Pola i fale: Ćwiczenia 4

Prowadzący ćwiczenia:

mgr inż. Mateusz Marek Krysicki

Adres e-mail:

krysicki.politechnika@gmail.com

Strona www:

http://staff.elka.pw.edu.pl/~mkrysick

Konsultacje (proszę wcześniej o maila)**:**

cz. 14:15-16:00, p.543

Materiał opracowany przez M. Krysickiego na podstawie wcześniejszych materiałów do przedmiotów POFA i EFWA opracowanych przez M. Celuch, W. Gwarka oraz B. Salskiego

Zadanie 1.27 + gratis

Płaszczyzna $z = 0$ jest granicą dwóch bezstratnych ośrodków o następujących parametrach:

ośrodek 1: $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0,\ \mu_1 = 4\mu_0,\ \sigma_1 = 0;$

ośrodek 2: $\varepsilon_2 = 6\varepsilon_0,\ \mu_2 = \mu_0,\ \sigma_2 = 0.$

W leżącym na granicy punkcie P wektor natężenia pola elektrycznego w ośrodku 1 wynosi

$$\vec{E}_1 = 2\vec{i}_x + 4\vec{i}_z \ \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Wyznacz wektor natężenia pola elektrycznego w ośrodku 2 dla punktu P.

W leżącym na granicy punkcie P wektor natężenia pola magnetycznego w ośrodku 1 wynosi

$$\vec{H}_1 = 2\vec{i}_x + 4\vec{i}_z \ \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Wyznacz wektor natężenia pola magnetycznego w ośrodku 2 dla punktu P.

Warunki brzegowe

Składowa normalna **wektora indukcji elektrycznej $\vec{\boldsymbol{D}}$** jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie gromadzą się ładunki elektryczne na granicy:

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{D_1}\right) = \rho_w \qquad D_{2n} - D_{1n} = \rho_w$$

Składowa normalna **wektora indukcji magnetycznej $\vec{\boldsymbol{B}}$** jest zawsze ciągła na granicy ośrodków, ponieważ nie istnieją ładunki magnetyczne:

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right) = 0 \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Składowa styczna **wektora pola elektrycznego $\vec{\boldsymbol{E}}$** jest ciągła na granicy ośrodków:

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}\right) = 0 \qquad E_{2t} - E_{1t} = 0$$

Składowa styczna **wektora pola magnetycznego $\vec{\boldsymbol{H}}$** jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie płynie prąd powierzchniowy na granicy:

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1}\right) = \overrightarrow{J_s} \qquad H_{2t} - H_{1t} = \overrightarrow{J_s}$$

Zadanie 1.31

Po nieskończonej i bardzo cienkiej płycie metalowej pokrywającej się z płaszczyzną $y = 0$ umieszczonej w próżni płynie prąd o gęstości $\vec{\mathrm{J}}_s = 2\vec{i}_z$ A/m. Określić wektory $\vec{\mathrm{H}}$ i $\vec{\mathrm{B}}$ wywołane przez ten prąd w sąsiedztwie płyty.

Prąd powierzchniowy

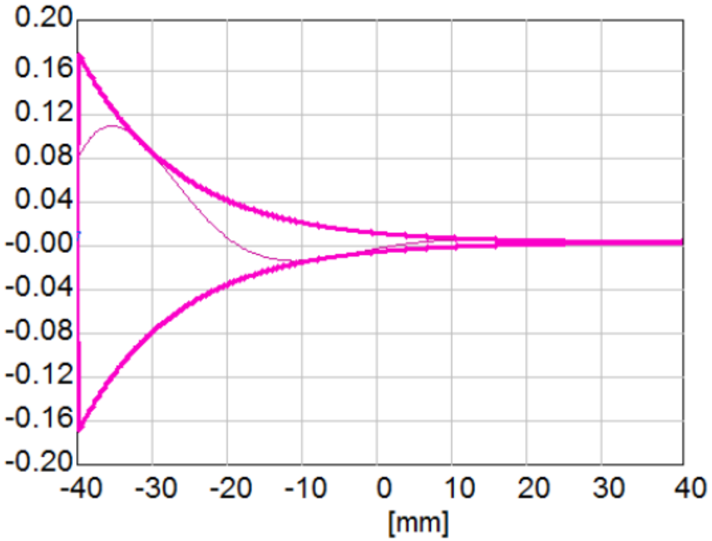
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J}\,[A/m^2] = \sigma \vec{E}$$ gęstość prądu

