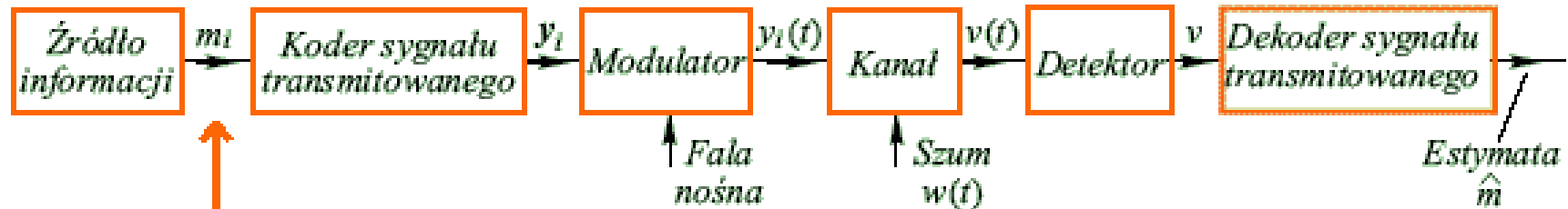


## Modulacje cyfrowe - zastosowania

- Transmisja danych binarnych w kanale o wąskim paśmie
- Łączność modemowa, telefaksowa
- Łączność radiowa (telemetria, zdalne sterowanie)
- Systemy bezprzewodowe (ang. *Wireless*)
- Telefonia cyfrowa (GSM, UMTS, TETRA, ...)
- Łączność satelitarna

## Cyfrowy system modulacji



**Źródło informacji** okresowo wysyła symbole  $m_i$ , z okresem  $T$ .

Alfabet symboli:

$$m_i \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$$

Zazwyczaj  $M = 2^k$ , gdzie  $k$ -liczba bitów informacji przypadająca na jeden symbol modulacji.

Dla  $M=2$  - modulacja binarna (2-wartościowa).

$T$  - przedział symbolowy

$$T_b = \frac{T}{K} = \frac{T}{\log_2(M)} - \text{przedział bitowy}$$

**Szybkość modulacji:**

$$R_M = \frac{1}{T} \text{ [symbol/s, Baud]}$$

Przepustowość łącza (**szybkość przesyłania danych**):

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ [bit/s]}$$

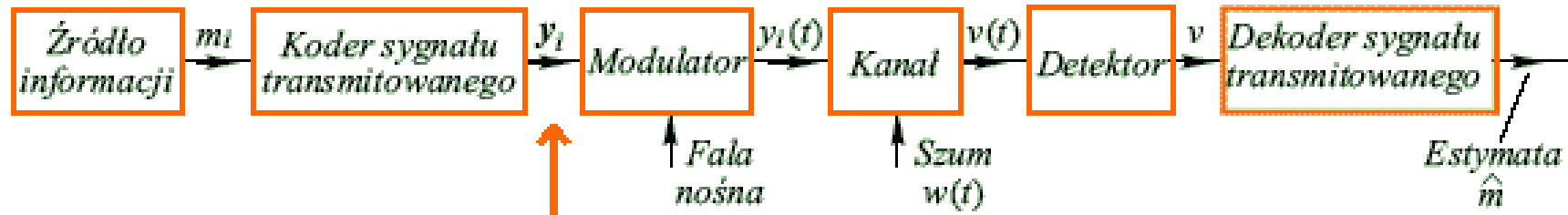
**Przykład:** modulacja telefoniczna V.29:

$$R_b = 9600 \text{ bit/s}$$

$$R_M = 2400 \text{ Baud}$$

- modulacja  $M = 16$ -wartościowa,
- $K=4$  bity/symbol.

## Kluczowanie fali nośnej



### Koder:

$x_i \mapsto \mathbf{y}_i = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iN}]$ , gdzie  $\mathbf{y}_i$  - wektor parametrów sterujących modulatorem.

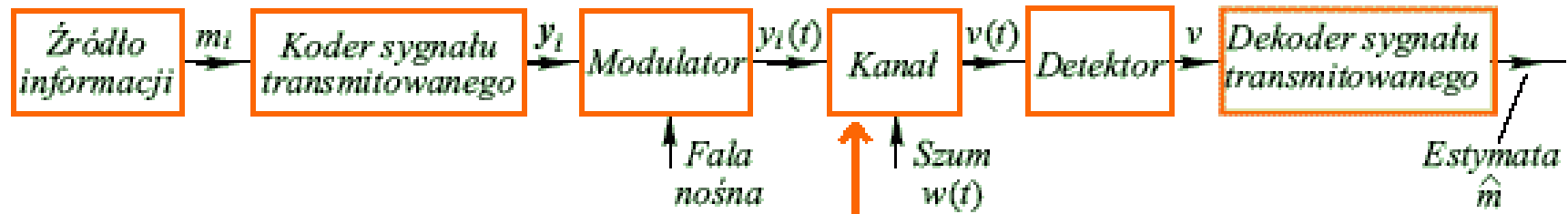
**Modulator:** kluczowanie harmonicznej fali nośnej:

**ASK** - kluczowanie amplitudy (*Amplitude Shift Keying*),

**FSK** - *kluczowanie częstotliwości* (*Frequency Shift Keying*),

**PSK** - kluczowanie fazy (*Phase Shift Keying*).

## Zniekształcenia



Sygnał zmodulowany jest przesyłany przez **kanał transmisyjny** do odbiornika.

Podczas transmisji sygnał doznaje zniekształceń:

- addytywny szum kanału,
- obcięcie pasma sygnału, dyspersja,
- wielodrogowość propagacji,
- wahania amplitudy i zaniki sygnału,
- interferencje międzysymbolowe,
- zjawiska nieliniowe.

## Szum kanału

Zazwyczaj modelowany addytywnym szumem białym gaussowskim (tzw. kanał **AWGN** - *Additive White Gaussian Noise*):

$$v(t) = y(t) + w(t),$$

gdzie  $w(t)$  - próbki zmiennej losowej o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

W rzeczywistości rozkład zakłóceń może znacząco odbiegać od rozkładu Gaussa, np. w kanałach radiowych - szum impulsowy.

Jakość odebranego sygnału określa stosunek mocy sygnału do mocy szumu (SNR - *Signal to Noise Ratio*):

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{E[y(t)^2]}{E[w(t)^2]} \text{ [dB]}$$

## Dyspersja

- nieograniczone pasmo sygnału zmodulowanego
- ograniczona szerokość kanału transmisyjnego, np. 3,3 kHz w telefonii analogowej, 25kHz w radiotelefonie UKF, 270 kHz w systemie GSM
- nieidealna charakterystyka filtrów nadajnika i odbiornika



- błędy obcięcia pasma sygnału, silne tłumienie wysokich częstotliwości
- interferencje międzysymbolowe (**ISI** - *Intersymbol Interference*)

## Powstawanie błędów

- na wejściu odbiornika - sygnał silnie zniekształcony,
- zadanie odbiornika: podjęcie decyzji (estymacja) w każdym przedziale  $T$ , który z symboli  $m_i$  został przesłany,
- decyzja podejmowana na podstawie reguły decyzyjnej,
- estymacja powinna być optymalna w sensie ustalonego kryterium tak, aby minimalizować stopę błędów (ang. *Bit Error Rate*):

$$\text{BER} = \frac{\text{Liczba błędnie odebranych bitów}}{\text{Liczba przesłanych bitów}}$$



## Właściwości sygnałów zmodulowanych cyfrowo

- transmisja koherentna lub niekoherentna,
- stała amplituda chwilowa sygnałów PSK, FSK (pożądana z punktu widzenia sprawności nadajnika),
- wrażliwość sygnałów ASK na zniekształcenia nieliniowe
- różne odmiany modulacji: **OOK** (*ON OFF Keying*), **CPFSK** (*Continuous-Phase Frequency-Shift Keying*), **MSK** (*Minimum Shift Keying*), **DPSK** (*Differential Phase-Shift Keying*), kwadraturowa modulacja amplitudy (**QAM** – *Quadrature Amplitude Modulation*)

## Geometryczna reprezentacja sygnałów zmodulowanych cyfrowo

Sygnały  $y_1(t), \dots, y_M(t)$ , transmitowane w kolejnych przedziałach symbolowych  $T$ , są reprezentowane wektorami w skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej.

