

Pola i fale: Ćwiczenia 13

Fale w falowodach prostokątnych.
Rezonatory węgkowe.

Prowadzący ćwiczenia:

mgr inż. Mateusz Marek Kryszicki

Adres e-mail:

kryszicki.politechnika@gmail.com

Strona www:

<http://staff.elka.pw.edu.pl/~mkryszick>

Konsultacje (proszę wcześniej o maila):

cz. 12:15-14:00, p.543

Materiał opracowany przez M. Kryszickiego na podstawie wcześniejszych materiałów do przedmiotów POFA i EFWA opracowanych przez M. Celuch, W. Gwarka oraz B. Salskiego



**Instytut Radioelektroniki
i Techniki Multimedialnych**

Zadanie

W powietrznym falowodzie kwadratowym o boku $a = 2.5[cm]$ rozchodzi się fala bieżąca rodzaju H_{11} o $f = 12 [GHz]$. Znając maksymalną amplitudę poprzecznego pola magnetycznego $H_0 = 5 \left[\frac{A}{m} \right]$ obliczyć:

- częstotliwość graniczną oraz graniczną długość fali rodzaju H_{11} ,
- maksymalne amplitudy składowych poprzecznych pola elektrycznego,
- maksymalną amplitudę składowej wzdłużnej wektora Poyntinga,
- Średnią za okres moc przenoszoną przez falowód,
- Maksymalną amplitudę prądu płynącego na powierzchni ścianek,
- Maksymalną wartość gęstości ładunku indukowanego na powierzchni ścianek.

Wykonać szkice rozkładów pól elektrycznego i magnetycznego, ładunku oraz prądów przewodzenia i przesunięcia w przekroju poprzecznym oraz w wybranym przekroju wzdłużnym falowodu.

Częstotliwość graniczna rodzaju falowodowego TE_{mn} lub TM_{mn} w falowodzie o rozmiarach poprzecznych a, b .

$$f_{g,m,n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{\mu\varepsilon}}$$

Graniczna długość fali rodzaju falowodowego TE_{mn} lub TM_{mn} w falowodzie o rozmiarach poprzecznych a, b .

$$\lambda_{g,m,n} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Rodzaje TM (E)

$$E_z = E_{z_0} \sin(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$E_x = \frac{-j\beta_z \beta_x}{\beta_c^2} E_{z_0} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta_z \beta_y}{\beta_c^2} E_{z_0} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$H_x = \frac{jE_{z_0} \beta_y \omega \varepsilon}{\beta_c^2} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$H_y = -\frac{jE_{z_0} \beta_x \omega \varepsilon}{\beta_c^2} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

Rodzaje TE (H)

$$H_z = H_{z_0} \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$H_x = \frac{j\beta_z \beta_x}{\beta_c^2} H_{z_0} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$H_y = \frac{j\beta_z \beta_y}{\beta_c^2} H_{z_0} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$E_x = \frac{j\beta_y \omega \mu}{\beta_c^2} H_{z_0} \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta_x \omega \mu}{\beta_c^2} H_{z_0} \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-\gamma_z z}$$

Uwaga: możliwe są rodzaje TE_{m0} lub TE_{0n} ale **niemożliwe** są rodzaje TM_{m0} and TM_{0n}.

Podstawowe właściwości falowodów bezstratnych

$$\beta_c^2 + \beta_z^2 = \beta^2 \quad \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\omega_c = \frac{\beta_c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c}$$

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2} = \beta \sqrt{1 - \frac{\beta_c^2}{\beta^2}} = \beta \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta_c^2}{\beta^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

Jak zmienia się impedancja falowa?

$$Z_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad \text{rodzaje TE}$$

$$Z_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad \text{rodzaje TM}$$

Chwilowa wartość wektora powierzchniowej gęstości mocy transmitowanej Wektor Poyntinga

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Średnia za okres wartość wektora powierzchniowej gęstości mocy transmitowanej
Średni za okres wektor Poyntinga

$$\vec{S}_{avg} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{S}(t) dt \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

$$\vec{S}_{avg} = \frac{1}{2} \Re\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Warunki brzegowe

Składowa **normalna** wektora indukcji elektrycznej \vec{D} jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie gromadzą się ładunki elektryczne na granicy:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_w \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_w$$

Składowa **normalna** wektora indukcji magnetycznej \vec{B} jest zawsze ciągła na granicy ośrodków, ponieważ nie istnieją ładunki magnetyczne:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Składowa **styczna** wektora pola elektrycznego \vec{E} jest ciągła na granicy ośrodków:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad E_{2t} - E_{1t} = 0$$

