WIELOKRYTERIALNA OPTYMALIZACJA LINIOWA I DYSKRETNA
modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji

Włodzimierz Ogryczak
Uniwersytet Warszawski
Instytut Informatyki

Warszawa 1997

Pusta strona

Spis treści

Przedmowa

Praktyczne problemy decyzyjne są na tyle złożone, że nie mogą być modelowane przy użyciu tradycyjnych technik programowania matematycznego z jedną skalarną funkcją celu. Powoduje to rosnące zainteresowanie wielokryterialnym programowaniem matematycznym (optymalizacją wektorową). Wiele różnych metod analizy wielokryterialnych problemów decyzyjnych zostało zaproponowanych w literaturze. Dokonany w ciągu ostatnich lat postęp w technologii komputerowej umożliwia implementację nawet bardzo złożonych technik optymalizacji wielokryterialnej, wymagających rozwiązywania wielu pomocniczych zadań jednokryterialnych. Co więcej, systemy komputerowe o dużej mocy obliczeniowej stały się narzędziami bezpośrednio używanymi przez decydentów. Dlatego w ostatnich latach zarysował się w badaniach operacyjnych trend rozwoju szerzej pojmowanej analizy decyzji (por. Geoffrion, 1992). W połączeniu z nowoczesnymi metodami informatyki prowadzi to do rozwoju interaktywnych systemów wspomagania decyzji, gdzie matematyczne modele i metody jedynie wspierają proces analizy decyzji dokonywanej przez decydenta. Techniki optymalizacji stanowią jądro obliczeniowe tych systemów. Są one jednak tylko częścią całego systemu informatycznego i zazwyczaj nie są bezpośrednio widoczne dla decydenta.

Niniejsza praca dotyczy analizy problemów wielokryterialnego programowania liniowego i dyskretnego. Większość wielokryterialnych problemów decyzyjnych, a w szczególności decyzyjnych problemów zarządzania, może być sformułowana w postaci odpowiednich zagadnień programowania liniowego i dyskretnego. Ponadto wiele przedstawionych tu wyników dotyczy dowolnych zadań optymalizacji wielokryterialnej, a ograniczenie do zadań liniowych i dyskretnych jest spowodowane jedynie przeprowadzoną analizą możliwości efektywnej implementacji odpowiednich metod i algorytmów. Zgodnie z bieżącym trendem rozwoju badań operacyjnych, optymalizacja wielokryterialna jest tu traktowana jako narzędzie stosowane w szerzej pojmowanym procesie rozwiązywania problemu decyzyjnego, czyli jako technika do wykorzystania w systemie wspomagania decyzji. Dlatego w pracy skoncentrowano się na interaktywnych technikach optymalizacji wielokryterialnej, pozwalających modelować różne preferencje decydenta. Co więcej, zajęto się otwartymi technikami interaktywnymi, nie narzucającymi decydentowi żadnego sztywnego scenariusza analizy problemu decyzyjnego i dopuszczającymi możliwość modyfikacji jego preferencji w trakcie analizy, w wyniku poznawania specyfiki problemu decyzyjnego (Wierzbicki, 1993). Dlatego też praca ta jest poświęcona analizie różnych technik interaktywnych z punktu widzenia reprezentowanych przez nie modeli preferencji i ich przydatności w praktycznych systemach wspomagania decyzji.

W rozdziale 1 zdefiniowane są rozważane problemy wielokryterialne i wprowadzane podstawowe pojęcia wykorzystywane w tej pracy. Najważniejszym z nich jest racjonalna relacja preferencji. Rozwiązania efektywne są zdefiniowane jako elementy minimalne dla różnych racjonalnych relacji preferencji. Techniki interaktywne analizy problemów wielokryterialnych są definiowane przez parametryczne racjonalne relacje preferencji (parametryczne skalaryzacje). Wiele twierdzeń zawartych w tym rozdziale dotyczy znanych faktów z teorii programowania wielokryterialnego, jednakże są one dowodzone ze względu na odmienne sformułowania oparte na pojęciu racjonalnej relacji preferencji.