Sygnały  $y_i(t)$  przedstawia się jako kombinacje liniowe standardowych, rzeczywistych sygnałów  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ :

$$y_1(t) = y_{11}\varphi_1(t) + y_{12}\varphi_2(t) + \dots + y_{1N}\varphi_N(t)$$

$$y_2(t) = y_{21}\varphi_1(t) + y_{22}\varphi_2(t) + \dots + y_{2N}\varphi_N(t)$$

...

$$y_M(t) = y_{M1}\varphi_1(t) + y_{M2}\varphi_2(t) + \dots + y_{MN}\varphi_N(t)$$

Sygnały bazowe  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$  są określone w przedziale czasu  $0 \leq t < T$ , oraz są w tym przedziale ortonormalne:

$$\int_0^T \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \begin{cases} 1 \text{ dla } k = l \\ 0 \text{ dla } k \neq l \end{cases}$$

Współczynniki  $y_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , są określone iloczynem skalarnym:

$$y_{ij} = \int_0^T y_i(t)\varphi_j(t)dt$$

Sygnały  $y_i(t)$  można zatem traktować jako zbiór  $M$  punktów:

$$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iN})$$

w  $N$ -wymiarowej przestrzeni funkcyjnej  $\mathcal{P}$  rozpiętej na bazie ortonormalnej:

$$\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$$

## Konstelacja sygnałów

- Przestrzeń  $\mathcal{P}$ : *przestrzeń sygnałów*,
- Zbiór punktów  $y_i$  ( $i = 1 \dots M$ ) (transmitowane symbole): *konstelacja sygnałów*.

Każdy sygnał  $x(t)$  należący do przestrzeni sygnałów można przedstawić w postaci skończonego szeregu:

$$x(t) = \sum_{j=1}^N x_j \varphi_j(t)$$

gdzie współczynniki  $x_j$  są rzutem sygnału  $x(t)$  na sygnały bazowe  $\varphi_t(t)$ :

$$x_i = \int_0^T x(t) \varphi_i(t) dt$$

## Odległość między sygnałami

Odległość  $\rho(x, y)$  między sygnałami  $x(t)$  i  $y(t)$  w przestrzeni  $\mathcal{P}$ :

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

Odwzorowanie  $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{R}^N$ :

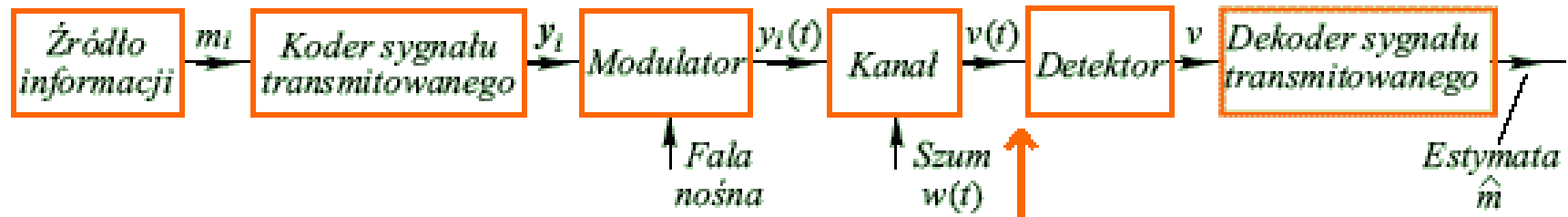
$$x(t) \mapsto \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]$$

$$y(t) \mapsto \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]$$

Z właściwości zachowania norm w przestrzeniach  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{R}^N$ :

$$\rho(x, y) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2}$$

## Detekcja sygnałów zmodulowanych cyfrowo



Odbiornik odbiera sygnał zakłócony:

$$v(t) = y_i(t) + w(t)$$

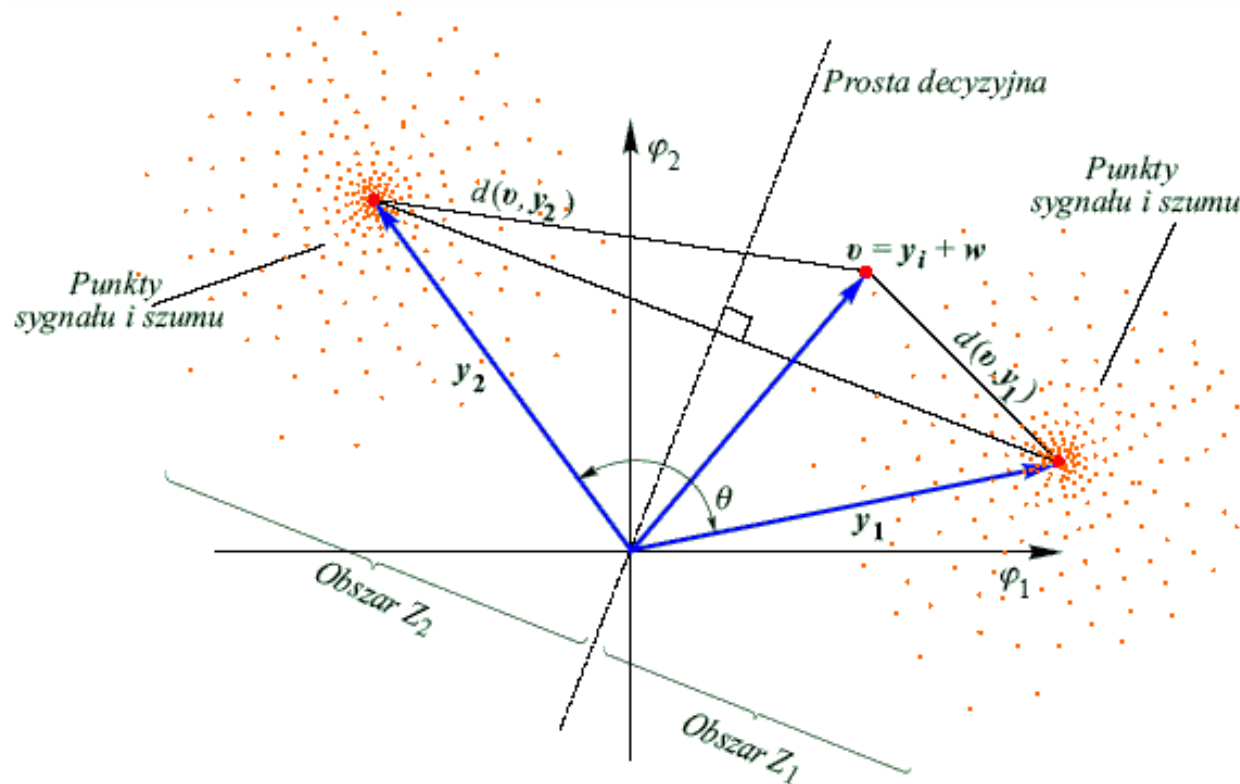
W każdej chwili  $T$  należy podjąć decyzję, minimalizując przy tym prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Zakładamy kryterium oceny sygnałów, np. **kryterium największej wiarygodności**.

Szukamy takiego wektora  $\mathbf{y}_k$  ( $k = 1 \dots M$ ), którego odległość od odebranego wektora  $\mathbf{v}$  jest minimalna:

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{y}_k) \rightarrow \min$$

## Obszary decyzyjne

Przestrzeń sygnałów z naniesionymi obszarami decyzyjnymi dla  $N = 2$  - wymiarowej przestrzeni i  $M = 2$  - wartościowej modulacji:



W podobny sposób określa się obszary decyzyjne dla  $M > 2$ .

