Pola i fale: Ćwiczenia 3

Prowadzący ćwiczenia:

mgr inż. Mateusz Marek Krysicki

Adres e-mail:

krysicki.politechnika@gmail.com

Strona www:

http://staff.elka.pw.edu.pl/~mkrysick

Konsultacje (proszę wcześniej o maila)**:**

cz. 14:15-16:00, p.543

Materiał opracowany przez M. Krysickiego na podstawie wcześniejszych materiałów do przedmiotów POFA i EFWA opracowanych przez M. Celuch, W. Gwarka oraz B. Salskiego

Zadanie

W ferrycie, którego właściwości opisuje tensor przenikalności magnetycznej:

$$\underline{\bar{\bar{\mu}}} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j\sqrt{3} \\ 0 & -j\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

dana jest amplituda zespolona zespolonego wektora pola magnetycznego:

$$\underline{\overrightarrow{H_0}} = \overrightarrow{i_x} + j\,\overrightarrow{i_y}.$$

Znajdź zespolony wektor indukcji magnetycznej $\underline{\vec{B}}$ w ferrycie. Wyznacz kąt pomiędzy wektorami $\vec{B}$ i $\vec{H}$.

Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{j}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho_v \qquad \nabla \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_v$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad \nabla \underline{\vec{j}} = -j\omega \underline{\rho}_v$$

Równania materiałowe

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \qquad \vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\, \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad \vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\, \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = 12{,}566370614\ldots \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$$

E – pole elektryczne [V/m]

D – indukcja elektryczna (wektor przesunięcia) [C/m^2]

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ – tensor przenikalności elektrycznej [F/m]

H – pole magnetyczne [A/m]

B – indukcja magnetyczna [Vs/m^2] = [T]

$\bar{\bar{\mu}}$ – tensor przenikalności magnetycznej [H/m]

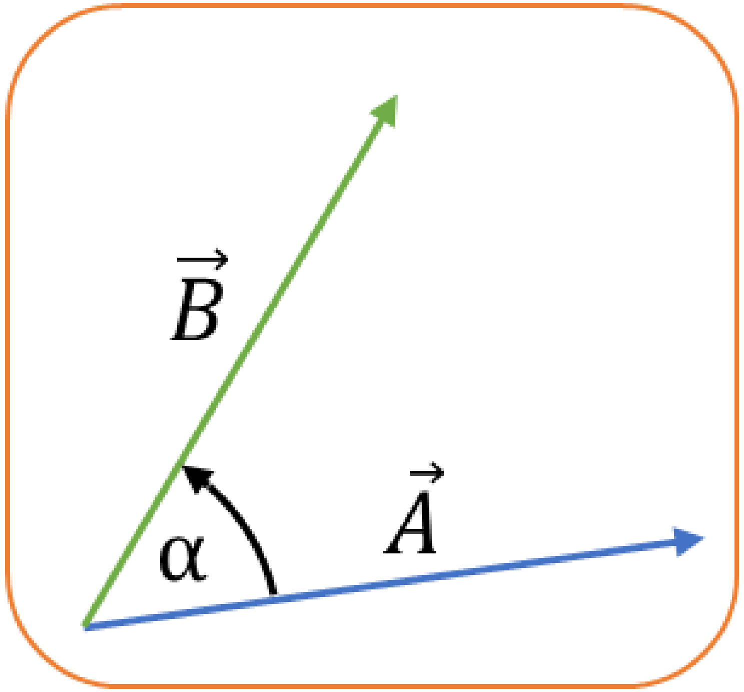
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^9\left[\frac{F}{m}\right] \qquad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\left[\frac{H}{m}\right]$$

Iloczyn skalarny

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \cdot [B_x, B_y, B_z] = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Interpretacja graficzna (tylko dla wektorów rzeczywistych)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos(\alpha)$$



		Przykład
Wektor zespolony	$\underline{\vec{\boldsymbol{A}}}(x,y,z,t)$	$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t) = E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$
Amplituda zespolona	$\underline{\vec{\boldsymbol{A}}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{\boldsymbol{A}}}(x,y,z) \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$	$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t) = \underbrace{E_0(2\vec{i}_x - \mathrm{j}\vec{i}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}_{amplituda\ zespolona} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
Wektor rzeczywisty	$\vec{\boldsymbol{A}}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{\boldsymbol{A}}}(x,y,z,t))$	$\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{\boldsymbol{E}}}(z,t))$ $\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = E_0[2\vec{i}_x\cos(\omega t - \beta z) + \vec{i}_y\sin(\omega t - \beta z)]$