Rozdział 2 dotyczy programowania celowego, które jest najpowszechniej stosowaną techniką analizy wielokryterialnych problemów decyzyjnych (White, 1990). Jest to historycznie najstarsza technika używająca poziomów aspiracji jako parametrów sterujących. Najczęściej wykorzystywanym modelem programowania celowego jest leksykograficzne liniowe programowanie celowe, pozwalające na określanie hierarchii priorytetów poszczególnych poziomów aspiracji. Najważniejszym wynikiem zawartym w tym rozdziale jest symetryczna teoria dualności dla liniowych leksykograficznych zadań programowania celowego (podrozdział 2.2). W prezentowanej teorii zadanie dualne do zadania programowania celowego jest zadaniem programowania celowego i zachowane są wszystkie podstawowe zależności teorii dualności programowania liniowego, łącznie z własnością punktu siodłowego. Teoria ta pozwala na wyprowadzenie poprawnego dualnego algorytmu rozwiązywania leksykograficznych zadań liniowego programowania celowego (podrozdział 2.3). W podrozdziale 2.4 pokazano niezgodność modelu preferencji programowania celowego z modelem racjonalnych relacji preferencji i wynikające z tego konsekwencje.

Rozdział 3 jest poświęcony metodom punktu referencyjnego (Wierzbicki, 1977; 1982). W pierwszym podrozdziale sformułowano w terminach relacji preferencji tzw. quasi–zadowalający model procesu decyzyjnego, leżący u podstaw metod punktu referencyjnego. Pozwala to wykazać, że metody punktu referencyjnego, używając podobnie jak programowanie celowe poziomów aspiracji jako głównych parametrów sterujących, zachowują zgodność z modelem racjonalnych relacji preferencji. W podrozdziale 3.2 zaprezentowano system DINAS dla analizy wielokryterialnych zagadnień transportowo–lokalizacyjnych. System ten stanowi pierwszą implementację metod punktu referencyjnego do wielokryterialnych zadań programowania dyskretnego. Kolejne dwa podrozdziały wprowadzają metody punktu referencyjnego (odpowiednio standardową i przedziałową) wykorzystujące techniki programowania celowego. Umożliwia to dokładniejsze porównanie metod punktu referencyjnego z programowaniem celowym. Co istotniejsze, pozwala to na wprowadzenie hierarchii priorytetów poziomów aspiracji do metod punktu referencyjnego i na ściślejszą realizację quasi–zadowalającego modelu procesu decyzyjnego.

Oparcie pojęcia rozwiązania zadania wielokryterialnego na pojęciu racjonalnej relacji preferencji pozwala na rozważanie rozwiązań zgodnych z pewnymi dodatkowymi własnościami relacji preferencji. W rozdziale 4 omówione są modele preferencji uwzględniające elementy równości kryteriów. Rozwinięta została teoria symetrycznie efektywnych i wyrównująco efektywnych rozwiązań zagadnień wielokryterialnych, jako rozwiązań minimalnych w sensie relacji preferencji anonimowo racjonalnych i odpowiednio wyrównująco racjonalnych. Wyprowadzone zostały też odpowiednie wersje metod punktu referencyjnego przyjmujące postać interaktywnych technik referencyjnej dystrybucji ocen. Ponadto w podrozdziale 4.3 pokazano, jak koncepcja wyrównująco racjonalnej relacji preferencji może być wykorzystana do konstrukcji metody punktu referencyjnego ściśle implementującej quasi–zadowalający model procesu decyzyjnego dla standardowych zadań optymalizacji wielokryterialnej.

Niniejsza praca stanowi podsumowanie najważniejszych wyników uzyskanych przez autora w czasie kilku lat prac badawczych nad optymalizacją wielokryterialną i jej wykorzystaniem w systemach wspomagania decyzji. Badania te były w większości prowadzone w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego. Część wyników powstała jednak w trakcie staży autora w College of Business, Marshall University (Huntington, USA) oraz w Service de Mathématiques de la Gestion, Université Libre de Bruxelles (Bruksela, Belgia). Ponadto prace nad metodologią i implementacją omawianego w podrozdziale 3.2 systemu DINAS były częściowo finansowane przez International Institute for Applied Systems Analysis (Laxenburg, Austria) w ramach projektu Methodology of Decision Analysis.

