Pola i fale: Ćwiczenia 1

Prowadzący ćwiczenia:

mgr inż. Mateusz Marek Krysicki

Adres e-mail:

krysicki.politechnika@gmail.com

Strona www:

http://staff.elka.pw.edu.pl/~mkrysick

Konsultacje (proszę wcześniej o maila)**:**

cz. 12:15-16:00, p.543

Materiał opracowany przez M. Krysickiego na podstawie wcześniejszych materiałów do przedmiotów POFA i EFWA opracowanych przez M. Celuch, W. Gwarka oraz B. Salskiego

Układy współrzędnych

Zadanie 1.1

Dany jest punkt we współrzędnych kartezjańskich P(1, 1, √2).

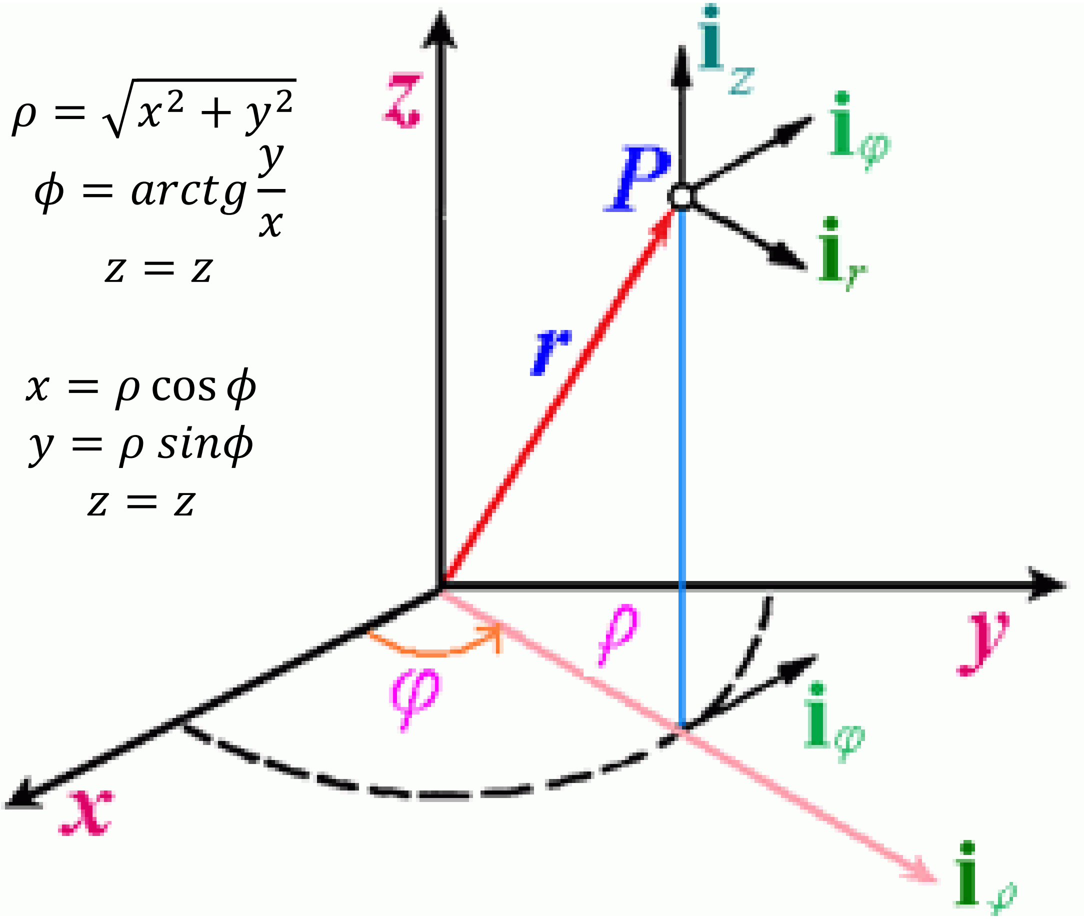
a) Naszkicuj rzut perspektywiczny, zaznaczając położenie punktu P;
b) Znajdź współrzędne cylindryczne (ρ_0, φ_0, z_0) oraz sferyczne $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ punktu P.