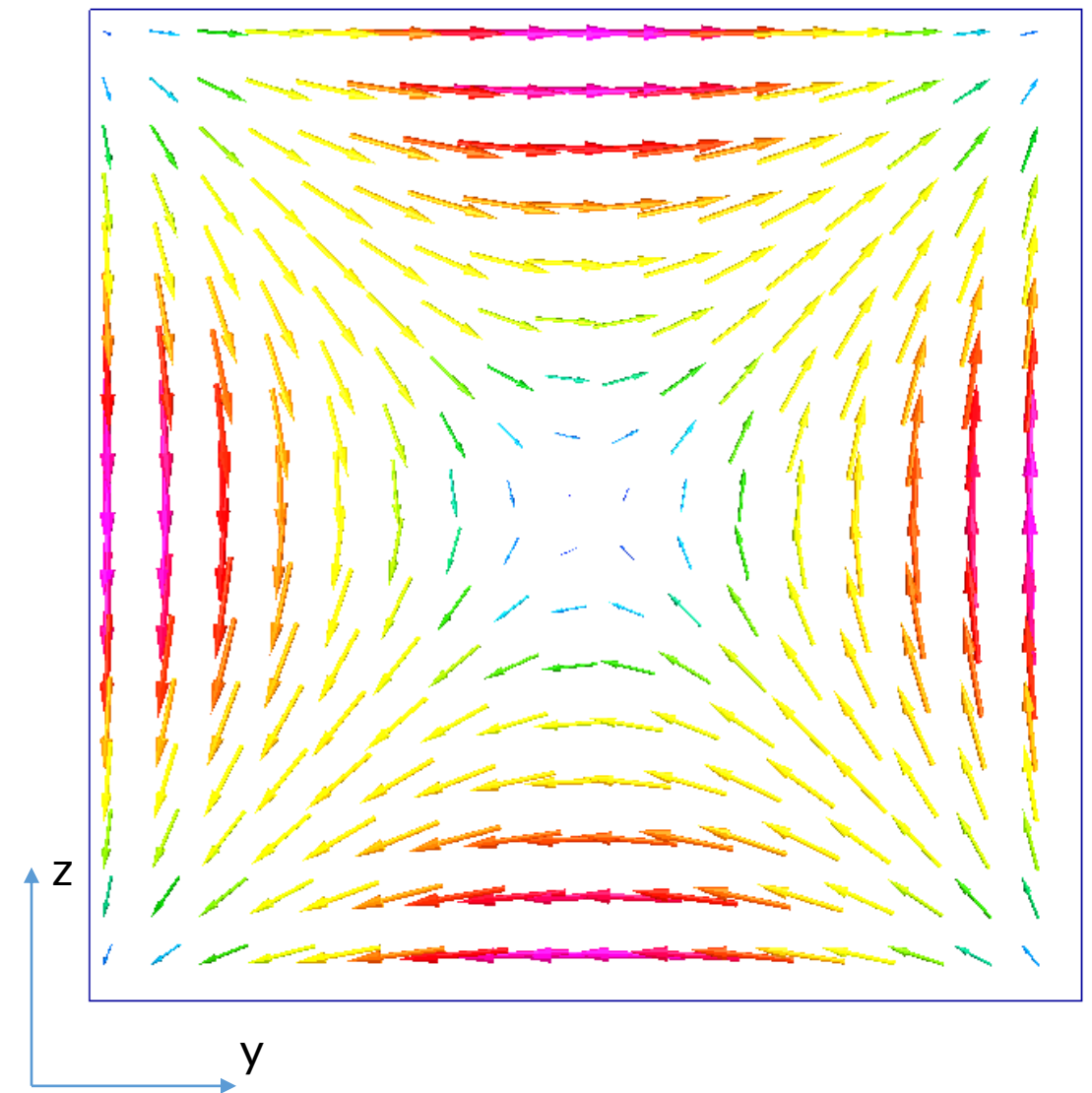
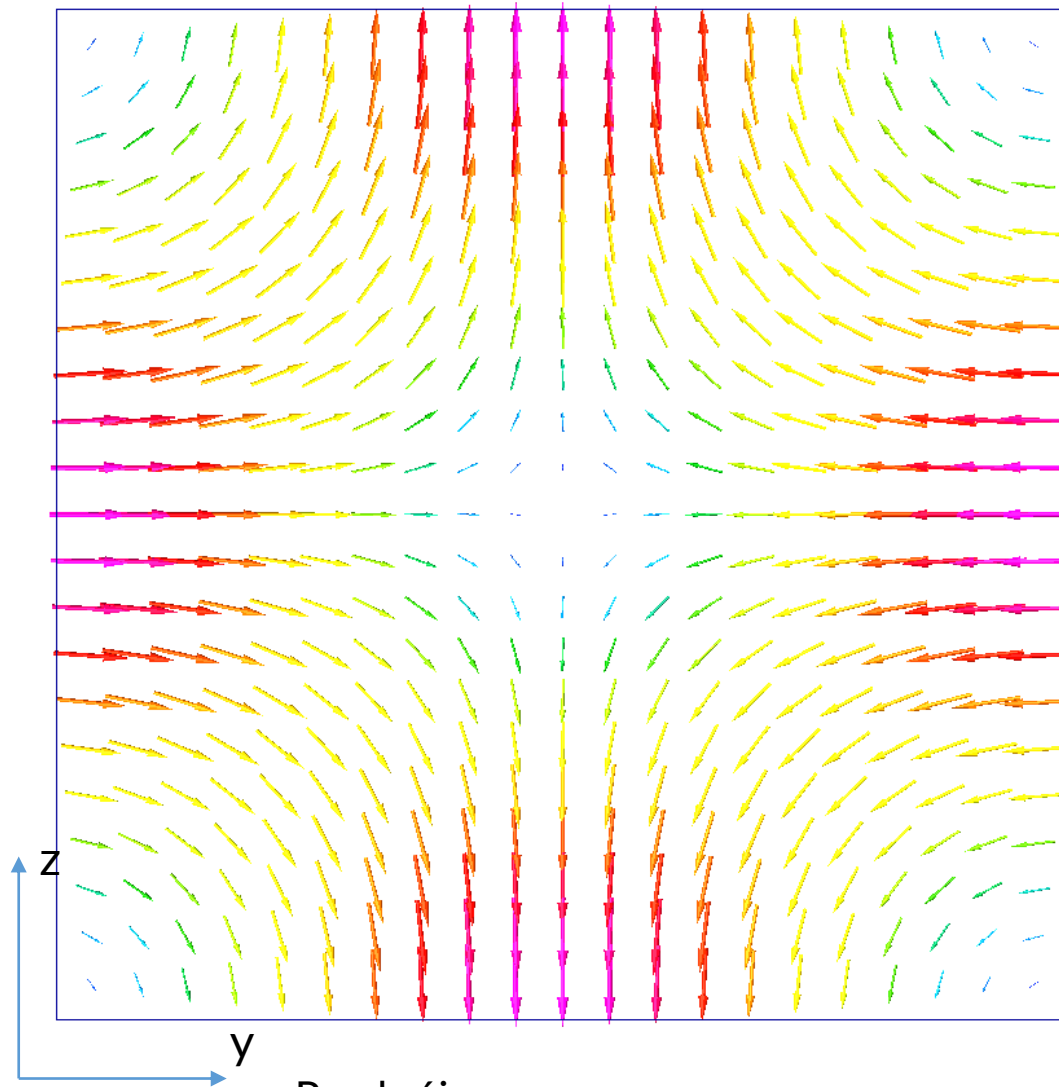
Składowa **styczna** wektora pola magnetycznego \vec{H} jest ciągła na granicy ośrodków pod warunkiem, że nie płynie prąd powierzchniowy na granicy:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad H_{2t} - H_{1t} = \vec{J}_s$$