Pusta strona

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Wielokryterialne programowanie liniowe dyskretne

Efektywne zarządzanie wymaga częstego podejmowania złożonych decyzji, czyli rozwiązywania problemów decyzyjnych. Może to być na przykład problem ustalenia wielkości produkcji poszczególnych asortymentów towarów, rozdzielenia środków na poszczególne inwestycje itp. Problemy decyzyjne opisuje się matematycznie, wprowadzając *zmienne decyzyjne*. Na przykład, planując działalność zakładu wytwarzającego n różnych produktów, określamy zmienną x_j jako wielkość produkcji j–tego asortymentu ($j = 1, 2, \ldots, n$). Podobnie, rozważając rozdział zasobów na n inwestycji, możemy określić zmienną decyzyjną x_j jako kwotę przeznaczoną na realizację j–tej inwestycji ($j = 1, 2, \ldots, n$). Ogólnie, możemy wyróżnić *przestrzeń decyzji* X, której elementy jednoznacznie opisują podjęte decyzje. Nasze rozważania ograniczamy tu do przypadku skończenie wymiarowych rzeczywistych przestrzeni decyzji $X = R^n$. Oczywiście, zmienne decyzyjne nie mogą przyjmować wartości dowolnych. W praktycznych problemach występują pewne ograniczenia na zmienne decyzyjne, wynikające na przykład z określonych możliwości technologicznych i surowcowych w przypadku produkcji czy też z określonego budżetu w przypadku rozdziału środków. Ogólnie możemy powiedzieć, że wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x}$ powinien należeć do pewnego ustalonego zbioru decyzji dopuszczalnych $Q \subset X$. Zbiór Q będziemy dalej nazywać *zbiorem dopuszczalnym*, a należące do niego wektory zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in Q$ *wektorami (rozwiązaniami) dopuszczalnymi*.

W problemach decyzyjnych występują pewne miary jakości podejmowanych decyzji. Matematycznie miary jakości decyzji wyraża się za pomocą funkcji $f_i : X \to R$, nazywanych *funkcjami oceny*. Przykładem funkcji oceny może być funkcja wyrażająca zysk, jaki przyniesie dany profil produkcji (dany wektor $\mathbf{x}$) bądź też wysokość kosztów związanych z daną produkcją. Istnieje zatem przekształcenie (funkcja wektorowa) $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ przestrzeni decyzji X w *przestrzeń ocen* $Y = R^m$. W naturalny sposób pojawia się tu problem wyboru najlepszej decyzji. Zakładamy, że wybór ten bierze pod uwagę tylko odpowiednie wektory ocen i decyzje o jednakowych wektorach ocen są jednakowo dobre. Tym samym problem wyznaczenia najlepszej decyzji możemy ograniczyć do zagadnienia wyboru najlepszego wektora ocen w *zbiorze osiągalnych wektorów ocen* $A = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q\}$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że dla każdej indywidualnej oceny f_i mniejsza wartość oceny oznacza lepszą ocenę decyzji.

Z każdym problemem decyzyjnym związany jest pewien model preferencji. Model taki ustala, że dla pewnych par wektorów ocen określone jest, który z nich jest lepszy. Wyrażane jest to za pomocą *relacji ścisłej preferencji*

$$\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \text{ jest lepszy niż } \mathbf{y}''$$

Podobnie, dla pewnych par wektorów ocen można stwierdzić, że są one jednakowo dobre. Wyraża się to za pomocą *relacji indyferencji*

$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \text{ jest tak samo dobry jak } \mathbf{y}''$$

Dla pewnych par wektorów ocen można stwierdzić jedynie, że jeden z nich jest nie gorszy od drugiego. Zapisuje się to za pomocą *relacji słabej preferencji*

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \text{ jest nie jest gorszy niż } \mathbf{y}''$$

W ogólnym przypadku model preferencji może nie być spójny (zupełny). To znaczy, mogą istnieć pary nieporównywalnych wektorów ocen, dla których nie zachodzi żadna z relacji $\prec$, $\preceq$, $\cong$.

Model preferencji jest kompletnie określony przez relację słabej preferencji $\preceq$ (por. Roy, 1990; Vincke, 1992). Relacje ścisłej preferencji i indyferencji są indukowane przez relację słabej preferencji według następujących wzorów

$$\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \not\preceq \mathbf{y}') \tag{1.1}$$

$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \preceq \mathbf{y}') \tag{1.2}$$

Dlatego w dalszych rozważaniach będziemy utożsamiać model preferencji z relacją (słabej) preferencji $\preceq$. To znaczy, przez relację preferencji $\preceq$ będziemy rozumieć układ relacji $\preceq$, $\prec$ i $\cong$ spełniających warunki (1.1)–(1.2).

Nasze rozważania ograniczamy do tzw. racjonalnych modeli preferencji, w których zakładamy, że relacja preferencji jest:

- *zwrotna*
$$\mathbf{y} \preceq \mathbf{y} \quad \text{dla } \mathbf{y} \in Y \tag{1.3}$$
- *przechodnia (tranzytywna)*
$$(\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \preceq \mathbf{y}''') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''' \quad \text{dla } \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{y}''' \in Y \tag{1.4}$$
- oraz *ściśle monotoniczna*
$$\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i \prec \mathbf{y} \quad \text{dla } \mathbf{y} \in Y, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{1.5}$$

  gdzie $\mathbf{e}_i$ oznacza i–ty wektor jednostkowy w przestrzeni ocen Y.