## Modulacja 2-PSK (BPSK)

Nadawane są dwa sygnały ( $i = 1, 2$ ) o postaci:

$$y_i(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \phi_i) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(\Omega t + \phi_i), \quad 0 \leq t < T_b$$

gdzie:  $Y_0$  - amplituda,  $\Omega$  - pulsacja nośna,  $T_b = T$  - przedział bitowy,  
 $\phi_i$  - faza chwilowa:

$$\phi_i = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = 1 \\ \pi, & \text{dla } i = 2 \end{cases}$$

Zatem sygnały reprezentujące symbole binarne "1" oraz "0" mają postać:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= Y_0 \cos(\Omega t) - \text{symbol "1"}, \\ y_2(t) &= -Y_0 \cos(\Omega t) - \text{symbol "0"} \end{aligned}$$

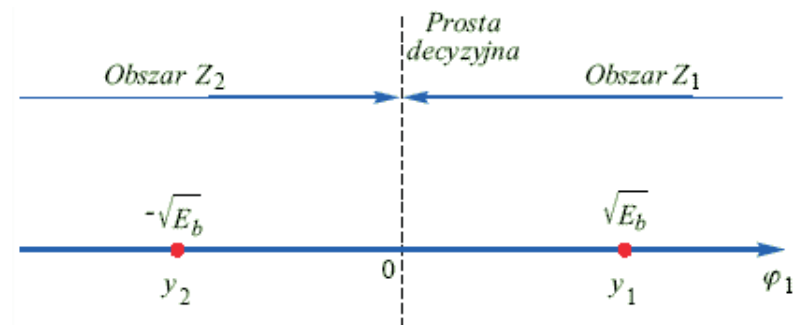


## Modulacja 2-PSK - konstelacja

Przestrzeń sygnałów jest  $N = 1$  - wymiarowa. Baza przestrzeni:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos \Omega t, \quad 0 \leq t < T_b$$

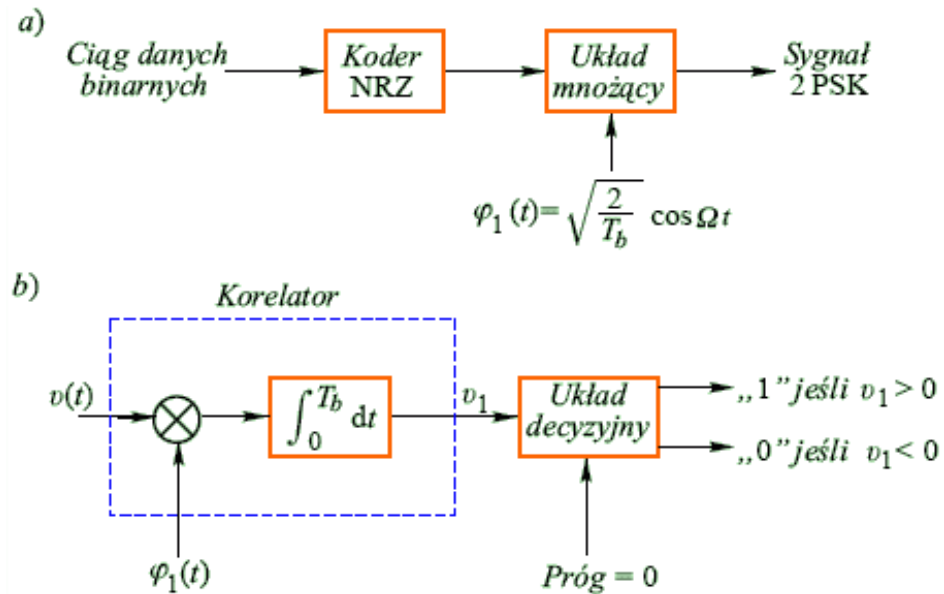
Konstalacja sygnału 2-PSK:



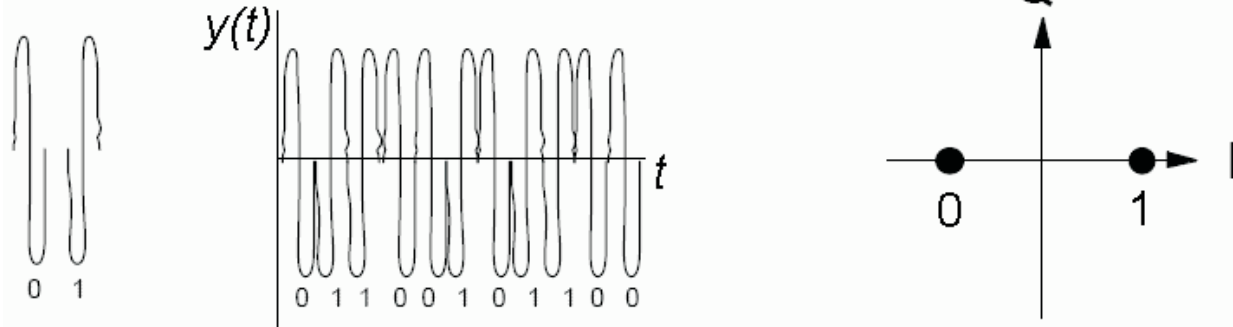
Współrzędne punktów:

$$y_{11} = -y_{21} = \int_0^{T_b} y_1(t) \varphi_1(t) dt = \sqrt{E_b}$$

# Generacja i detekcja sygnałów 2-PSK



## Binary Phase Shift Keying (BPSK)



## Modulacja 2-FSK

Nadawane są sygnały ( $i = 1, 2$ ):

$$y_i(t) = Y_0 \cos(2\pi F_i t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi F_i t), \quad 0 \leq t < T_b$$

Częstotliwość  $F_1$  reprezentuje symbol "1", natomiast  $F_2$  - symbol "0".  
Różnica  $F_2 - F_1$  - *rozstaw częstotliwości*.

Dla zapewnienia ciągłości fazy sygnału dobiera się częstotliwości (tzw. modulacja Sunde'a):

$$F_i = \frac{n_0 + i}{T_b}, \quad i = 1, 2$$

Dla  $F_1 = \frac{1}{T_b}$ ,  $F_2 = \frac{1,5}{T_b}$  - modulacja MSK (*Minimum Shift Keying*)

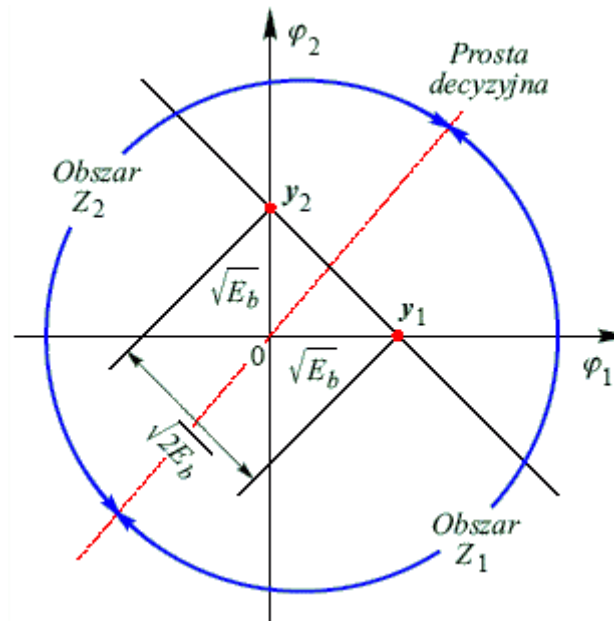
## Konstelacja 2-FSK

Przestrzeń  $N = 2$  - wymiarowa. Baza przestrzeni:

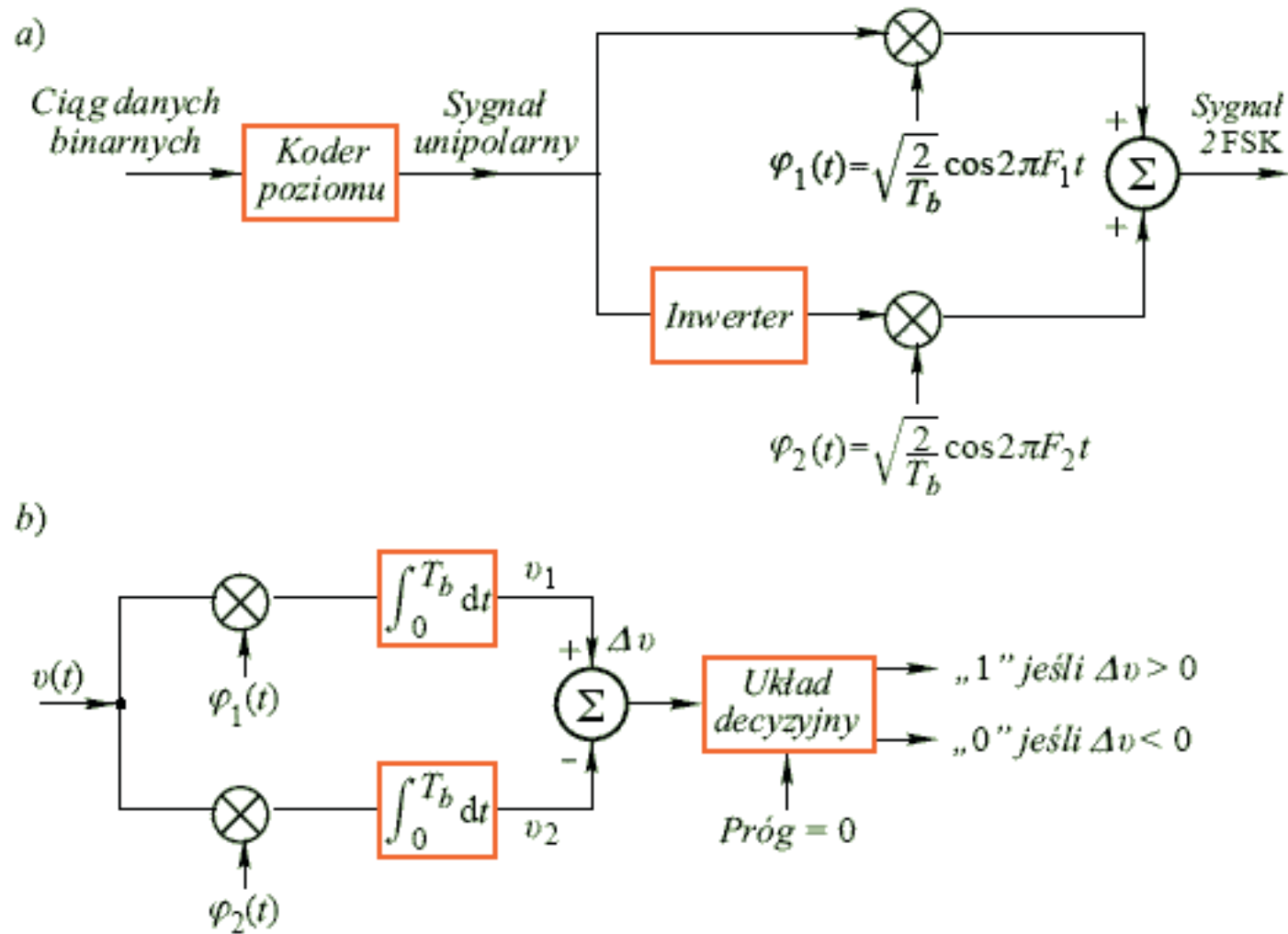
$$\varphi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi F_i t, \quad 0 \leq t < T_b, \quad i = 1, 2$$

Sygnały  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  są reprezentowane wektorami:

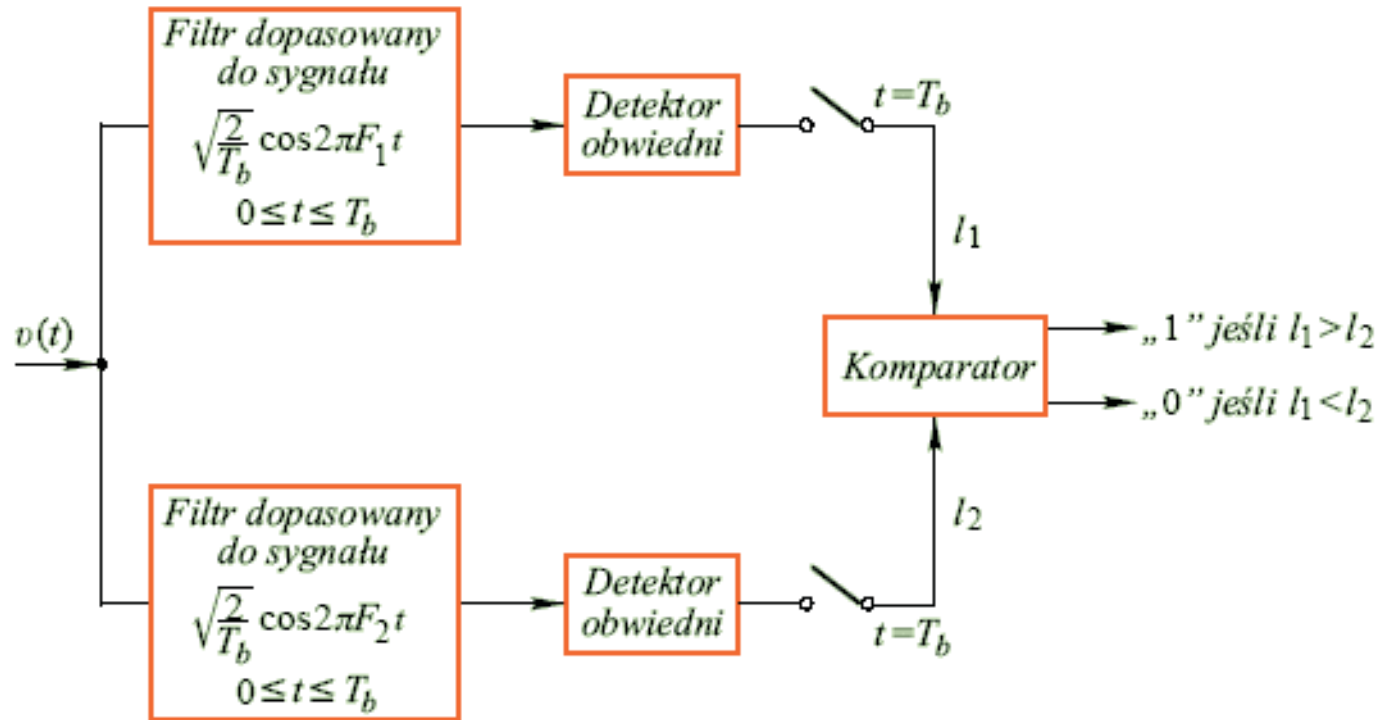
$$\mathbf{y}_1 = [\sqrt{E_b}, 0], \quad \mathbf{y}_2 = [0, \sqrt{E_b}]$$



## Generacja i detekcja sygnałów 2-FSK

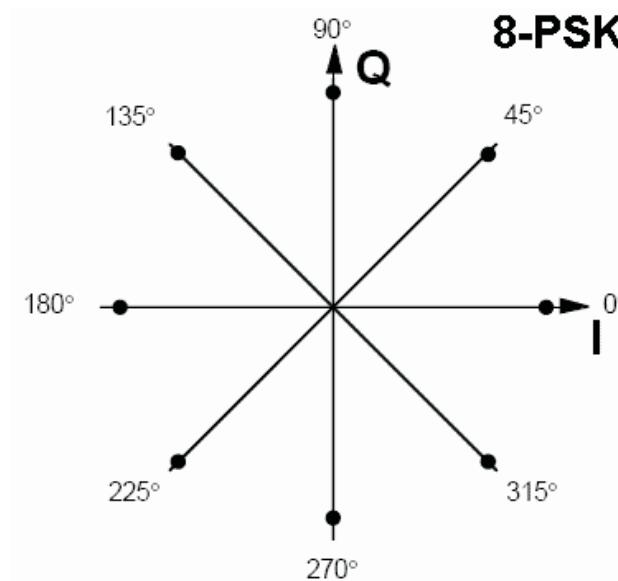
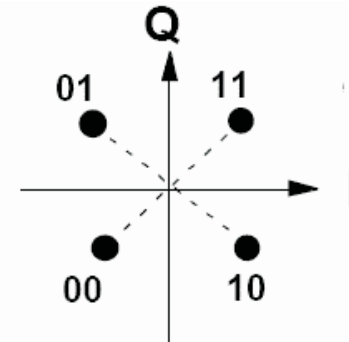
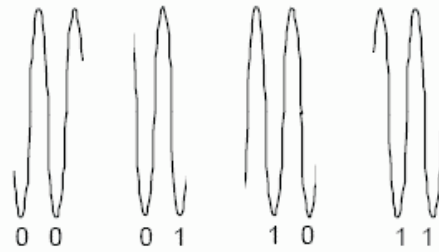


## Niekoherentna demodulacja 2-FSK



# Modulacje M-PSK

## Quarternary Phase Shift Keying (QPSK)

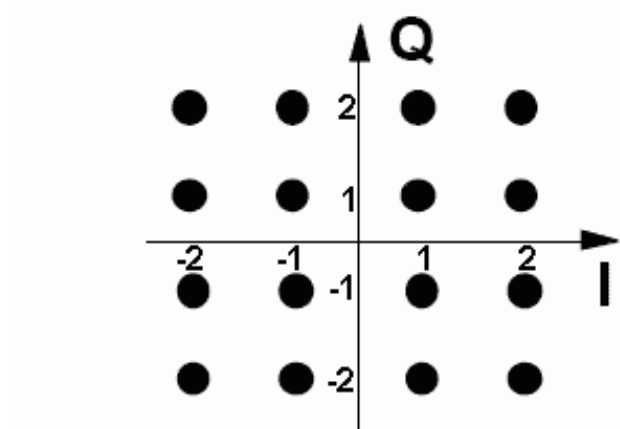


## Modulacja QAM - konstelacja

Baza ( $N = 2$ ):  $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi F_c t$ ,  $\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin 2\pi F_c t$

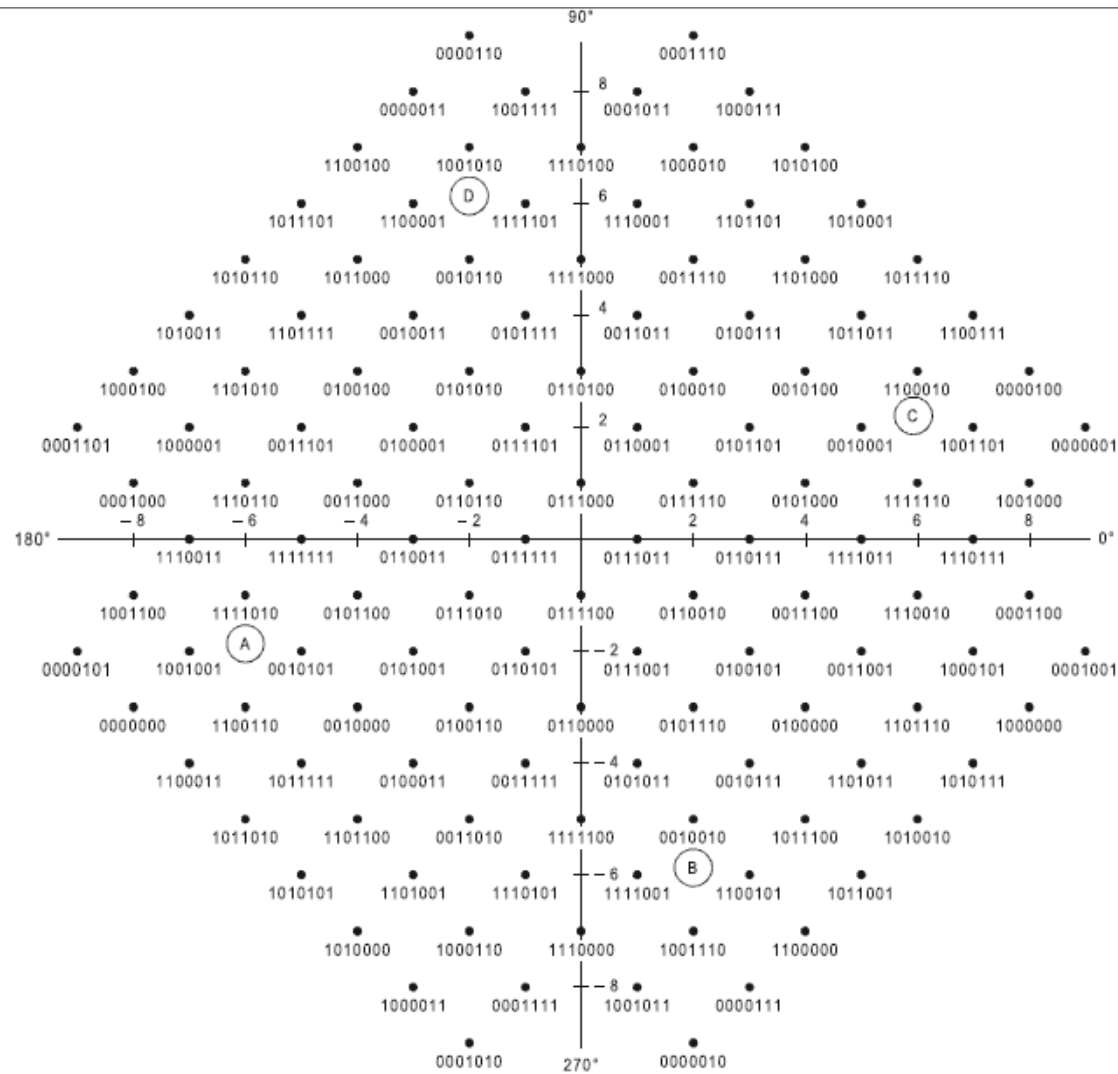
$M$  - punktów konstelacji, np. dla  $M = 16$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= [-2, 2]; & \mathbf{y}_2 &= [-1, 2]; & \mathbf{y}_3 &= [1, 2]; & \mathbf{y}_4 &= [2, 2]; \\ \mathbf{y}_5 &= [-2, 1]; & \mathbf{y}_6 &= [-1, 1]; & \mathbf{y}_7 &= [1, 1]; & \mathbf{y}_8 &= [2, 1]; \\ \mathbf{y}_9 &= [-2, -1]; & \mathbf{y}_{10} &= [-1, -1]; & \mathbf{y}_{11} &= [1, -1]; & \mathbf{y}_{12} &= [2, -1]; \\ \mathbf{y}_{13} &= [-2, -2]; & \mathbf{y}_{14} &= [-1, -2]; & \mathbf{y}_{15} &= [1, -2]; & \mathbf{y}_{16} &= [2, -2]; \end{aligned}$$

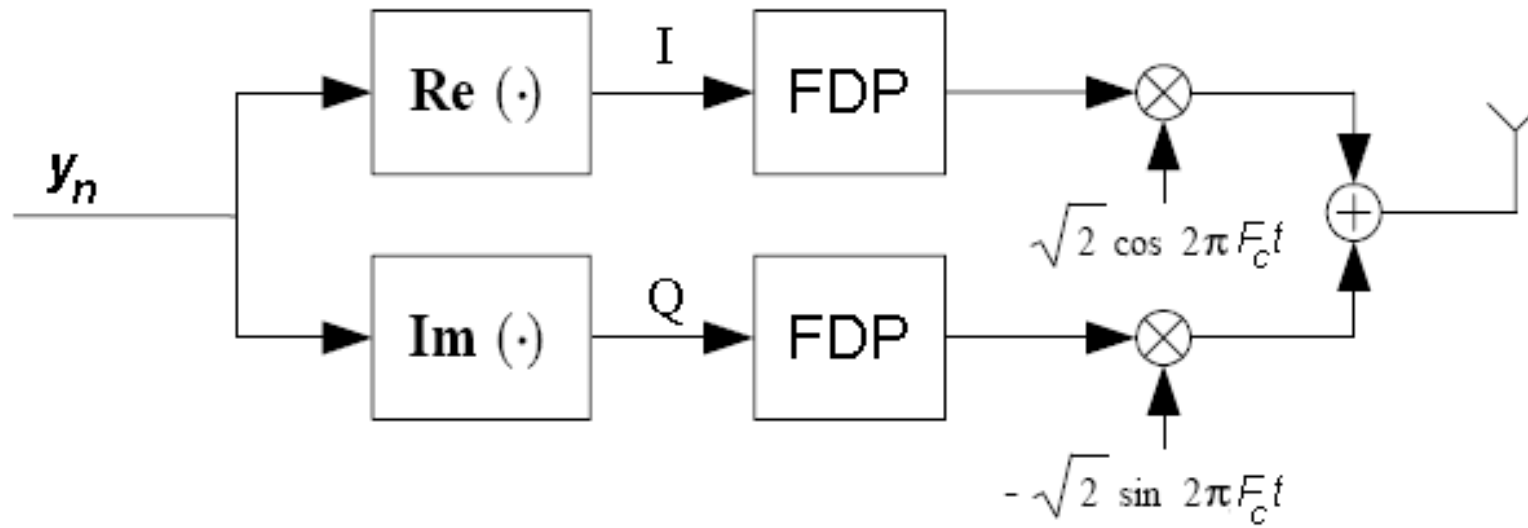




Modulacje wyższego rzędu:  $M = 32, 64, 128, 256$ . Np. 128-QAM (V.17):

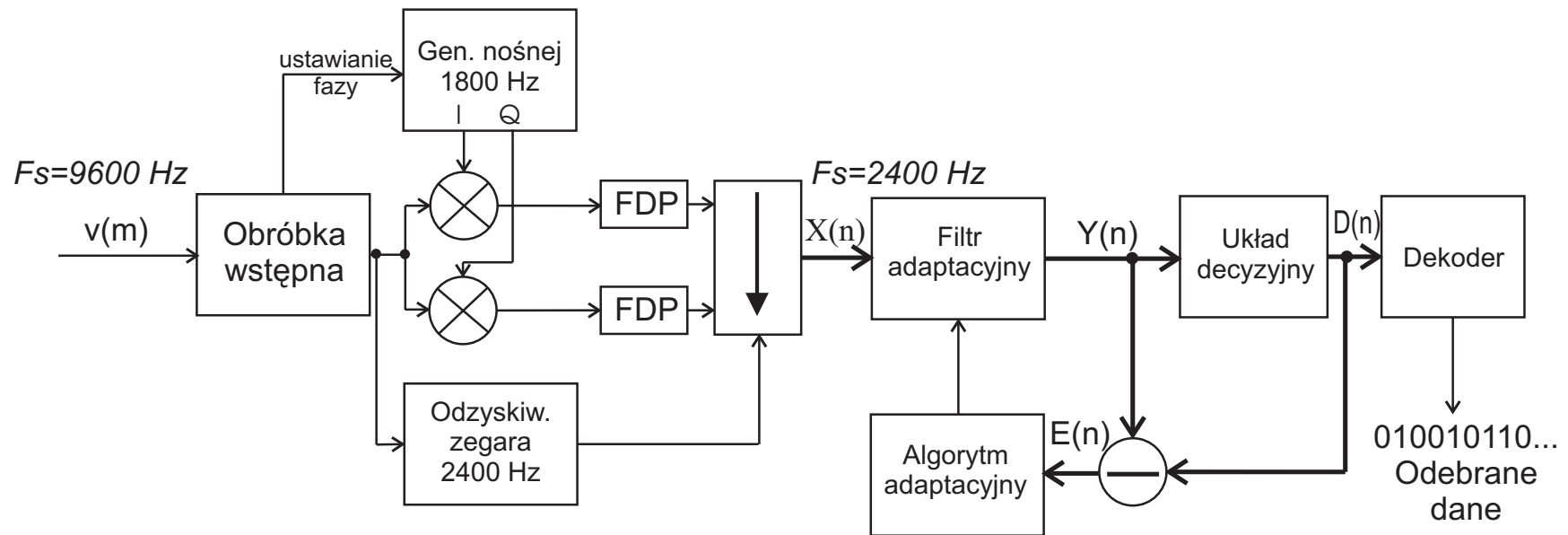


## Modulator kwadraturowy



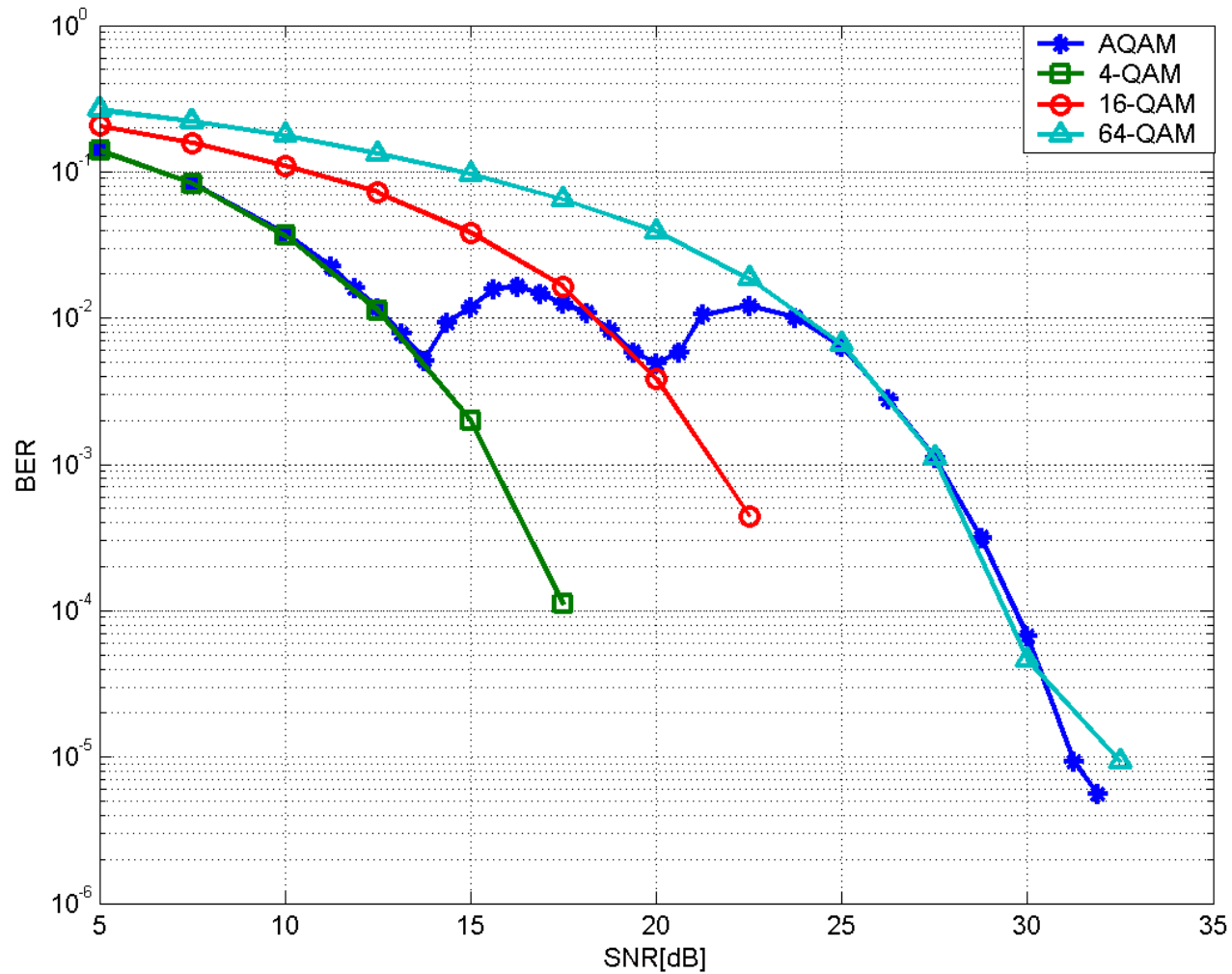
# Odbiornik : demodulator kwadraturowy

Przykład praktycznej realizacji odbiornika 64-QAM i 128-QAM (V.17):