Pola elektryczne i magnetyczne rodzaju TE_{11} w falowodzie kwadratowym o boku a .

Pole elektryczne

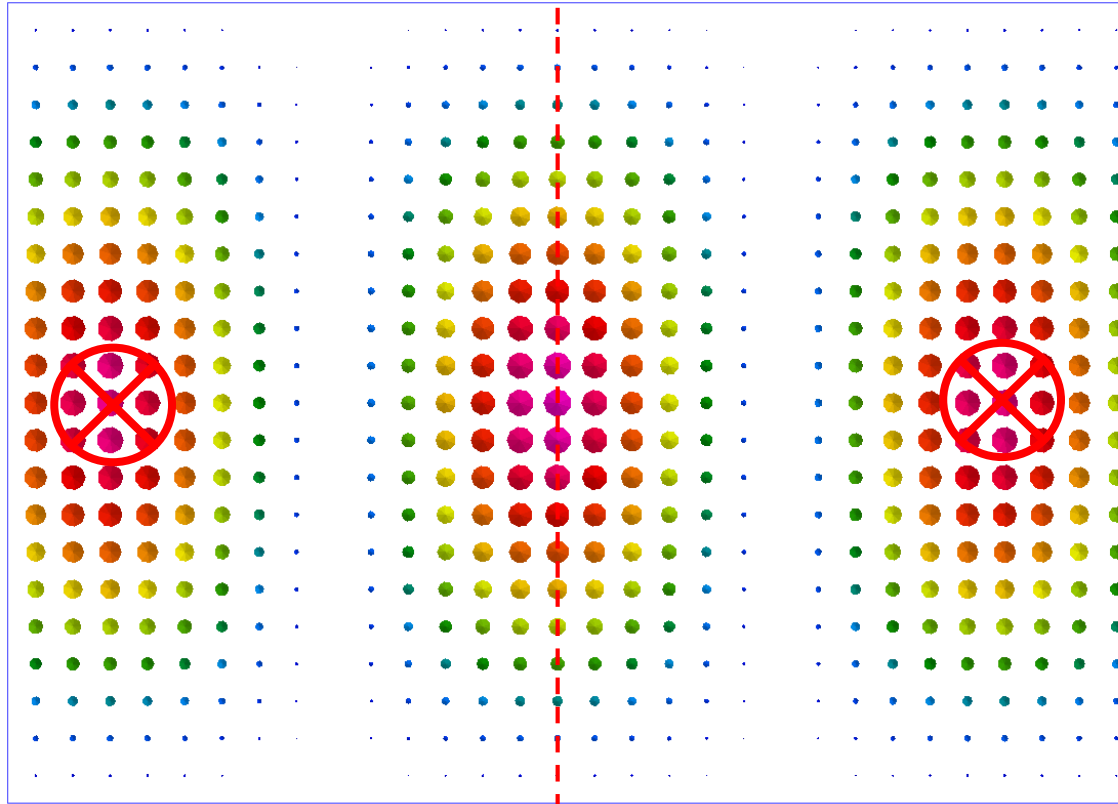
Pole magnetyczne



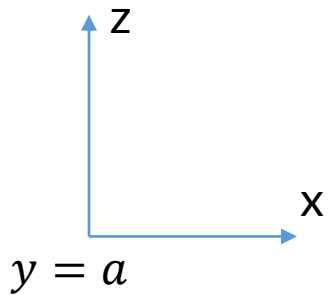
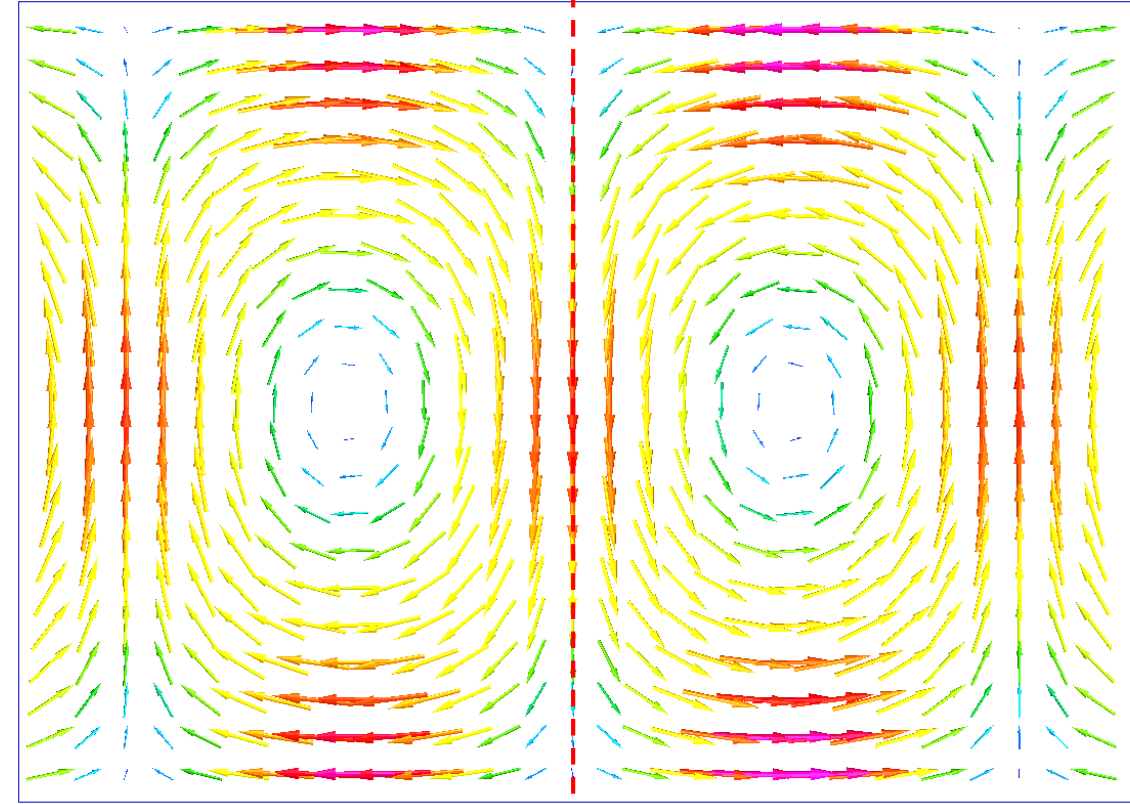
Przekrój poprzeczny,
propagacja rodzaju
w kierunku: $+\vec{i}_x$

Pola elektryczne i magnetyczne rodzaju TE_{11} w falowodzie kwadratowym o boku a .

Pole elektryczne



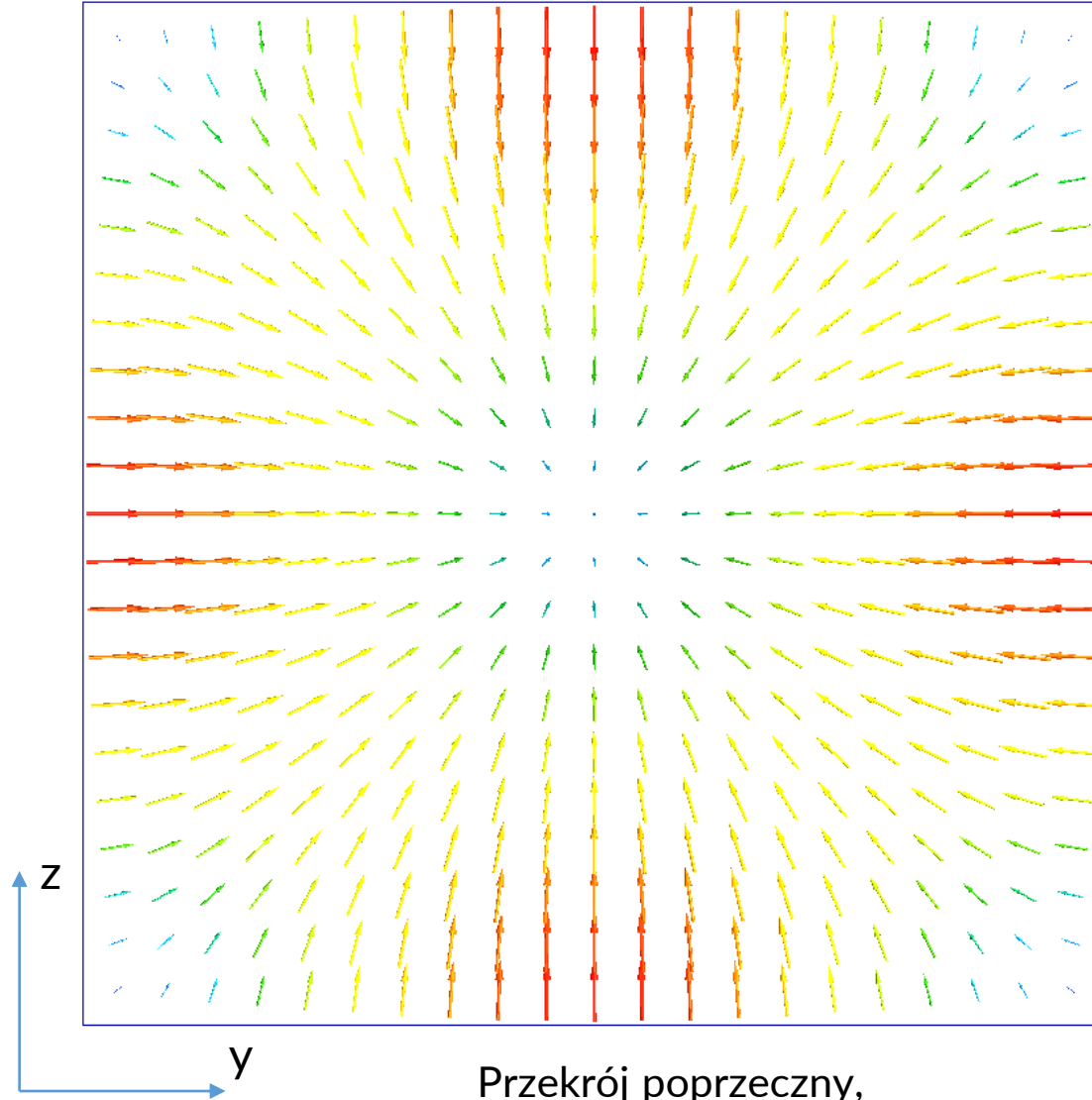
Pole magnetyczne



Przekrój wzdłużny,
propagacja rodzaju
w kierunku: $+\vec{i}_x$

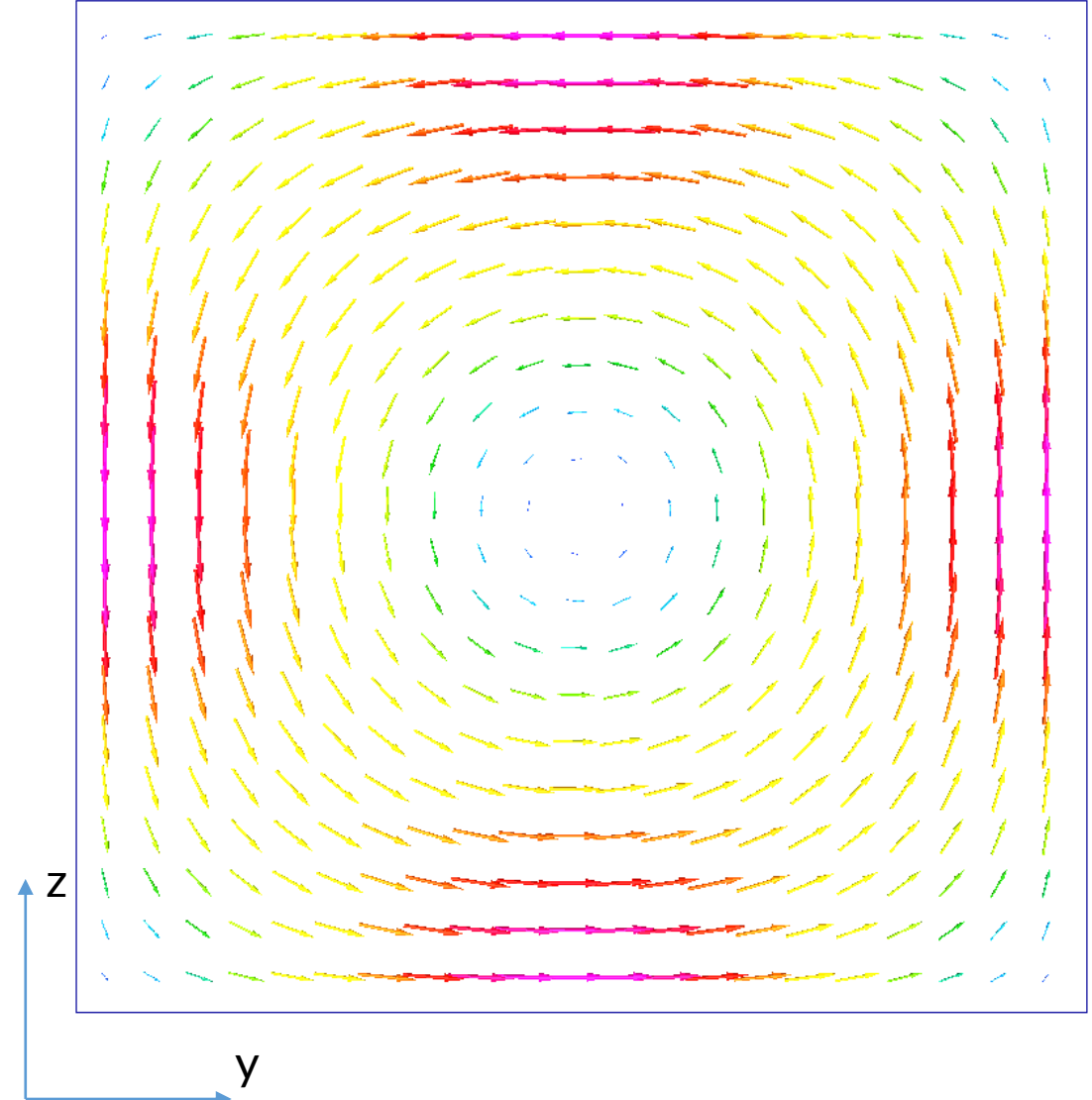
Pola elektryczne i magnetyczne rodzaju TM_{11} w falowodzie kwadratowym o boku a .