Zauważmy, że relacja indyferencji dla dowolnej zwrotnej i przechodniej relacji preferencji spełnia warunki zwrotności i przechodniości oraz symetrii

$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}'' \cong \mathbf{y}'$$

czyli jest relacją równoważności.

Definicja 1.1 *Relację preferencji* $\preceq$ *nazywamy racjonalną relacją preferencji, jeżeli spełnione są warunki (1.3)–(1.5).*

Racjonalna relacja preferencji jest ściśle monotonicznym preporządkiem (częściowym). W ogólnym przypadku może ona nie być preporządkiem liniowym, ponieważ może nie spełniać warunku *spójności (zupełności)*

$$\text{dla dowolnych} \quad \mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y, \qquad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \text{lub} \quad \mathbf{y}'' \preceq \mathbf{y}' \tag{1.6}$$

Dopuszczenie niespójności relacji preferencji może być dyskusyjne. Gdy relacja preferencji opisuje preferencje fizycznego decydenta, nieporównywalność pewnych wektorów ocen jest raczej związana z niedostateczną znajomością problemu decyzyjnego i można argumentować, że przy idealnej znajomości problemu decyzyjnego wszystkie wektory ocen są porównywalne. Dlatego wiele podejść do modelowania problemów decyzyjnych zakłada spójność relacji preferencji (por. Sawaragi i inni, 1985). Matematycznie jest to zwykle formalizowane przez przyjęcie relacji ścisłej preferencji $\prec$ jako podstawowej relacji definiującej model preferencji i określenie relacji indyferencji oraz słabej preferencji za pomocą wzorów

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \not\prec \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \not\prec \mathbf{y}') \\ \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \text{lub} \quad \mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'') \end{array}$$

W dalszych rozważaniach dopuszczamy możliwość niespójności racjonalnej relacji preferencji, ale nie traktujemy braku spójności jako założenia istotnego.

W przypadku spójnej racjonalnej relacji preferencji rozwiązanie problemu decyzyjnego polega na wyznaczeniu dopuszczalnego wektora zmiennych decyzyjnych z najmniejszym (w sensie danej relacji) wektorem ocen, czyli wektora $\mathbf{x}^0 \in Q$ takiego, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in A$. W ogólnym przypadku, dopuszczającym niespójność racjonalnej relacji preferencji, rozwiązanie problemu decyzyjnego wymaga wyznaczenia dopuszczalnego wektora zmiennych decyzyjnych z minimalnym (w sensie danej relacji) wektorem ocen, czyli wektora $\mathbf{x}^0 \in Q$ takiego, że nie istnieje $\mathbf{y} \in A$ spełniający zależność $\mathbf{y} \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zauważmy, że w przypadku niespójnej relacji preferencji różne minimalne wektory ocen mogą być nieporównywalne.

Tradycyjne programowanie matematyczne wymaga wprowadzenia pojedynczej skalarnej funkcji celu $v : Y \to R$ wartościującej poszczególne wektory ocen $\mathbf{y}$ i — co za tym idzie — wektory decyzji $\mathbf{x}$. Rozwiązanie problemu decyzyjnego jest wtedy sprowadzane do wyznaczenia rozwiązania optymalnego zadania

$$\min \{ v(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q \}$$

Podejście to oznacza przyjęcie założenia, że relacja preferencji może być opisana za pomocą *funkcji użyteczności* v (Fishburn, 1970; Keeney i Raiffa, 1976) spełniającej zależności

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad v(\mathbf{y}') \leq v(\mathbf{y}'')$$

Żeby to było możliwe, relacja preferencji $\preceq$ musi być spójna i spełniać pewne dodatkowe wymagania. W szczególności przy naturalnym założeniu, że funkcja użyteczności jest ciągła, racjonalna relacja preferencji musi spełniać warunek

$$\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \prec \mathbf{y}''' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'' \cong t\mathbf{y}' + (1-t)\mathbf{y}''' \quad \text{dla pewnego } t \in (0,1)$$

Warunku tego nie spełnia na przykład relacja porządku leksykograficznego. Zauważmy, że zasadnicza trudność w rozwiązywaniu wielokryterialnych problemów decyzyjnych wynika z niemożności ustalenia a priori pojedynczego zagregowanego wskaźnika jakości, podczas gdy funkcja użyteczności jest właśnie takim wskaźnikiem. Trudności ze stosowaniem modeli funkcji użyteczności powodują rosnące zainteresowanie wielokryterialnym programowaniem matematycznym (optymalizacją wektorową) nie wykorzystującym modeli funkcji użyteczności. Znalazło to odbicie w licznych monografiach i artykułach przeglądowych (Nykowski, 1977; Stadler, 1979; Hwang i Masud, 1979; Krawczyk, 1980; Ameljańczyk, 1980; Konarzewska–Gubała, 1980; Rietveld, 1980; Hwang i Yoon, 1981; Podinowski i Nogin, 1982; Chankong i Haimes, 1983; Słowiński, 1984; Yu, 1985; Sawaragi i inni, 1985; Steuer, 1986; Galas i inni, 1987; Luc, 1989; Bogetoft i Pruzan, 1991; Korhonen, 1992; Ringuest, 1992; Stewart, 1992; Vincke, 1992; Kaliszewski, 1994; Steuer i inni, 1996).

Model wielokryterialnego programowania matematycznego pozwala rozpatrywać oryginalny układ funkcji oceny f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jako funkcje celu wektorowego zadania optymalizacji

$$\min \{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Najczęściej stosowanym działem programowania matematycznego jest programowanie liniowe (PL), gdzie optymalizowana jest liniowa funkcja celu na zbiorze dopuszczalnym określonym układem równań i nierówności liniowych. Podobnie modele liniowe dominują zastosowania wielokryterialnego programowania matematycznego (por. White, 1990). W wielokryterialnym zadaniu programowania liniowego (WPL) zbiór dopuszczalny Q jest zbiorem rozwiązań układu ograniczeń

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \quad \Diamond_k \quad b_k \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, l$$

gdzie $\Diamond_k$ oznacza jedną z relacji $\leq$, $=$ lub $\geq$. Funkcje oceny mają postać

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Współczynniki c_{ij}, a_{kj} oraz b_i stanowią dane zadania. Współczynniki funkcji oceny c_{ij} tworzą macierz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$. Podobnie współczynniki a_{kj} tworzą macierz $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\ldots,l; j=1,\ldots,n}$, a współczynniki b_k wektor (kolumnę) prawych stron $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_l)^T$. Pozwala to na uproszczony macierzowy zapis zadania WPL w postaci

$$\min \{\mathbf{Cx} \ : \ \mathbf{Ax} \overset{\geq}{=} \mathbf{b}\} \quad \text{lub} \quad \min \{\mathbf{Cx} \ : \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \overset{\geq}{=} \mathbf{0}\}$$

gdzie $\geqq$ oznacza nierówności $\geq$ na wszystkich współrzędnych odpowiednich wektorów. Dokładniej, stosujemy następujący zapis nierówności wektorowych w przestrzeni R^n

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{x}' \leqq \mathbf{x}'' & \Leftrightarrow & x'_j \leq x''_j & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \\ \mathbf{x}' \leq \mathbf{x}'' & \Leftrightarrow & \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}'' & \text{i} \quad \mathbf{x}' \leqq \mathbf{x}'' \\ \mathbf{x}' < \mathbf{x}'' & \Leftrightarrow & x'_j < x''_j & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Modele programowania liniowego mają bardzo rozległe zastosowania. W wielu przypadkach są one jednak modelami przybliżonymi, ponieważ nie uwzględniają pewnych zależności lub zbytnio je upraszczają. Dodatkowe możliwości daje programowanie liniowe dyskretne (PLD), gdzie wprowadza się do rozważań zmienne decyzyjne przyjmujące jedynie wartości ze zbioru liczb całkowitych (oznaczanego dalej przez Z). Najprostszym zastosowaniem tych zmiennych jest wyrażanie ilości dóbr niepodzielnych, takich jak pojazdy, fabryki itp. Co więcej, całkowitoliczbowe (dyskretne) zmienne decyzyjne dają możliwość prostego zapisu szeregu zależności logicznych i kombinatorycznych (por. Williams, 1993). Dotyczy to w szczególności sytuacji, gdzie trzeba dokonać wyboru jednego z kilku wariantów. Techniki programowania liniowego rozszerzone o dyskretne zmienne decyzyjne pozwalają modelować większość problemów decyzyjnych wywodzących się z zarządzania i wielu innych dziedzin. Dlatego nasze rozważania dotyczące wielokryterialnego programowania matematycznego w zastosowaniach do rozwiązywania problemów decyzyjnych koncentrujemy na wielokryterialnych zadaniach programowania liniowego dyskretnego (WPLD), czyli zadaniach WPL, gdzie pewna część zmiennych decyzyjnych (w szczególności wszystkie) przyjmuje tylko wartości całkowite. Zdania WPL będziemy traktować jako szczególny (prostszy) przypadek zadań WPLD. Wiele przedstawionych w tej pracy wyników może jednak mieć zastosowanie do innych klas zadań wielokryterialnych.

Przykład 1.1. Rozważmy problem decyzyjny polegający na wyborze inicjatyw gospodarczych, które bedą sfinansowane w ramach dostępnego budżetu b. Rozpatrujemy n możliwych inicjatyw, dla których są znane wysokości nakładów k_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), wielkości przewidywanych dochodów d_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) oraz wielkości zatrudnienia p_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Jesteśmy zainteresowani takim wykorzystaniem budżetu, aby maksymalizować dochód i zatrudnienie.

W rozważanym problemie decyzje można opisać przez zmienne binarne x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) równe 1, gdy ma być wybrana j–ta inicjatywa, a 0 w przeciwnym przypadku. Zmienne decyzyjne x_j muszą spełniać ograniczenie $\sum_{j=1}^n k_j x_j \leq b$. Przewidywany dochód wyraża się wzorem $\sum_{j=1}^n d_j x_j$, a wielkość zatrudnienia wzorem $\sum_{j=1}^n p_j x_j$. Rozważany problem decyzyjny możemy zatem zapisać w postaci następującego zadania WPLD z dwoma funkcjami oceny

$$\min \{(-\sum_{j=1}^n d_j x_j, -\sum_{j=1}^n p_j x_j) \; : \; \sum_{j=1}^n k_j x_j \leq b, \quad x_j \in \{0, 1\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n\}$$

$\square$

1.2 Rozwiązania efektywne

Rozpatrzmy problem decyzyjny zdefiniowany jako zagadnienie wielokryterialnego programowania matematycznego z m skalarnymi funkcjami oceny

$$\min \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.7}$$

gdzie

$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$	jest funkcją (wektorową) przekształcającą przestrzeń decyzji (realizacji) $X = R^n$ w przestrzeń ocen $Y = R^m$; poszczególne współrzędne f_i reprezentują skalarne funkcje oceny; $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ jest zbiorem indeksów ocen,
$Q \subset X$	oznacza zbiór dopuszczalny,
$\mathbf{x} \in X$	oznacza wektor zmiennych decyzyjnych.

Funkcja $\mathbf{f}$ przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in Q$ *wektor ocen* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, który mierzy jakość decyzji $\mathbf{x}$ z punktu widzenia ustalonego układu funkcji oceny $f_1, \ldots, f_m$. Obraz zbioru dopuszczalnego Q dla funkcji $\mathbf{f}$ stanowi zbiór osiągalnych wektorów ocen

$$A = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.8}$$

Definicja 1.2 *Zadanie wielokryterialne (1.7) nazywamy regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jednokryterialne zadania*

$$\min \{f_i(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in Q\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.9}$$

mają rozwiązania optymalne.

Nawet nie znając relacji preferencji (wiedząc jedynie, że jest to racjonalna relacja preferencji), możemy stwierdzić, że pewne wektory ocen nie mogą być minimalne w sensie danej relacji. Wynika to z faktu, że pewne wektory ocen są gorsze od innych dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji. Można to sformalizować za pomocą relacji *racjonalnej dominacji*. Ponieważ model racjonalnych relacji preferencji jest najogólniejszym modelem preferencji rozważanym w tej pracy, to poza przypadkami mogącymi prowadzić do niejasności, relację racjonalnej dominacji będziemy nazywać po prostu *relacją dominacji*.

Definicja 1.3 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *(racjonalnie) dominuje* $\mathbf{y}'' \in Y$*, lub* $\mathbf{y}''$ *jest (racjonalnie) dominowany przez* $\mathbf{y}'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}''$ *dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji.*

Relację racjonalnej dominacji będziemy oznaczać symbolem $\prec_r$. Dokładniej, zapis $\mathbf{y}' \prec_r \mathbf{y}''$ oznacza, że wektor ocen $\mathbf{y}' \in Y$ racjonalnie dominuje $\mathbf{y}'' \in Y$. Analogicznie do relacji racjonalnej dominacji możemy również zdefiniować relacje racjonalnej indyferencji $\cong_r$ i słabej dominacji $\preceq_r$.

Definicja 1.4 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *jest racjonalnie indyferentny z* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}''$ *dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji.*

Definicja 1.5 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *(racjonalnie) słabo dominuje* $\mathbf{y}'' \in Y$ *lub* $\mathbf{y}''$ *jest (racjonalnie) słabo dominowany przez* $\mathbf{y}'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$ *dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji.*

Zauważmy, że relacje racjonalnej dominacji $\prec_r$, indyferencji $\cong_r$ i słabej dominacji $\preceq_r$ spełniają warunki (1.1)–(1.2), czyli stanowią relację preferencji $\preceq_r$. Co więcej, jak łatwo sprawdzić, spełnia ona warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5), czyli jest racjonalną relacją preferencji. Relacja dominacji $\preceq_r$ jest najogólniejszą racjonalną relacją preferencji i każda racjonalna relacja preferencji $\preceq$ jest z nią zgodna w tym sensie, że

$$\mathbf{y}' \preceq_r \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$$

Relacja racjonalnej dominacji $\preceq_r$ może być wyrażona za pomocą nierówności wektorowej $\leqq$. Zauważmy, że relacja $\leqq$ jest zwrotna i przechodnia. Ponadto prawdziwe są dla niej zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \leq \mathbf{y}'' \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \not\leqq \mathbf{y}') \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y}'' \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \leqq \mathbf{y}') \end{aligned}$$

Zatem relacja $\leqq$ jest relacją preferencji z relacjami ścisłej preferencji i indyferencji określonymi odpowiednio jako $\leq$ i $=$.

Twierdzenie 1.1 *Dla dowolnych wektorów ocen* $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$

$$\mathbf{y}' \preceq_r \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}''$$

Dowód. Zauważmy, że relacja preferencji $\preceq$ zdefiniowana jako

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}''$$

jest racjonalną relacją preferencji. Zatem bezpośrednio z definicji relacji dominacji wynika, że

$$\mathbf{y}' \preceq_r \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}''$$

Dla udowodnienia odwrotnej implikacji załóżmy, że $\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}''$. Jeżeli $\mathbf{y}' = \mathbf{y}''$, to na mocy zwrotności $\mathbf{y}' \preceq_r \mathbf{y}''$. Pozostaje zatem przypadek, gdy $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}''$. Jednakże, korzystając ze ścisłej monotoniczności i przechodniości relacji $\preceq_r$ otrzymujemy implikację

$$\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \prec_r \mathbf{y}''$$

Zatem ostatecznie

$$\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq_r \mathbf{y}''$$

■

Wniosek 1.1 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}''$.

Wniosek 1.2 *Dla każdej racjonalnej relacji preferencji* $\preceq$ *prawdziwe są następujące implikacje*

$$\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$$

$$\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \prec \mathbf{y}''$$

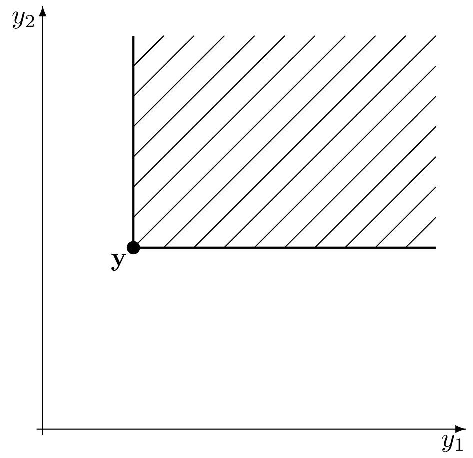
Relacja dominacji $\prec_d$ może być ilustrowana za pomocą tzw. *struktury dominacji* (Yu, 1974; Sawaragi i inni, 1985), czyli przekształcenia przyporządkowującego wektorom ocen $\mathbf{y} \in Y$ zbiór dominowania $D(\mathbf{y})$ określony jako zbiór kierunków prowadzących z $\mathbf{y}$ do wektorów dominowanych przez $\mathbf{y}$, rozszerzony o wektor zerowowy

$$D(\mathbf{y}) = \{\mathbf{d} \in Y \ : \ \mathbf{y} \prec_d \mathbf{y} + \mathbf{d}\} \cup \{\mathbf{0}\} \tag{1.10}$$

Zgodnie z wnioskiem 1.1 struktura racjonalnej dominacji ma postać

$$D(\mathbf{y}) = \{\mathbf{d} \in Y \ : \ \mathbf{y} \leq \mathbf{y} + \mathbf{d}\} \cup \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{d} \in Y \ : \ \mathbf{d} \geqq \mathbf{0}\}$$

czyli jest stała (nie zależy od wektora ocen $\mathbf{y}$) i jest zawsze równa nieujemnemu orthantowi. Rysunek 1.1 przedstawia $D(\mathbf{y})$ zaczepiony w $\mathbf{y}$, czyli zbiór $\mathbf{y} + D(\mathbf{y})$.



Rysunek 1.1:
Rys. 1.1. Struktura racjonalnej dominacji w R^2

Relacja racjonalnej dominacji zazwyczaj nie spełnia warunku spójności (1.6) i dlatego nie generuje preporządku w zbiorze A (a jedynie częściowy preporządek). Dlatego może istnieć wiele wektorów ocen minimalnych w sensie relacji racjonalnej dominacji, z których żaden nie jest najmniejszy. To znaczy, na ogół nie istnieje wektor ocen dominujący wszystkie pozostałe. Zatem relacja dominacji nie pozwala na jednoznaczne określenie najlepszego wektora ocen. Umożliwia ona jedynie wyróżnienie zbioru *niezdominowanych* wektorów ocen A_N (elementy minimalne w sensie relacji $\leqq$) w odróżnieniu od zdominowanych wektorów ocen (pozostałe wektory ze zbioru A). Zdominowane wektory ocen odpowiadają oczywiście decyzjom nieoptymalnym, ponieważ są one gorsze od innych osiągalnych wektorów ocen w sensie każdej racjonalnej relacji preferencji.

Definicja 1.6 *Wektor ocen* $\mathbf{y} \in A$ *nazywamy (racjonalnie) niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje* $\mathbf{y}' \in A$ *taki, że* $\mathbf{y}' \prec_r \mathbf{y}$.

Bezpośrednio z definicji racjonalnej dominacji i wniosku 1.1 wynikają następujące charakterystyki niezdominowanych wektorów ocen.

Wniosek 1.3 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje racjonalna relacja preferencji* $\preceq$ *taka, że dla żadnego* $\mathbf{y} \in A$ *nie zachodzi* $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$.

Wniosek 1.4 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje* $\mathbf{y} \in A$ *taki, że* $\mathbf{y} \leq \mathbf{y}^0$.

Twierdzenie 1.2 *Jeżeli zbiór osiągalnych wektorów ocen* $A \neq \emptyset$ *jest domknięty i istnieje wektor* $\mathbf{y}^* \in Y$ *dominujący wszystkie osiągalne wektory ocen* $\mathbf{y} \in A$, *to istnieje niezdominowany wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$.

Dowód. Niech $\mathbf{y}' \in A$ będzie dowolnym osiągalnym wektorem ocen. Rozpatrzmy zbiór $A' = \{\mathbf{y} \in A \;:\; \sum_{i=1}^m y_i \leq \sum_{i=1}^m y'_i\}$. Zbiór A' jest zawarty w zbiorze

$$Y_0 = \{\mathbf{y} \in Y \;:\; y_i \geq y_i^* \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^m y_i \leq \sum_{i=1}^m y'_i\}$$

Zatem A' jest ograniczonym zbiorem domkniętym i zadanie $\min\,\{\sum_{i=1}^m y_i \;:\; \mathbf{y} \in A'\}$ ma rozwiązanie optymalne $\mathbf{y}^0 \in A'$. Co więcej, dla każdego $\mathbf{y} \in A$ prawdziwa jest nierówność $\sum_{i=1}^m y_i^0 \leq \sum_{i=1}^m y_i$, czyli $\mathbf{y}^0$ jest również rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\min\,\{\sum_{i=1}^m y_i \;:\; \mathbf{y} \in A\} \tag{1.11}$$

Zauważmy, że relacja preferencji definiowana przez minimalizację (1.11) wyraża się wzorem

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m y'_i \leq \sum_{i=1}^m y''_i$$

i jest racjonalną relacją preferencji. Zatem, zgodnie z wnioskiem 1.3, $\mathbf{y}^0$ jest niezdominowanym wektorem ocen. ■

Twierdzenie 1.3 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna racjonalna relacja preferencji* $\preceq$ *taka, że* $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ *dla wszystkich* $\mathbf{y} \in A$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnej racjonalnej relacji preferencji $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Wtedy na mocy wniosku 1.3 $\mathbf{y}^0$ jest niezdominowanym wektorem ocen.

Niech $\mathbf{y}^0 \in A$ będzie niezdominowanym wektorem ocen. