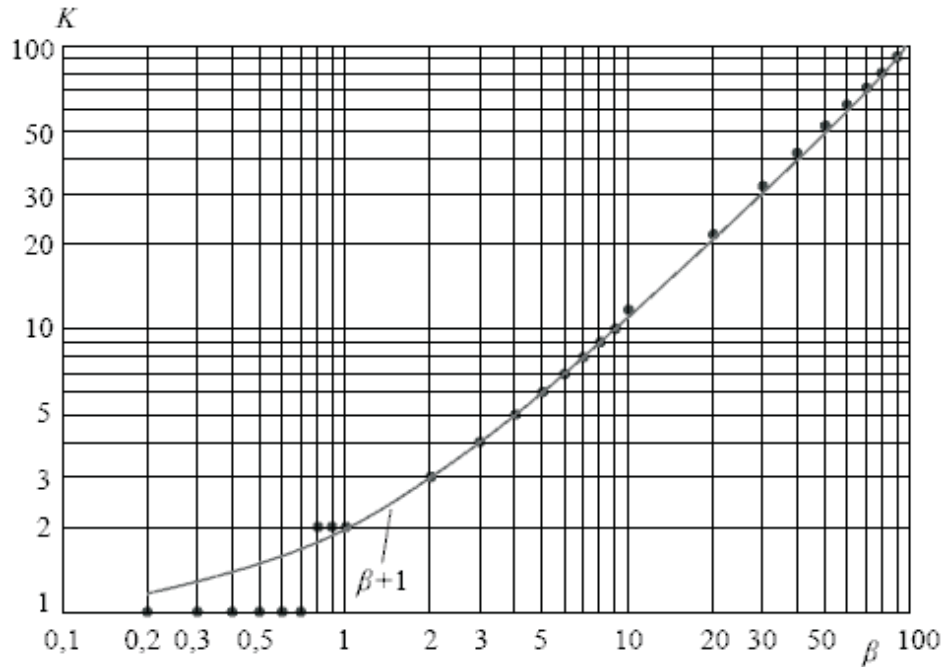
Ponieważ dla każdego β zachodzi:

$$J_0^2(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1$$

Więc całkowita moc sygnału PM wynosi $P_y = \frac{1}{2} Y_0^2$.

Szerokość pasma sygnału PM

Dla sygnału PM zmodulowanego jednym tonem, obliczono numerycznie najmniejszą liczbę K prążków, zawierających 99% mocy sygnału, w zależności od β :