$$\vec{J_S}\,[A/m] = \int_0^{\infty} \vec{J}\,dx = \frac{E_0}{Z}$$

prąd powierzchniowy

(scałkowany wgłąb materiału)



Tłumienie pola elektrycznego w materiale przewodzącym

Prąd powierzchniowy można stosować

zamiast powierzchniowej gęstości prądu.

Warunki brzegowe

Składowa normalna **wektora indukcji elektrycznej $\vec{\boldsymbol{D}}$** jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie gromadzą się ładunki elektryczne na granicy:

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{D_1}\right) = \rho_w \qquad D_{2n} - D_{1n} = \rho_w$$

Składowa normalna **wektora indukcji magnetycznej $\vec{\boldsymbol{B}}$** jest zawsze ciągła na granicy ośrodków, ponieważ nie istnieją ładunki magnetyczne:

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right) = 0 \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Składowa styczna **wektora pola elektrycznego $\vec{\boldsymbol{E}}$** jest ciągła na granicy ośrodków:

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}\right) = 0 \qquad E_{2t} - E_{1t} = 0$$

Składowa styczna **wektora pola magnetycznego $\vec{\boldsymbol{H}}$** jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie płynie prąd powierzchniowy na granicy:

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1}\right) = \overrightarrow{J_s} \qquad H_{2t} - H_{1t} = \overrightarrow{J_s}$$

Do poćwiczenia w domu przed kolokwium

1. Dany jest wektor rzeczywisty: $\vec{E} = A\cos\omega t\ \overrightarrow{i_x}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{E}}$ oraz amplitudę zespoloną $\underline{\overrightarrow{E_0}}$
2. Dany jest wektor rzeczywisty: $\vec{H} = H_0\cos(\omega t\ - \beta z)\,\overrightarrow{i_y}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{H}}$ oraz amplitudę zespoloną $\underline{\overrightarrow{H_0}}$
3. Dany jest wektor rzeczywisty: $\vec{D} = D_0\sin(\beta x - \omega t)\,\overrightarrow{i_y}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{D}}$ oraz amplitudę zespoloną $\underline{\overrightarrow{D_0}}$
4. Dany jest wektor rzeczywisty: $\vec{B} = A\cos(\omega t - \beta z)\ \overrightarrow{i_x} + B\sin(\beta z - \omega t)\ \overrightarrow{i_y}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{B}}$ oraz amplitudę zespoloną $\underline{\overrightarrow{B_0}}$
5. Dana jest amplituda zespolona: $\underline{\overrightarrow{E_0}} = \ \overrightarrow{i_x}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{E}}$ oraz wektor rzeczywisty $\vec{E}$
6. Dana jest amplituda zespolona: $\underline{\overrightarrow{H_0}} = \ \overrightarrow{i_x} + j\overrightarrow{i_z}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{H}}$ oraz wektor rzeczywisty $\vec{H}$
7. Dana jest amplituda zespolona: $\underline{\overrightarrow{D_0}} = (1+j)\overrightarrow{i_x} + (1-j)\overrightarrow{i_y}$, znajdź wektor zespolony $\underline{\vec{D}}$ oraz wektor rzeczywisty $\vec{D}$

Odpowiedzi

1. $\vec{E} = A\cos\omega t\ \overrightarrow{i_x}$
   - $\underline{\vec{E}} = Ae^{j\omega t}\overrightarrow{i_x}$
   - $\underline{\overrightarrow{E_0}} = A\overrightarrow{i_x}$
2. $\vec{H} = H_0\cos(\omega t\ - \beta z)\,\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\vec{H}} = H_0 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\overrightarrow{H_0}} = H_0 e^{-j\beta z}\overrightarrow{i_y}$
3. $\vec{D} = D_0\sin(\beta x - \omega t)\,\overrightarrow{i_y}$
   - $\vec{D} = D_0\, cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \beta x\right)\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\vec{D}} = D_0 e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\beta x} e^{j\omega t}\overrightarrow{i_y}$
     $\underline{\vec{D}} = D_0 j e^{-j\beta x} e^{j\omega t}\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\overrightarrow{D_0}} = D_0 j e^{-j\beta x}\overrightarrow{i_y}$
4. $\vec{B} = A\cos(\omega t - \beta z)\ \overrightarrow{i_x} + B\sin(\beta z - \omega t)\ \overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\vec{B}} = Ae^{-j\beta z} e^{j\omega t}\overrightarrow{i_x} + Be^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\overrightarrow{B_0}} = Ae^{-j\beta z}\overrightarrow{i_x} + Bje^{-j\beta z}\overrightarrow{i_y}$
5. $\underline{\overrightarrow{E_0}} = \overrightarrow{i_x}$
   - $\underline{\vec{E}} = e^{j\omega t}\overrightarrow{i_x}$
   - $\vec{E} = \cos\omega t\ \overrightarrow{i_x}$
6. $\underline{\overrightarrow{H_0}} = \overrightarrow{i_x} + j\overrightarrow{i_z},$
   - $\underline{\vec{H}} = \left(\overrightarrow{i_x} + j\overrightarrow{i_z}\right)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}\overrightarrow{i_x} + je^{j\omega t}\overrightarrow{i_z}$
   - $\vec{H} = \cos\omega t\ \overrightarrow{i_x} - \sin\omega t\,\overrightarrow{i_z}$
7. $\underline{\overrightarrow{D_0}} = (1 + j)\overrightarrow{i_x} + (1 - j)\overrightarrow{i_y}$
   - $\underline{\vec{D}} = (1 + j)e^{j\omega t}\overrightarrow{i_x} + (1 - j)e^{j\omega t}\overrightarrow{i_y}$
   - $\vec{D} = (\cos\omega t\ - \sin\omega t\ )\overrightarrow{i_x} +$
     $+ (\cos\omega t + \sin\omega t\ \ \overrightarrow{i_y}$

		Przykład
Wektor zespolony	$\vec{\underline{A}}(x,y,z,t)$	$\vec{\underline{E}}(z,t) = E_0(2\vec{i}_x - j\vec{i}_y)e^{j(\omega t-\beta z)}$
Amplituda zespolona	$\vec{\underline{A}}(x,y,z,t) = \vec{\underline{A}}(x,y,z)\cdot e^{j\omega t}$	$\vec{\underline{E}}(z,t) = \underbrace{E_0(2\vec{i}_x - j\vec{i}_y)e^{-j\beta z}}_{amplituda\ zespolona}\cdot e^{j\omega t}$
Wektor rzeczywisty	$\vec{A}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}(\vec{\underline{A}}(x,y,z,t))$	$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}(\vec{\underline{E}}(z,t))$ $\vec{E}(z,t) = E_0[2\vec{i}_x\cos(\omega t-\beta z)$ $+\vec{i}_y\sin(\omega t-\beta z)]$

Przejście pomiędzy postaciami rzeczywistą a zespoloną

Postać rzeczywista		Postać zespolona
$\cos(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$e^{j\omega t}$

Przydatne wzory

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \vec{A} = \frac{\vec{\underline{A}}+\vec{\underline{A}}^*}{2} \qquad \left|\vec{\underline{A}}\right| = \sqrt{\vec{\underline{A}}\cdot\vec{\underline{A}}^*}$$