Układ cylindryczny

$P(\rho, \phi, z)$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = arctg\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\, sin\phi$$
$$z = z$$

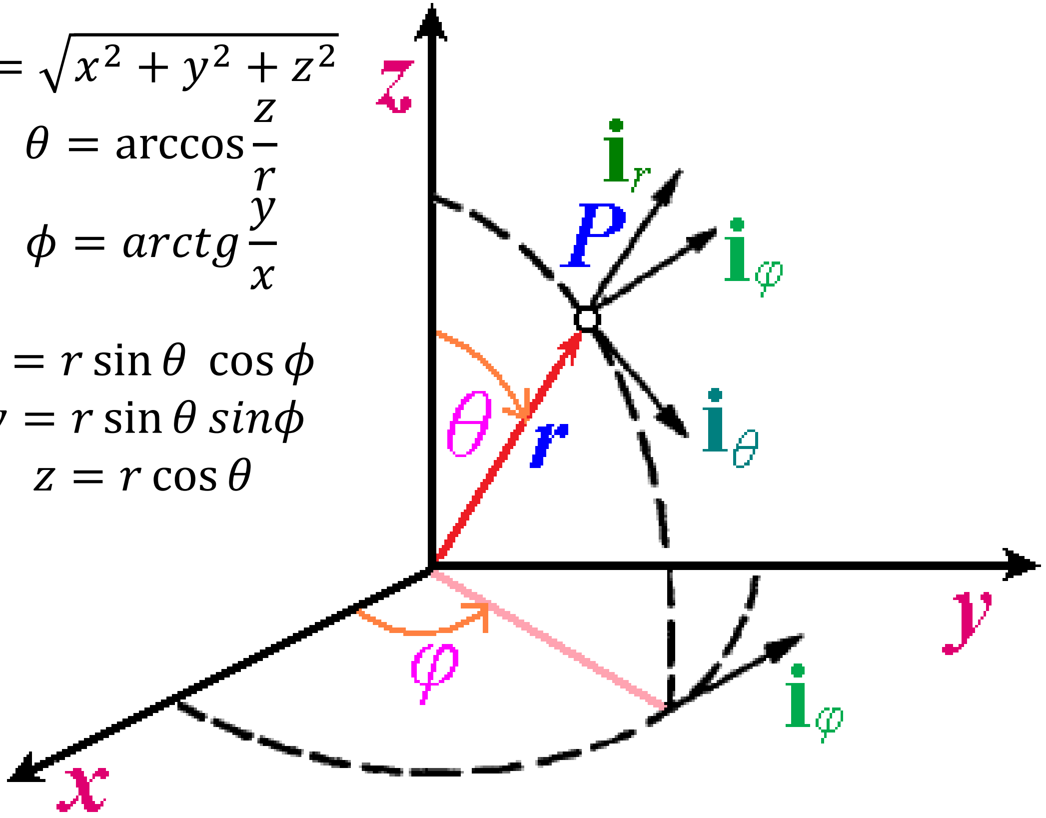


Układ sferyczny

$P(r, \theta, \phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos\frac{z}{r}$$
$$\phi = arctg\frac{y}{x}$$

$$x = r\sin\theta\ \cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\, sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$



Układy współrzędnych

Zadanie 1.3

Oblicz iloczyny skalarne wersorów:

a) $\boxed{\vec{i}_x \cdot \vec{i}_y}$

b) $\boxed{\vec{i}_x \cdot \vec{i}_\rho}$;

c) $\vec{i}_z \cdot \vec{i}_\theta$;

d) $\vec{i}_\rho \cdot \vec{i}_r$.

w punkcie o współrzędnych kartezjańskich (1, 1, 1).