## Wrażliwość sygnału QAM na zakłócenia

Wyniki badań symulacyjnych dla  $M=4, 16, 64$ :



## Analiza widmowa sygnałów zmodulowanych cyfrowo

Sygnał zmodulowany cyfrowo  $y(t)$  jako drganie uogólnione względem pulsacji  $\Omega$ :

$$y(t) = \operatorname{Re}\{Y(t)e^{j[\Omega t + \varphi(t)]}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}(t)e^{j\Omega t}\}$$

gdzie:  $\mathbf{Y}(t) = Y(t)e^{j\varphi(t)}$  - obwiednia zespolona sygnału  $y(t)$ .

Ponieważ  $\operatorname{Re}(z) = (z + z^*)/2$ , więc:

$$y(t) = \frac{\mathbf{Y}(t)e^{j\Omega t} + \mathbf{Y}^*(t)e^{-j\Omega t}}{2}$$

Korzystając z właściwości przekształcenia Fouriera, obliczamy:

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{1}{2}[Y(\omega - \Omega) + Y^*(-\omega - \Omega)]$$

gdzie  $Y(\omega) = \mathcal{F}[\mathbf{Y}(t)]$  - widmo obwiedni zespolonej.

## Widmo sygnału 2-PSK zmodulowanego falą prostokątną

Sygnał zmodulowany:  $y(t) = Y_0 x(t) \cos \Omega t$ ,

funkcja modulująca  $x(t)$  (fala prostokątna) jest rzeczywista, więc:

$$F[y(t)] = \frac{1}{2}[Y(\omega - \Omega) + Y(\omega + \Omega)]$$

gdzie widmo  $Y(\omega)$  obwiedni zespolonej jest określone wzorem:

$$Y(\omega) = 2\pi Y_0 \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{T_b}\right)$$

## Widmo sygnału 2-FSK zmodulowanego falą prostokątną

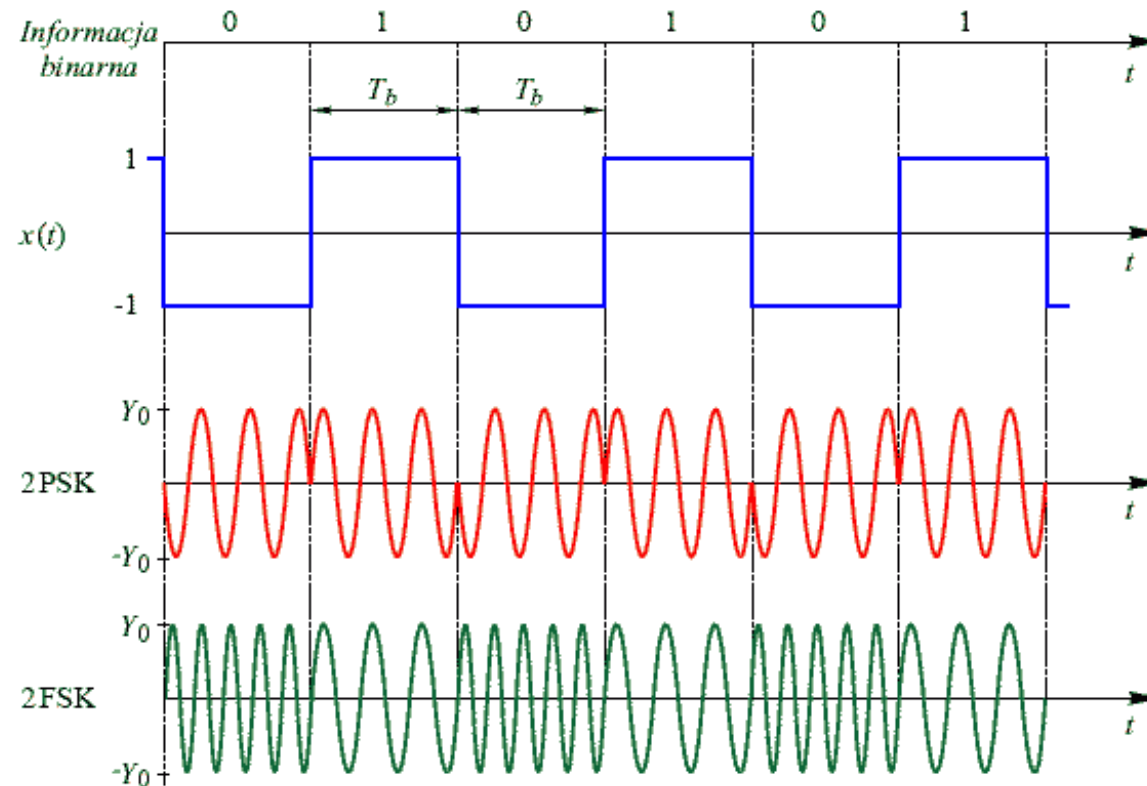
Sygnał zmodulowany jest równoważny sygnałowi FM o częstotliwości nośnej  $F = \frac{F_1 + F_2}{2}$  oraz dewiacji częstotliwości  $\Delta F = \frac{F_1 - F_2}{2}$ .

Widmo obwiedni zespolonej sygnału  $y(t)$  jest określone wzorem:

$$Y(\omega) = \pi Y_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Sa}\left[\frac{\pi}{2}(k-l)\right] + (-1)^k \text{Sa}\left[\frac{\pi}{2}(k+l)\right] \right\} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{T_b}\right)$$

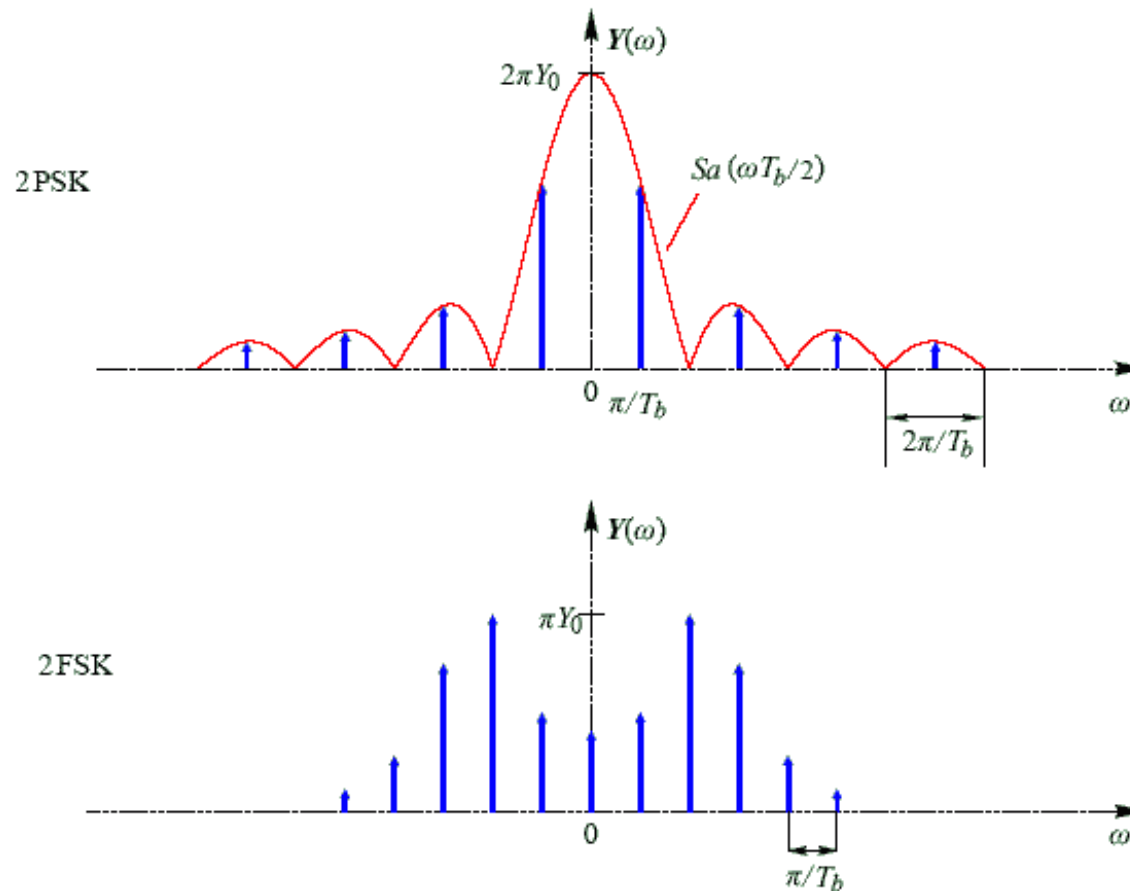
gdzie  $l = (F_2 - F_1)T_b$  - unormowany rozstaw częstotliwości.