Pole elektryczne



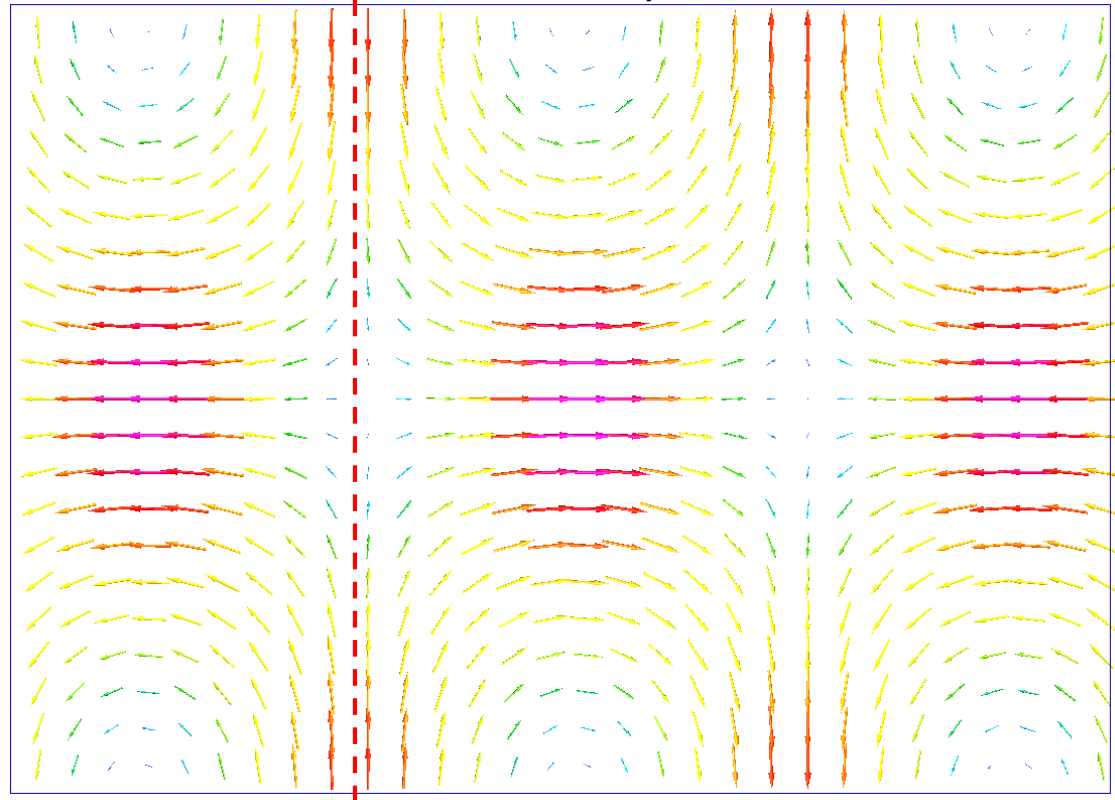
Przekrój poprzeczny,
propagacja rodzaju
w kierunku: $+\vec{i}_x$

Pole magnetyczne

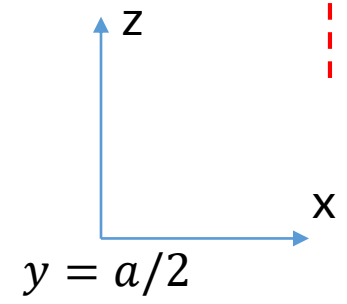
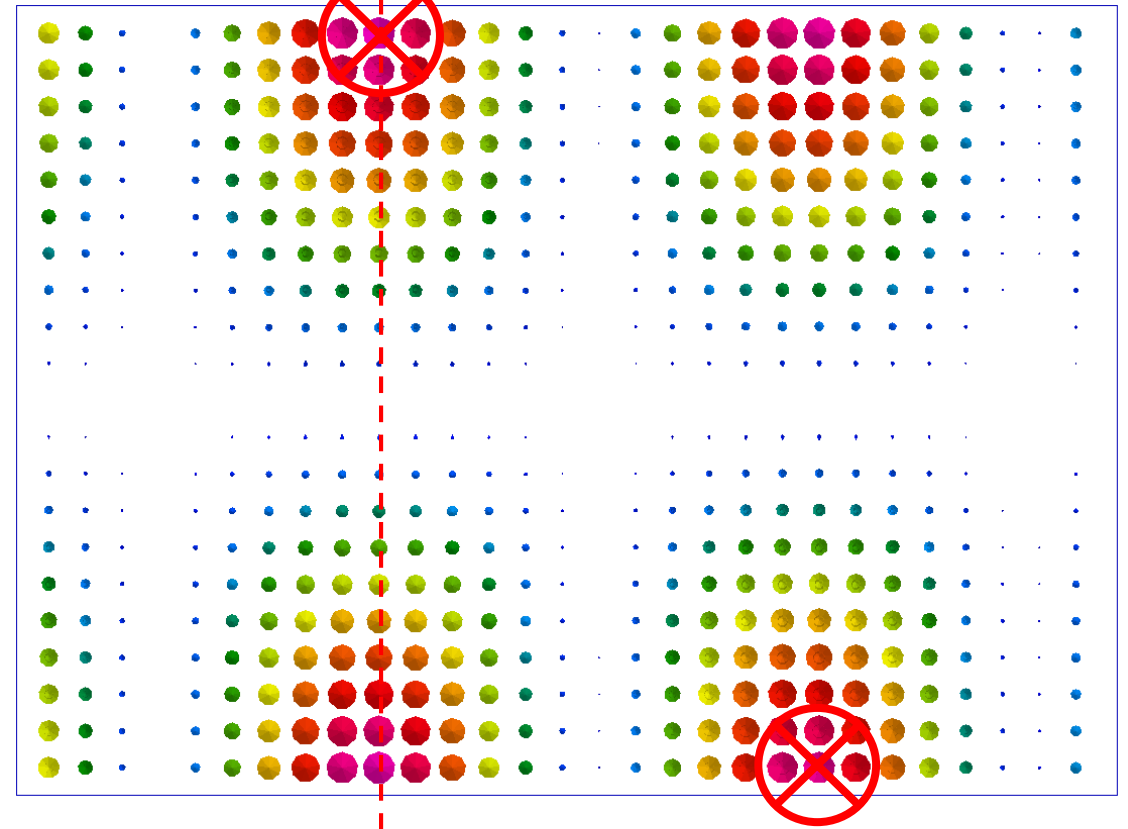


Pola elektryczne i magnetyczne rodzaju TM_{11} w falowodzie kwadratowym o boku a .

Pole elektryczne



Pole magnetyczne



Przekrój wzdłużny,
propagacja rodzaju
w kierunku: $+\vec{i}_x$

Zadanie

Zadanie 3.33

Rezonator prostokątny wypełniony powietrzem ma boki: $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $l = 30$ cm. Obliczyć rezonansowe długości fali oraz częstotliwości rezonansowe dla następujących rodzajów: E_{110} , H_{101} , E_{111} , H_{111} , E_{210} , E_{120} , H_{211} .

Podstawowe właściwości rezonatora prostokątnego o rozmiarach a, b, l .

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_y = \frac{n\pi}{b} \quad \beta_z = \frac{p\pi}{l}$$

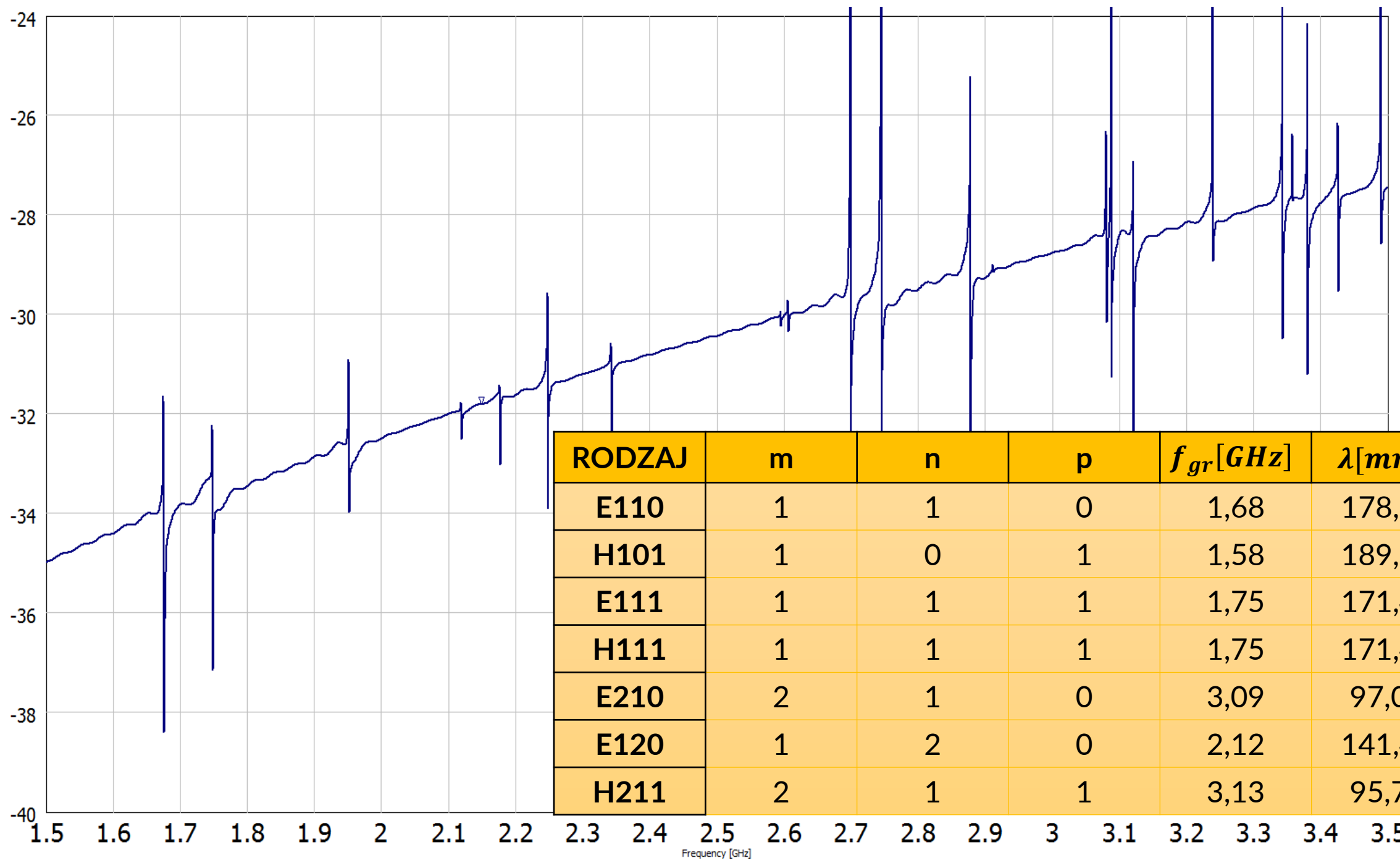
$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{\omega}{\frac{c}{\sqrt{\mu_w \epsilon_w}}} \right)^2$$

Częstotliwość
rezonansowa

$$f_{g,m,n,p} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}{\mu \epsilon}}$$

Rezonansowa
długość fali

$$\lambda_{g,m,n} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$



Zadanie 3.30

Dany jest rezonator wnekowy sześcienny o ściankach PEC, o boku 10 cm, wypełniony powietrzem. Obliczyć częstotliwość rezonansową rodzaju podstawowego i wykonać szkice rozkładu pola w chwilach $t = T/8, T/4, 3T/8, T/2$, gdzie T - okres drgań. Narysować rozkłady prądów dla $t = 3T/4$ oraz ładunku dla $t = T/4, T/2$. Wiadomo, że pole elektryczne osiąga wartość maksymalną równą 1 V/m w chwili $t=0$.

Obliczyć energię maksymalną i średnią za okres.

Uwaga: ten rodzaj możemy nazwać E_{110} albo H_{101} albo H_{011} . Jakim orientacjom układu współrzędnych kartezjańskich odpowiadają te nazwy?

Zadanie 3.31

W rezonatorze z zadania 3.30 uwzględniamy straty ośrodków. Obliczyć dobroć w następujących przypadkach:

- ścianki pozostają PEC, ale wypełnienie ma $\text{tg}\delta = 0.1$,
- ścianki wykonane są z miedzi (konduktywność 5.8×10^7 S/m), a wypełnienie pozostaje bezstratne,
- ścianki wykonane są z miedzi (konduktywność 5.8×10^7 S/m), a wypełnienie ma $\text{tg}\delta=0.1$.

Podstawowe właściwości rezonatora prostokątnego o rozmiarach a, b, l .

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_y = \frac{n\pi}{b} \quad \beta_z = \frac{p\pi}{l}$$

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\mu_w \epsilon_w} c} \right)^2$$

Częstotliwość
rezonansowa

$$f_{g,m,n,p} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}{\mu \epsilon}}$$

Rezonansowa
długość fali

$$\lambda_{g,m,n} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

Dobroć rezonatora
to stosunek średniej energii gromadzonej
do średniej energii traconej w
rezonatorze

$$Q = 2\pi \frac{W_{avg}}{W_{loss}} = 2\pi \frac{W_{avg}}{P_{loss} T} = \omega \frac{W_{avg}}{P_{loss}}$$

Energia gromadzona

$$W_{avg} [J] = \iiint_V w_{avg} \left[\frac{J}{m^3} \right] dv = \iiint_V (w_{e,avg} + w_{m,avg}) dv$$

Moc tracona

$$P_{loss} [W] = \iiint_V p_{loss,avg} dv = \iiint_V (p_{e,loss,avg} + p_{m,loss,avg}) dv$$

Chwilowa wartość objętościowej gęstość energii traconej w polu...

elektrycznym

$$p_{loss,e}(t) = \vec{E}(t) \cdot \vec{J}(t) \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$p_{loss,e}(t) = \sigma \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t) \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

magnetycznym

$$p_{loss,m}(t) = \vec{H}(t) \cdot \vec{M}(t) \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$p_{loss,m}(t) = \sigma_m \vec{H}(t) \cdot \vec{H}(t) \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Przypadek
ogólny

Ośrodek
izotropowy

Średnia za okres wartość objętościowej gęstość energii traconej w polu...

elektrycznym

$$p_{loss,e,avg} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p_{loss,e}(t) dt \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$p_{loss,e,avg} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{J}} \right\} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

magnetycznym

$$p_{loss,m,avg} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p_{loss,m}(t) dt \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$p_{loss,m,avg} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\vec{H}}^* \cdot \underline{\vec{M}} \right\} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Przypadek
ogólny