Układ cylindryczny

$P(\rho, \phi, z)$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

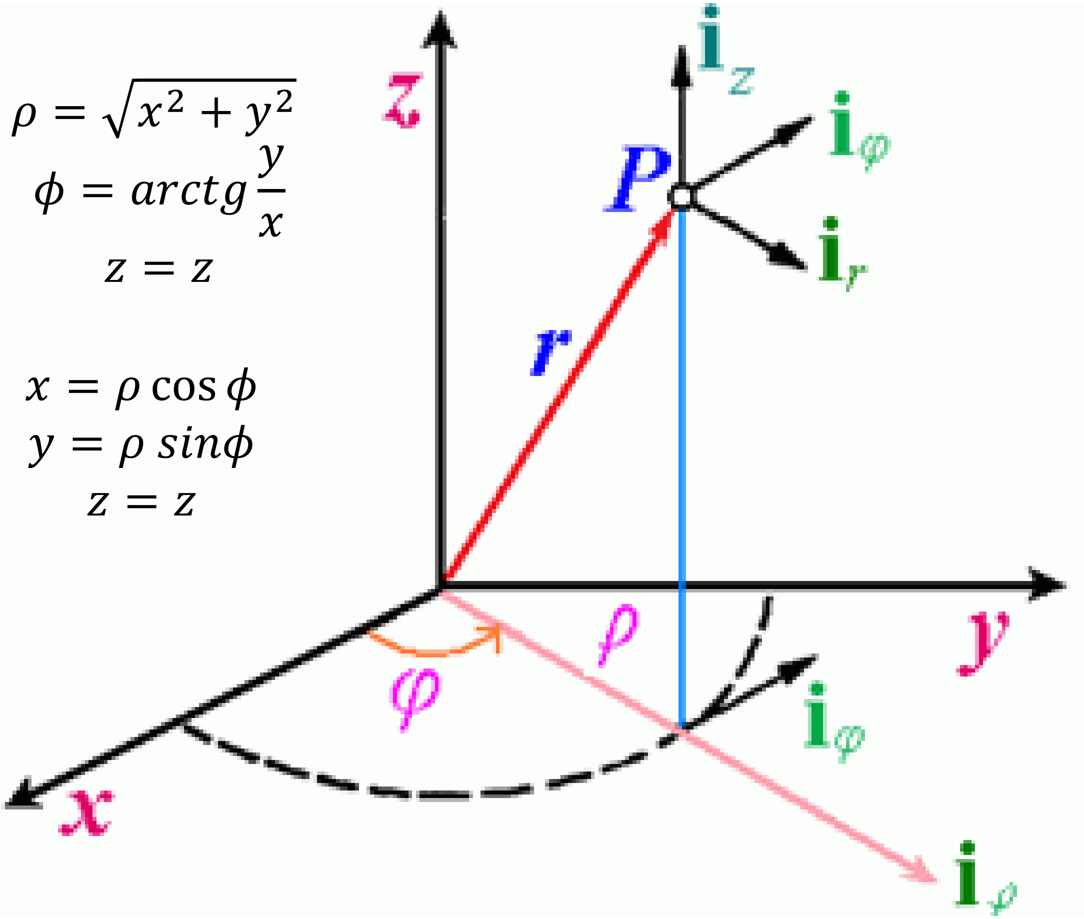
$$\phi = arctg\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\, sin\phi$$

$$z = z$$



Układ sferyczny

$P(r, \theta, \phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

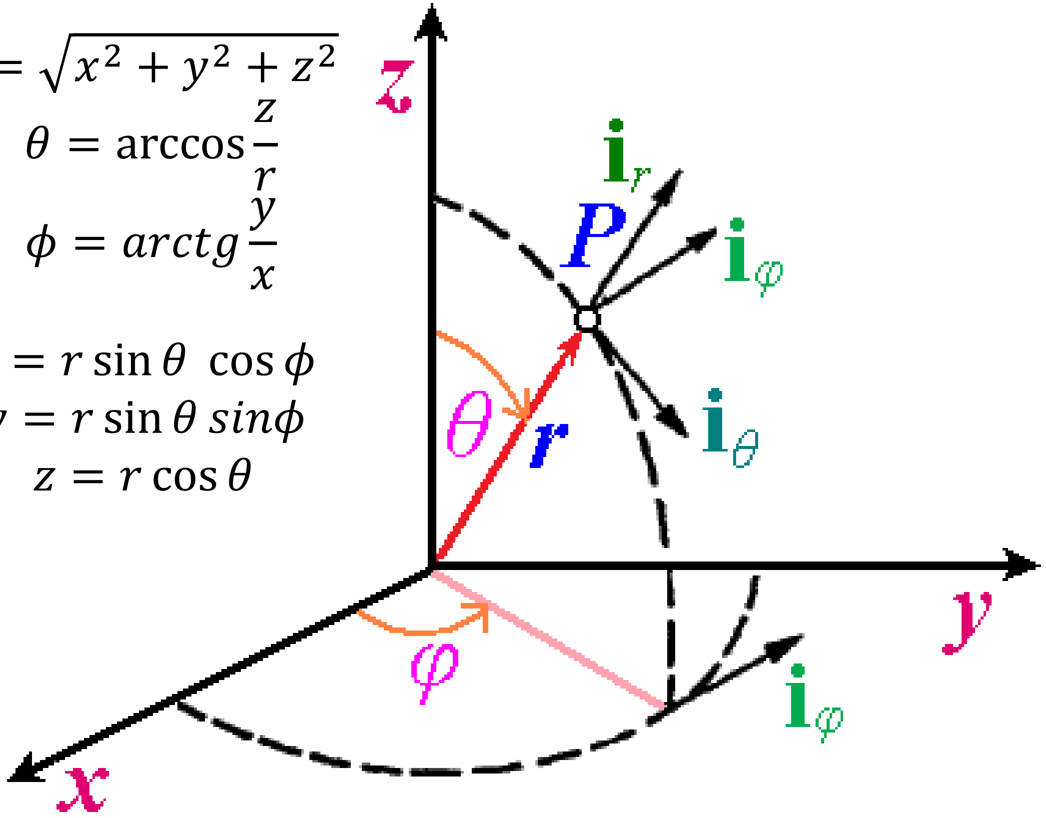
$$\theta = \arccos\frac{z}{r}$$

$$\phi = arctg\frac{y}{x}$$

$$x = r\sin\theta\ \cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\, sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

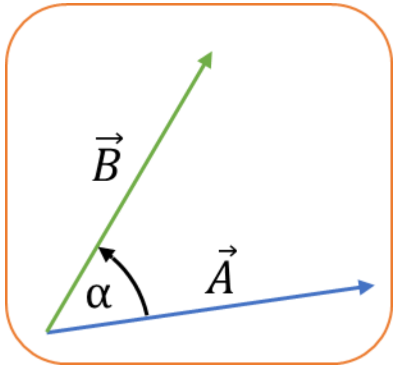


Iloczyn skalarny

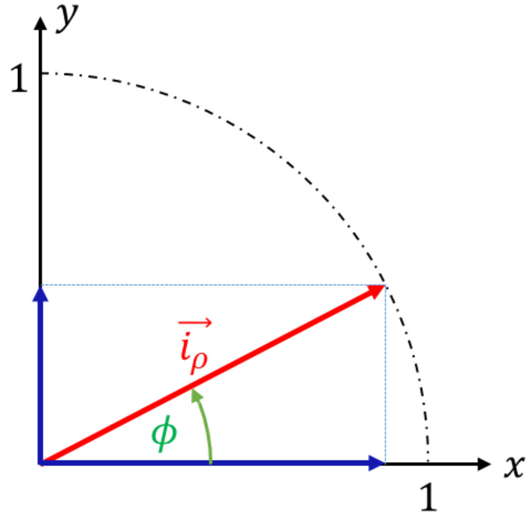
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = [A_x, A_y, A_z]\cdot[B_x, B_y, B_z] = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Interpretacja graficzna (tylko dla wektorów rzeczywistych)

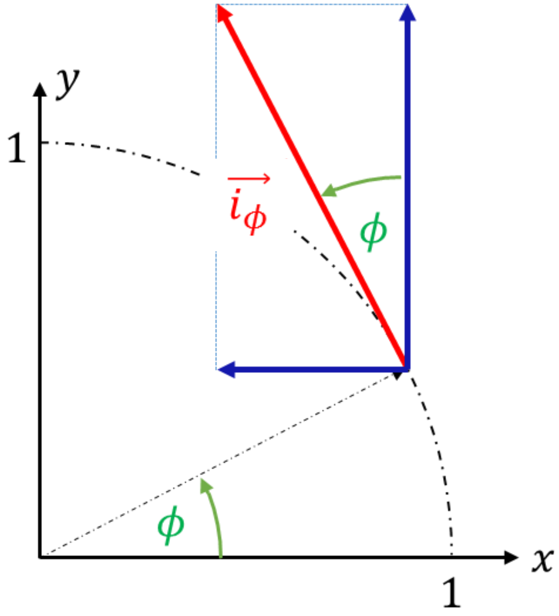
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\,\left|\vec{B}\right|\cos(\alpha)$$



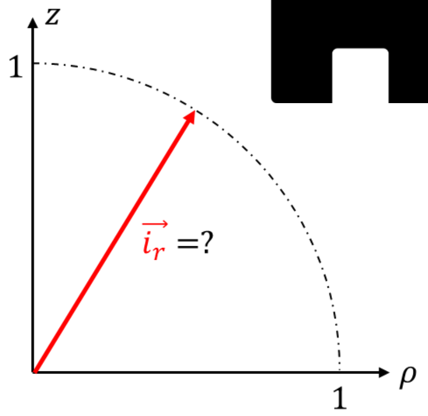
Zależności pomiędzy wersorami



$$\vec{i_\rho} = \cos\phi\,\vec{i_x} + \sin\phi\,\vec{i_y}$$



$$\vec{i_\phi} = -\sin\phi\,\vec{i_x} + \cos\phi\,\vec{i_y}$$



$$\vec{i_\rho}\cdot\vec{i_r}$$

Wektory zespolone

Dany jest wektor zespolony:

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r},t) = \overrightarrow{i_x}(1+j)e^{j(\omega t-\beta z)} + \overrightarrow{i_y}je^{j(\omega t-\beta z)}$$

Podać:

- Amplitudę zespoloną $\underline{\vec{A}_0}$ tego wektora
- Wektor rzeczywisty $\vec{A}(\vec{r},t) = \Re\mathrm{e}\{\underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\}$
- Wektor $\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{i_z} \times \underline{\vec{A}_0}$
- Wektor $\underline{\vec{C}} = \vec{A}_0 \times \underline{\vec{B}^*}$

		Przykład
Wektor zespolony	$\underline{\vec{A}}(x,y,z,t)$	$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}$
Amplituda zespolona	$\underline{\vec{A}}(x,y,z,t) = \overbrace{\underline{\vec{A}}_0(x,y,z)}^{\text{amplituda zespolona}} \cdot e^{j\omega t}$	$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underbrace{E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}_{\text{amplituda zespolona}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
Wektor rzeczywisty	$\vec{A}(\vec{r},t) = \Re\{\underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\}$	$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}(z,t))$ $\vec{E}(z,t) = E_0[2\vec{i}_x\cos(\omega t-\beta z) + \vec{i}_y\sin(\omega t-\beta z)]$