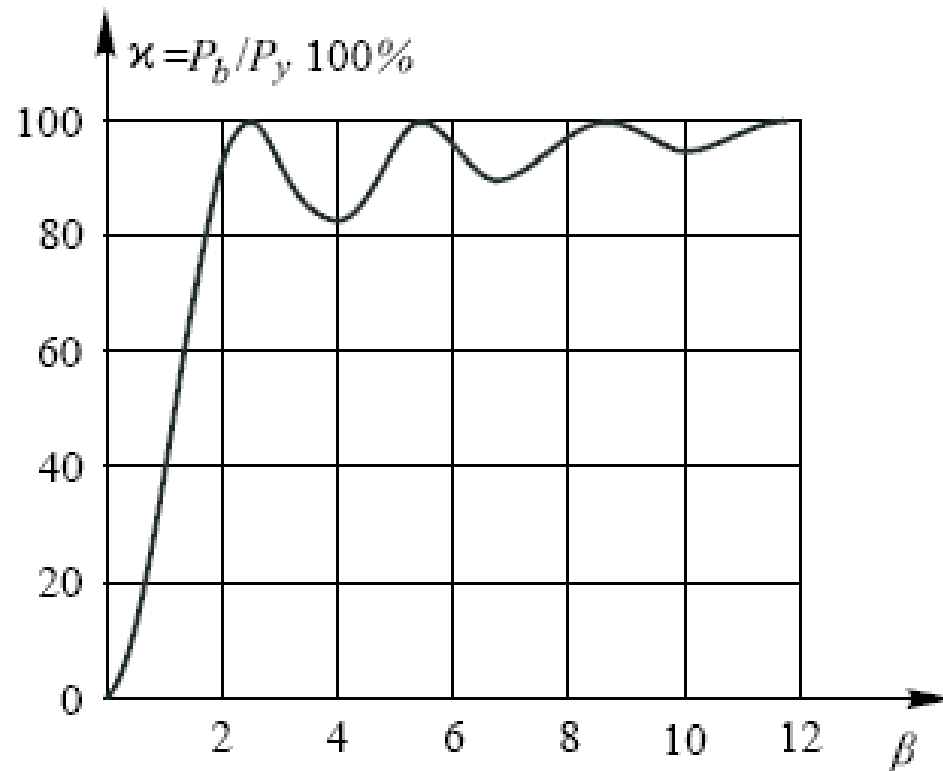


$$B_{PM} \approx 2(\beta_{PM} + 1)f_0;$$

$$\text{Dla } \beta_{PM} > 10 : B_{PM} \approx 2\beta_{PM}f_0$$

Sprawność energetyczna systemu PM

Dla pewnych wartości β , zachodzi $J_0(\beta) = 0$, np. dla $\beta = 2,405; 5,520; 8,654; 11,792$, a zatem amplituda fali nośnej zeruje się, a sprawność energetyczna osiąga 100%.



Przypadek modulacji wieloma tonami

Założmy sygnał modulujący: $x(t) = X_1 \sin \omega_1 t + X_2 \sin \omega_2 t$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Sygnał zmodulowany przybiera postać:

$$y_{\text{PM}}(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t)$$

Po rozwinięciu w szereg Fouriera, otrzymujemy:

$$y_{\text{PM}}(t) = Y_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_1) J_l(\beta_2) \cos(\Omega + k\omega_1 + l\omega_2)t$$

- Nowy składnik widma: prążki boczne o pulsacjach skrośnych:
 $\pm k\omega_1 \pm l\omega_2$
- Modulacja *typu nieliniowego*

Efektywna szerokość pasma dla dowolnego sygnału modulującego

Dla $\beta > 0,7$, szerokość pasma sygnału można oszacować wzorem Carsona:

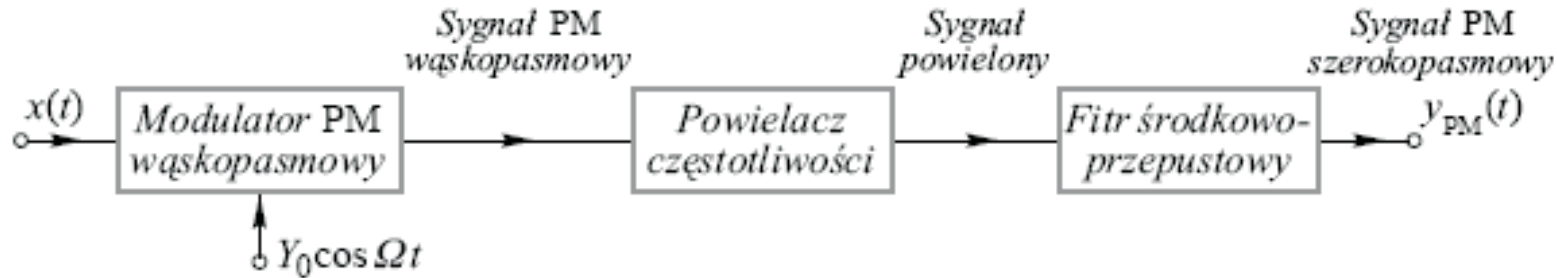
$$B_{\text{PM}} \approx 2(\beta_{\text{PM}} + 1)f_m$$

Gdzie f_m - największa częstotliwość widma sygnału modulującego.

Dla dostatecznie dużych wartości wskaźnika modulacji ($\beta_{\text{PM}} > 10$):

$$B_{\text{PM}} \approx 2\beta_{\text{PM}}f_m$$

Generacja sygnału PM - metoda Armstronga



- Modulator wąskopasmowy (np. Hartleya) :

$$y_{PM}(t) \approx Y_0 \cos \Omega t - Y_0 k_p x(t) \sin \Omega t$$

- Powielacz: element nieliniowy o charakterystyce potęgowej:

$$y(t) = a[x(t)]^n$$

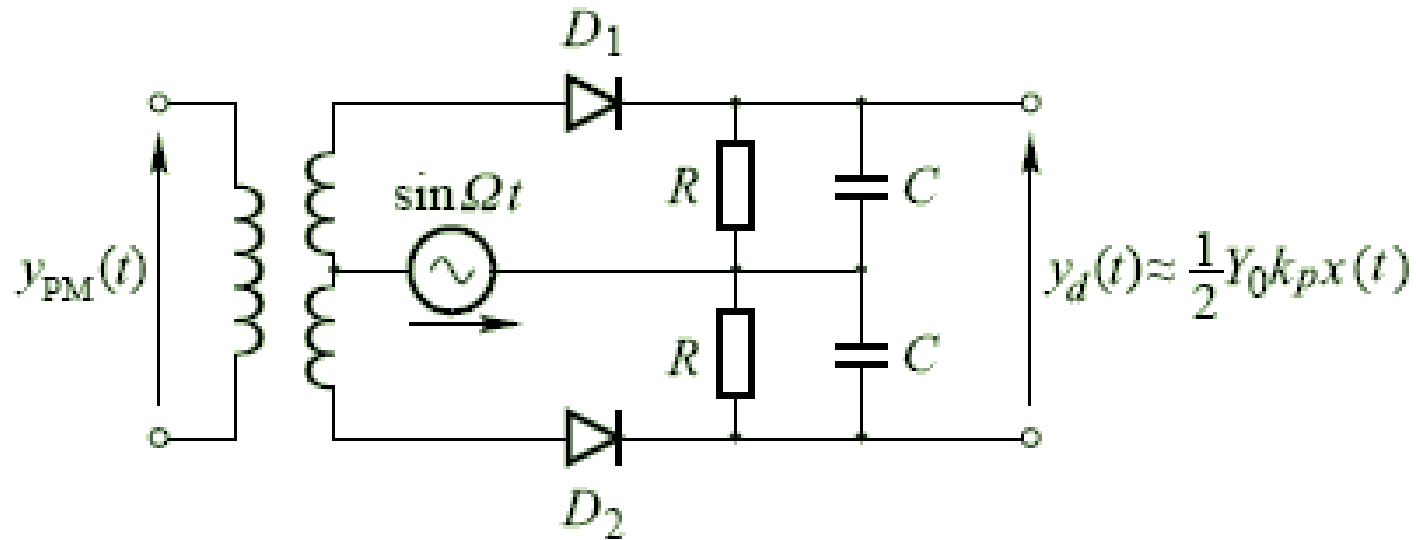
- Dla $n=2$: $y(t) = \frac{a}{2} Y_0^2 (1 + \cos(2\Omega t + 2k_p x(t)))$

Generacja sygnału PM z wykorzystaniem VCO



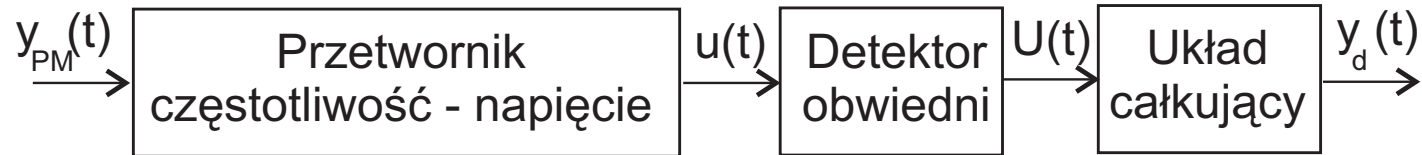
- Układ różniczkujący: $u(t) = U_0 - \alpha \frac{dx(t)}{dt}$
- VCO = *Voltage Controlled Oscillator*, generator strojony napięciem, o charakterystyce $F(u)$:
$$y(t) = Y_0 \cos[2\pi F(u(t))] = Y_0 \cos[2\pi F(U_0 - \alpha \frac{dx(t)}{dt})]$$
- Wykorzystuje diodę pojemnościową (warikap, waraktor)

Demodulacja sygnału wąskopasmowego PM



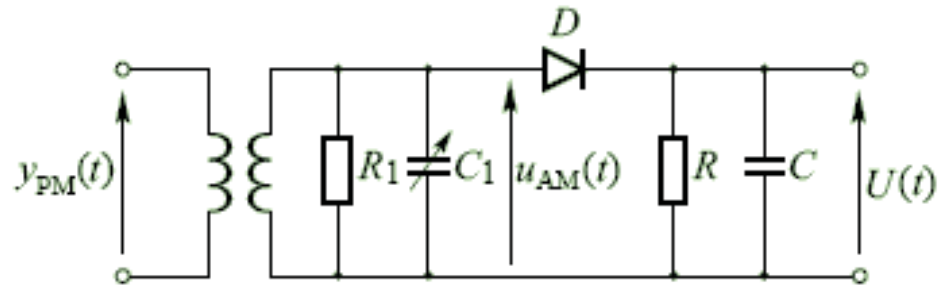
- Demodulator koherentny, faza oscylatora lokalnego przesunięta o $\frac{\pi}{2}$
- Sygnał na wyjściu filtru: $y_d(t) = \frac{Y_0}{2} \sin[k_p x(t)]$
- Jeśli $k_p |x(t)|_{max} \ll 1$, to $y_d(t) \approx \frac{Y_0}{2} k_p x(t)$

Demodulacja sygnału szerokopasmowego PM

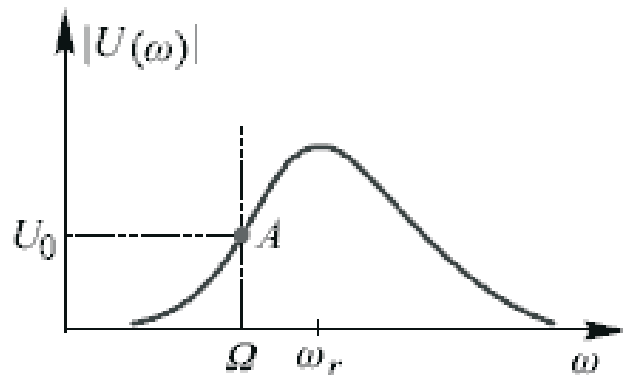


- Obwiednia $U(t)$ sygnału $u(t)$ niesie informację o sygnale modulującym, jest proporcjonalna do pulsacji chwilowej sygnału $y_{PM}(t)$: $U(t) \approx \alpha[\Omega + k_p \frac{dx(t)}{dt}]$
- Po scałkowaniu sygnału $U(t)$ otrzymujemy sygnał modulujący $x(t)$
- Tzw. *dyskryminator częstotliwości*
- Najprostsze wykonanie: obwód LC

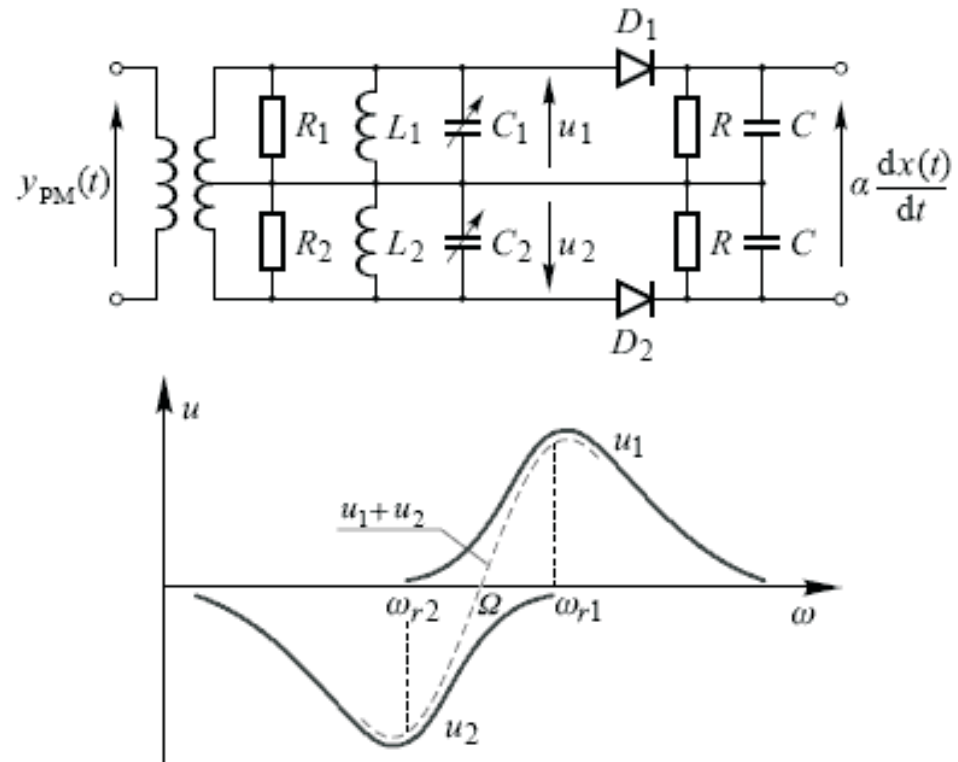
Jednoobwodowy dyskryminator częstotliwości



- Pulsacja rezonansowa $\omega_r > \omega_0$
- Punkt pracy na liniowym odcinku charakterystyki



Dwuobwodowy dyskryminator częstotliwości



- Większa czułość (nachylenie charakterystyki)
- Większy zakres liniowości

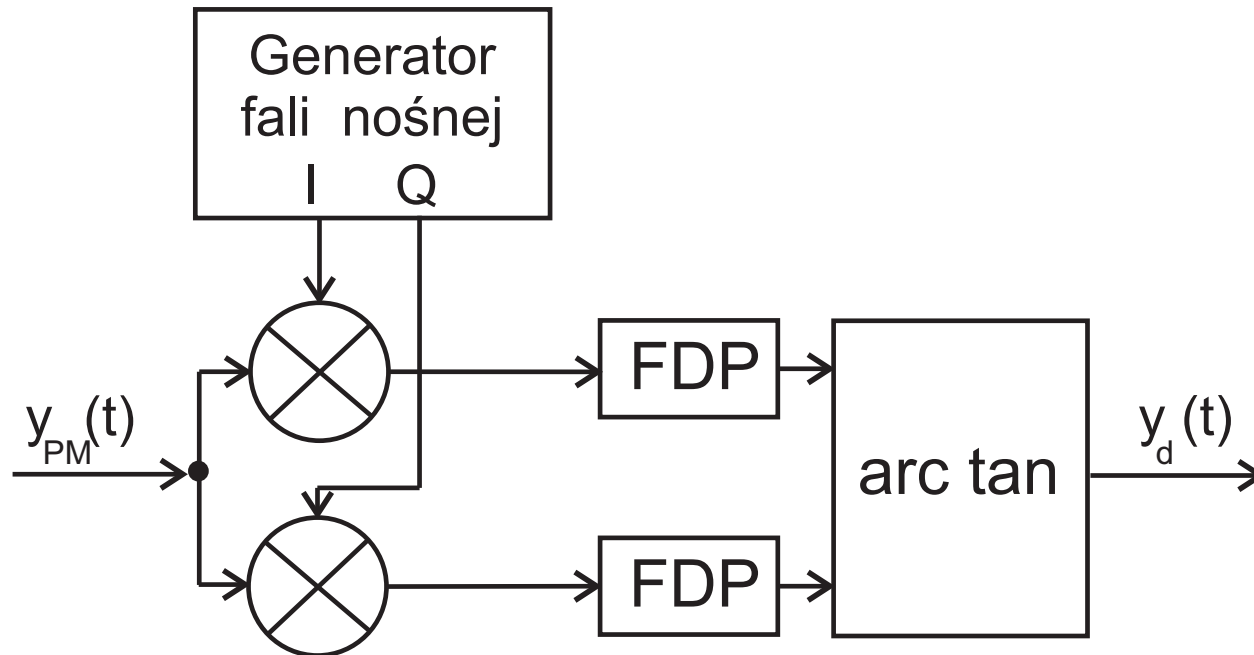
Współczesne metody detekcji PM, FM

- Obwody LC - konieczność strojenia
- Problemy z automatyzacją procesu produkcji
- Kłopotliwe i kosztowne wykonanie cewek indukcyjnych
- Problemy z miniaturyzacją (układy scalone!)



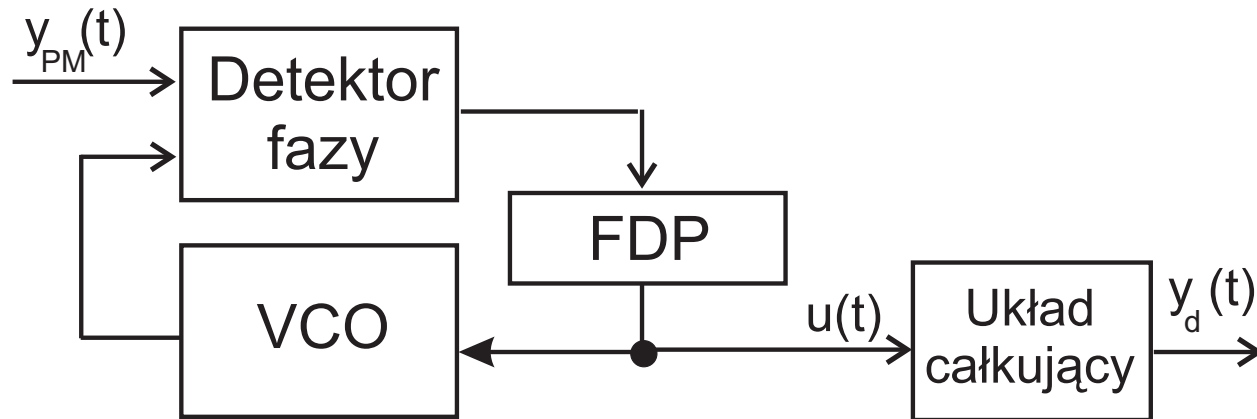
- Demodulator kwadraturowy
- Demodulator z pętlą PLL

Demodulator kwadraturowy



- Dwie gałęzie: synfazowa (I), kwadraturowa (Q)
- Fala nośna "w fazie" ($c_I(t) = C_0 \cos \Omega t$) i "w kwadraturze" ($c_Q(t) = C_0 \sin \Omega t$)

Demodulator wykorzystujący PLL



- Pętla PLL (*Phase-Locked Loop*) śledzi częstotliwość chwilową sygnału
- Sygnał $u(t)$ jest proporcjonalny do częstotliwości chwilowej sygnału (demodulacja FM)
- Blok całkujący umożliwia demodulację PM

Porównanie modulacji PM i FM

Dla modulacji wąskopasmowej:

$$B_{\text{FM}} \approx 2f_m \approx B_{\text{PM}}$$

Sygnał wyjściowy dla szerokopasmowej modulacji FM jednym tonem:

$$y_{\text{FM}}(t) = Y_0 \cos\left(\Omega t + k_f \frac{X_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right)$$

Faza chwilowa:

$$\psi_{\text{FM}}(t) = \Omega t + k_f \frac{X_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Porównanie modulacji PM i FM

Częstotliwość chwilowa:

$$f_{\text{FM}}(t) = F + \frac{k_f X_0}{2\pi} \cos \omega_0 t$$

Wskaźnik modulacji:

$$\beta_{\text{FM}} = k_f \frac{X_0}{\omega_0}$$

Dewiacja częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{FM}} = \frac{k_f X_0}{2\pi}$$

Szerokość pasma sygnału:

$$B_{\text{FM}} \approx 2(\Delta f_{\text{FM}} + f_0)$$

Porównanie modulacji amplitudowych i fazowych

Modulacje amplitudowe:

- Wąskie pasmo, zależne tylko od częstotliwości sygnału modulującego
- Mała złożoność nadajnika i odbiornika
- Duża podatność na zakłócenia (szумы, zaniki, interferencje)
- Zastosowania: telewizja, radiodyfuzja dalekiego zasięgu (fale długie, średnie, krótkie), CB-radio
- Modulacja SSB-SC: łączność dalekiego zasięgu, niezależna od infrastruktury: wojskowa, dyplomatyczna, morska

Porównanie modulacji amplitudowych i fazowych

Modulacja fazy (PM):

- Praktyczne zastosowanie tylko w modulacjach cyfrowych (BPSK, QPSK, QAM) oraz jako etap pośredni w modulacji FM

Modulacja częstotliwości (FM):

- Szerokość pasma regulowana dewiacją częstotliwości
- Duża odporność na zakłócenia
- Stała obwiednia sygnału wyjściowego
- Zastosowania: radiofonia UKF, telewizja satelitarna, radiotelefony UKF, radiolinie, telefonia komórkowa: NMT, GSM(GMSK)