# Przebiegi czasowe sygnałów 2PSK, 2FSK zmodulowanych falą prostokątną





## Widma sygnałów 2PSK, 2FSK zmodulowanych falą prostokątną



## Widmo mocy sygnału 2PSK zmodulowanego dowolnym sygnałem

W przypadku sygnałów losowych posługujemy się pojęciem *widma mocy*:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{4}[S_Y(\omega - \Omega) + S_Y(\omega + \Omega)]$$

gdzie  $\Omega$  jest pulsacją nośną,  $S_y(\omega)$  jest widmem mocy sygnału zmodulowanego,  $S_Y(\omega)$  jest widmem mocy jego obwiedni zespolonej.

Jeśli znaki "1" i "0" przesyłane w poszczególnych przedziałach bitowych są niezależne i równoprawdopodobne, to widmo mocy obwiedni zespolonej sygnału 2PSK ma postać:

$$S_Y(\omega) = 2E_b S a^2 \left( \frac{\omega T_b}{2} \right)$$

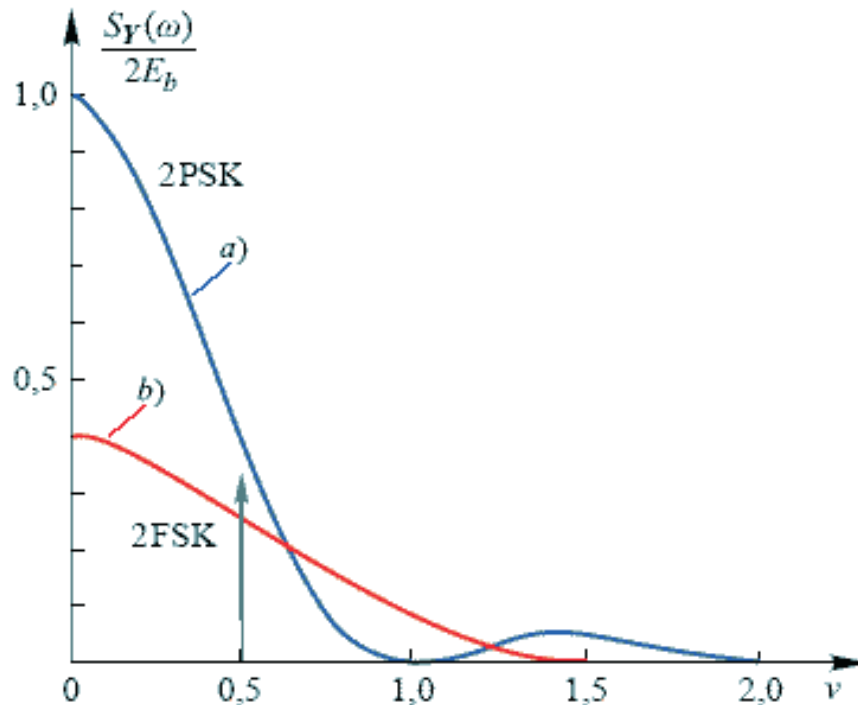
## Widmo mocy sygnału 2FSK zmodulowanego dowolnym sygnałem

Podobnie wyznacza się widmo mocy obwiedni zespolonej sygnału 2FSK dla modulacji Sunde'a ( $l = 1$ ):

$$S_y(\omega) = \pi \frac{E_b}{T_b} \left[ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{T_b}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{T_b}\right) \right] + \frac{8\pi^2 E_b \cos^2\left(\frac{\omega T_b}{2}\right)}{(\omega^2 T_b^2 - \pi^2)^2}$$

- Części dystrybucyjne widma
- Części ciągłe widma

## Widma mocy sygnałów 2FSK i 2PSK



$v = \frac{\omega T_b}{2\pi}$  - częstotliwość unormowana

Widmo sygnału 2PSK jest skupione w paśmie  $\Omega \pm \frac{2\pi}{T_b}$ , a sygnału 2FSK w paśmie  $\Omega \pm \frac{3\pi}{T_b}$ .

## Efektywność widmowa systemów 2FSK i 2PSK

Miarą wykorzystania pasma w danym systemie modulacji jest *efektywność widmowa*:

$$\rho = \frac{R_b}{B} \text{ [bit/s/Hz]}$$

gdzie  $R_b = 1/T_b$  - bitowa szybkość transmisji,  $B$  - szerokość pasma zajętego przez sygnał.

Znając szerokość pasma, w którym skupiona jest większość mocy sygnału 2-PSK i 2-FSK (Sunde'a), możemy wyznaczyć:

$$\rho_{2PSK} = \frac{1}{2} \quad \rho_{2FSK} = \frac{1}{3}$$

## Szerokość pasma sygnałów M-PSK i M-FSK

Dla sygnałów M-PSK widmo obwiedni zespolonej ma postać:

$$S_Y(\omega) = (wE_b \log_2 M) \text{Sa}^2\left[\frac{\omega T_b \log_2 M}{2}\right]$$

Szerokość widma sygnału:  $B_{M-PSK} = \frac{2}{T} = \frac{2}{T_b \log_2 M}$ .

Dla sygnałów M-FSK zakładamy:  $F_i = F_0 + \frac{i}{2T}$ ,  $i = 1 \dots M$ .

Rozstaw częstotliwości jest wówczas minimalny:  $F_{i+1} - F_i = \frac{1}{2T}$ .

Zasadnicza część mocy sygnału jest skupiona w paśmie o szerokości  $M$ -krotnie większej od rozstawu częstotliwości:

$$B_{M-FSK} = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2T_b \log_2 M}$$

## Efektywność widmowa systemów M-PSK i M-FSK

Wykorzystując otrzymane wartości  $B_{M-PSK}$  i  $B_{M-FSK}$ , otrzymujemy:

$$\rho_{M-PSK} = \frac{R_b}{B_{M-PSK}} = \frac{\log_2 M}{2}$$

$$\rho_{M-FSK} = \frac{R_b}{B_{M-FSK}} = \frac{2 \log_2 M}{M}$$

$M$	2	4	8	16	32
$\rho_{PSK}$ [bitów/s/Hz]	0,5	1	1,5	2	2,5
$\rho_{FSK}$ [bitów/s/Hz]	1	1	0,75	0,5	0,3125

## Podsumowanie

- Efektywność widmowa M-PSK rośnie wraz ze wzrostem wartościowości
- Efektywność widmowa M-FSK rośnie wraz ze wzrostem wartościowości
- Wzrost efektywności widmowej odbywa się kosztem *efektywności energetycznej*
- Dla uzyskania takiego samego poziomu BER wymagana jest większa moc sygnału M-PSK, w porównaniu z M-FSK