Przydatne wzory

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \vec{A} = \frac{\underline{\vec{A}} + \underline{\vec{A}}^*}{2} \qquad \left|\underline{\vec{A}}\right| = \sqrt{\underline{\vec{A}} \cdot \underline{\vec{A}}^*}$$

Analiza wektorowa

Zadanie 1.7

Dana jest funkcja skalarna $f(x, y, z) = x + y + z$ oraz pole wektorowe $\vec{F} = (x+y)\,\vec{i}_x + y\,\vec{i}_y + z\,\vec{i}_z$.

Obliczyć:

a) ∇f b) $\nabla \vec{F}$ c) $\nabla \times \vec{F}$

d) $\nabla^2 f$ e) $\nabla^2 \vec{F}$ f) $\nabla \cdot \left(f\vec{F}\right)$

g) $\nabla\left(f^2\right)$ h) $\nabla^2\left(\mathrm{e}^x f\right)$

Wskazówki:

- obliczając punkt f) skorzystać z tożsamości $\nabla \cdot \left(f\vec{F}\right) = f\nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$;
- obliczając punkt g) skorzystać z równości $\nabla\left(f^2\right) = 2f\nabla f$.

Operator **nabla** ∇ – wektor

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient ∇U – wektor i skalar – wynik: wektor

$$\nabla U = \vec{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Rotacja $\nabla \times \vec{A}$
wektor i wektor
(mn. wektorowe)
wynik: wektor

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Dywergencja $\nabla \vec{A}$ – wektor i wektor
(mnożenie skalarne)– wynik: skalar

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operator **laplasjan** Δ – skalar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

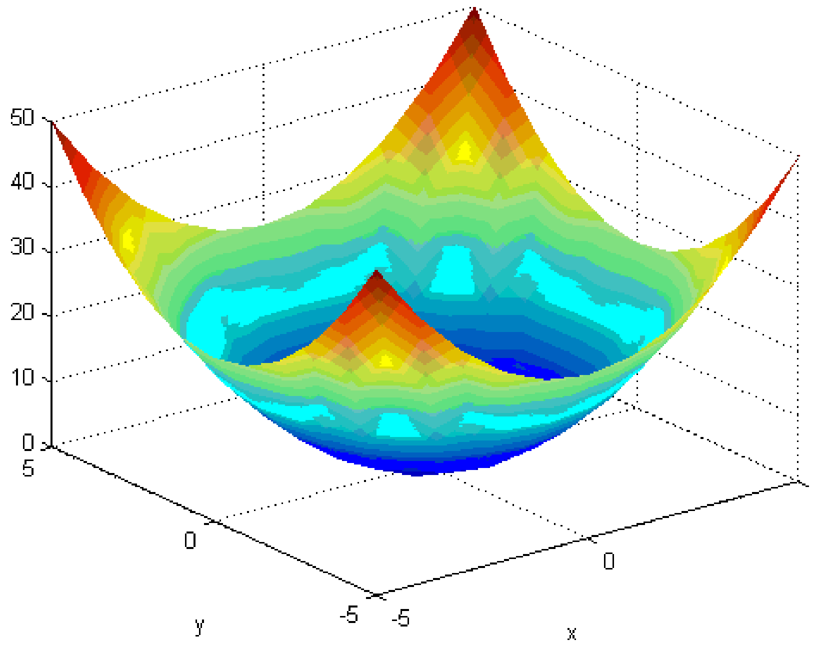
Laplasjan skalarny ΔU
skalar i skalar – wynik: skalar

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

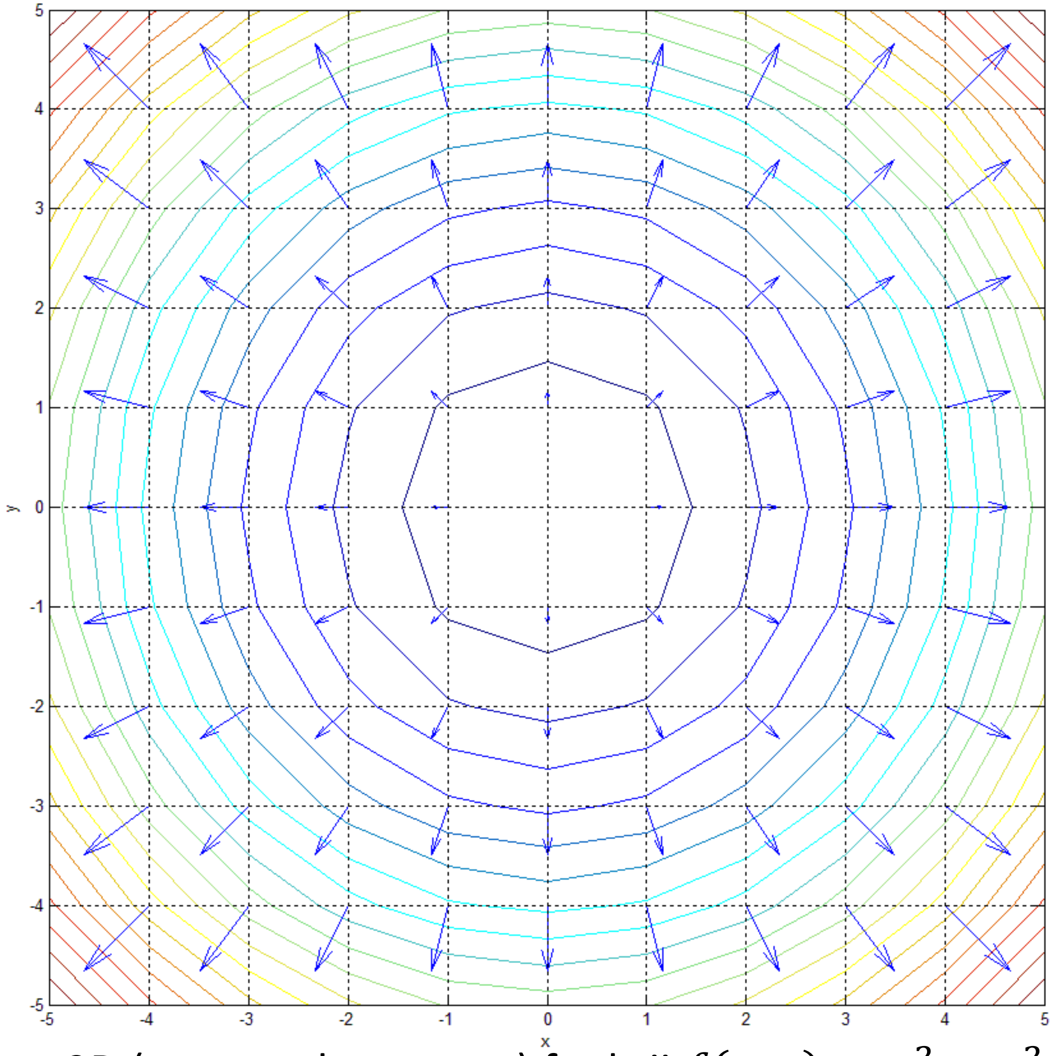
Laplasjan wektorowy $\Delta \vec{A}$
skalar i wektor– wynik: wektor

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{i}_x \nabla^2 A_x + \vec{i}_y \nabla^2 A_y + \vec{i}_z \nabla^2 A_z$$

Co to jest gradient?



Wykres 3D funkcji
$f(x,y) = x^2 + y^2$



Wykres 2D (rzut na płaszczyznę) funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$
Gradient tej funkcji $\nabla f = 2x\,\overrightarrow{i_x} + 2y\,\overrightarrow{i_y}$