Przejście pomiędzy postaciami rzeczywistą a zespoloną

Postać rzeczywista — **Postać zespolona**

$$\cos(\omega t) \longleftrightarrow e^{j\omega t}$$

Przydatne wzory

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\underline{\vec{\boldsymbol{A}}} + \underline{\vec{\boldsymbol{A}}}^*}{2} \qquad \left|\underline{\vec{\boldsymbol{A}}}\right| = \sqrt{\underline{\vec{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\vec{\boldsymbol{A}}}^*}$$

Zadanie 1.24

W materiale o parametrach $\mu_w = 1, \varepsilon_w = 1, \sigma = 0.05\left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}\right]$ prąd przesunięcia opisany jest wyrażeniem $\vec{J}_d = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(\omega t - \beta z\right)\vec{i}_x \quad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$, natomiast prąd przewodzenia to $\vec{J}_p = 10^{-2} \sin\left(\omega t - \beta z\right)\vec{i}_x \quad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$.

Znajdź natężenia pól elektrycznego i magnetycznego oraz częstotliwość. Przyjmij $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

Prąd przesunięcia

$$\nabla \vec{D} = \rho_v \qquad \nabla \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_v$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad \nabla \underline{\vec{J}} = -j\omega \underline{\rho}_v$$

Równania materiałowe

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \qquad \vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\, \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad \vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\, \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Prąd przewodzenia

E – pole elektryczne [V/m]

D – indukcja elektryczna (wektor przesunięcia) [C/m^2]

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ – tensor przenikalności elektrycznej [F/m]

H – pole magnetyczne [A/m]

B – indukcja magnetyczna [Vs/m^2] = [T]

$\bar{\bar{\mu}}$ – tensor przenikalności magnetycznej [H/m]

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^9 \left[\frac{F}{m}\right] \qquad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right]$$

Operator **nabla** ∇ – wektor

$$\nabla = \vec{\boldsymbol{i}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{i}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{i}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient ∇U – wektor i skalar – wynik: wektor

$$\nabla U = \vec{\boldsymbol{i}}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{i}}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{i}}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Rotacja $\nabla \times \vec{A}$
wektor i wektor
(mn. wektorowe)
wynik: wektor

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}}_x & \vec{\boldsymbol{i}}_y & \vec{\boldsymbol{i}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Dywergencja $\nabla \vec{A}$ – wektor i wektor (mnożenie skalarne)– wynik: skalar

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operator **laplasjan** Δ – skalar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplasjan skalarny ΔU
skalar i skalar – wynik: skalar

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplasjan wektorowy $\Delta \vec{A}$
skalar i wektor– wynik: wektor

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{i}}_x \nabla^2 A_x + \vec{\boldsymbol{i}}_y \nabla^2 A_y + \vec{\boldsymbol{i}}_z \nabla^2 A_z$$

Zostało czasu?

Zadanie 1.9

Obszar pewnego pokoju opisany jest we współrzędnych kartezjańskich. W punkcie P_0(20 m, 15 m, 2 m) zmierzono temperaturę $T(P_0) = 312$ K oraz jej gradient $\nabla T(P_0) = (\vec{i}_x + \vec{i}_z) \left[\frac{K}{m}\right]$. Znajdź przybliżoną wartość temperatury w punkcie P_1(21 m, 14 m, 3 m).

Operator **nabla** ∇ – wektor

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient ∇U – wektor i skalar – wynik: wektor

$$\nabla U = \vec{i}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Rotacja $\nabla \times \vec{A}$
wektor i wektor
(mn. wektorowe)
wynik: wektor

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Dywergencja $\nabla \vec{A}$ – wektor i wektor
(mnożenie skalarne)– wynik: skalar

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operator **laplasjan** Δ – skalar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplasjan skalarny ΔU
skalar i skalar – wynik: skalar

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplasjan wektorowy $\Delta\vec{A}$
skalar i wektor– wynik: wektor

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{i}_x \nabla^2 A_x + \vec{i}_y \nabla^2 A_y + \vec{i}_z \nabla^2 A_z$$