Pola i fale: Ćwiczenia 2

Prowadzący ćwiczenia:

mgr inż. Mateusz Marek Krysicki

Adres e-mail:

krysicki.politechnika@gmail.com

Strona www:

http://staff.elka.pw.edu.pl/~mkrysick

Konsultacje (proszę wcześniej o maila)**:**

cz. 12:15-16:00, p.543

Materiał opracowany przez M. Krysickiego na podstawie wcześniejszych materiałów do przedmiotów POFA i EFWA opracowanych przez M. Celuch, W. Gwarka oraz B. Salskiego

Warunki istnienia pól elektromagnetycznych

Zadanie 1.15

Sprawdź, czy następujące wyrażenie może stanowić opis pola indukcji pola magnetycznego w pewnym ośrodku nieograniczonym i bez źródeł: $\vec{B} = B_0 y \cos(\omega t - \beta z)\vec{i}_z$.

Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\nabla \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_v$$

$$\nabla \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \underline{\vec{J}} = -j\omega \underline{\rho}_v$$

E – pole elektryczne [V/m]

D – indukcja elektryczna (wektor przesunięcia) [C/m^2]

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{E}$$

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ – tensor przenikalności elektrycznej [F/m]

H – pole magnetyczne [A/m]

B – indukcja magnetyczna [Vs/m^2] = [T]

$$\vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\,\vec{H}$$

$\bar{\bar{\mu}}$ – tensor przenikalności magnetycznej [H/m]

Operator **nabla** ∇ – wektor

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient ∇U – wektor i skalar – wynik: wektor

$$\nabla U = \vec{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Rotacja $\nabla \times \vec{A}$
wektor i wektor
(mn. wektorowe)
wynik: wektor

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Dywergencja $\nabla \vec{A}$ – wektor i wektor (mnożenie skalarne)– wynik: skalar

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operator **laplasjan** Δ – skalar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplasjan skalarny ΔU
skalar i skalar – wynik: skalar

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplasjan wektorowy $\Delta \vec{A}$
skalar i wektor– wynik: wektor

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{i}_x \nabla^2 A_x + \vec{i}_y \nabla^2 A_y + \vec{i}_z \nabla^2 A_z$$

Warunki istnienia pól elektromagnetycznych

Zadanie 1.16

Sprawdź, czy w próżni może istnieć pole elektromagnetyczne, którego wektor natężenia pola elektrycznego opisany jest wyrażeniem $\vec{E} = A\sin\left(kz - \omega t\right)\vec{i}_x$. Jeśli tak, to pod jakim warunkiem?

Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\nabla \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_v$$

$$\nabla \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \underline{\vec{J}} = -j\omega \underline{\rho}_v$$

E – pole elektryczne [V/m]

D – indukcja elektryczna (wektor przesunięcia) [C/m^2]

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{E}$$

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ – tensor przenikalności elektrycznej [F/m]

H – pole magnetyczne [A/m]

B – indukcja magnetyczna [Vs/m^2] = [T]

$$\vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\,\vec{H}$$

$\bar{\bar{\mu}}$ – tensor przenikalności magnetycznej [H/m]

		Przykład
Wektor zespolony	$\underline{\vec{A}}(x,y,z,t)$	$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t) = E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$
Amplituda zespolona	$\underline{\vec{A}}(x,y,z,t) = \overbrace{\underline{\vec{A}}_0(x,y,z)}^{\textit{amplituda zespolona}} \cdot e^{j\omega t}$	$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t) = \underbrace{E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}_{\textit{amplituda zespolona}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
Wektor rzeczywisty	$\vec{A}(\vec{r},t) = \Re\{\underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\}$	$\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t))$ $\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = E_0[2\vec{i}_x\cos(\omega t - \beta z) + \vec{i}_y\sin(\omega t - \beta z)]$

Przydatne wzory

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\underline{\vec{\boldsymbol{A}}} + \underline{\vec{\boldsymbol{A}}}^*}{2} \qquad \left|\underline{\vec{\boldsymbol{A}}}\right| = \sqrt{\underline{\vec{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\vec{\boldsymbol{A}}}^*}$$

Warunki istnienia pól elektromagnetycznych

Zadanie 1.18

Oblicz względną przenikalność elektryczną ε_w bezstratnego dielektryka, w którym wektor natężenia pola elektrycznego opisane jest wyrażeniem $\vec{E} = 1000 \sin\left(10^6 t - 0.01z\right) \vec{i}_x \quad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$.

Wyznacz wektor natężenia pola magnetycznego.

Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho_v \qquad \nabla \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_v$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad \nabla \underline{\vec{J}} = -j\omega \underline{\rho}_v$$

E – pole elektryczne [V/m]

D – indukcja elektryczna (wektor przesunięcia) [C/m^2]

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\, \vec{E}$$

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ – tensor przenikalności elektrycznej [F/m]

H – pole magnetyczne [A/m]

B – indukcja magnetyczna [Vs/m^2] = [T]

$$\vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\, \vec{H}$$

$\bar{\bar{\mu}}$ – tensor przenikalności magnetycznej [H/m]

Zostało czasu?

Zadanie 1.9

Obszar pewnego pokoju opisany jest we współrzędnych kartezjańskich. W punkcie P_0(20 m, 15 m, 2 m) zmierzono temperaturę $T(P_0)$ = 312 K oraz jej gradient $\nabla T(P_0) = (\vec{i}_x + \vec{i}_z)\left[\frac{K}{m}\right]$. Znajdź przybliżoną wartość temperatury w punkcie P_1(21 m, 14 m, 3 m).

Operator **nabla** ∇ – wektor

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient ∇U – wektor i skalar – wynik: wektor

$$\nabla U = \vec{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Rotacja $\nabla \times \vec{A}$
wektor i wektor
(mn. wektorowe)
wynik: wektor

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Dywergencja $\nabla \vec{A}$ – wektor i wektor
(mnożenie skalarne)– wynik: skalar

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operator **laplasjan** Δ – skalar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplasjan skalarny ΔU
skalar i skalar – wynik: skalar

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplasjan wektorowy $\Delta \vec{A}$
skalar i wektor– wynik: wektor

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{i}_x \nabla^2 A_x + \vec{i}_y \nabla^2 A_y + \vec{i}_z \nabla^2 A_z$$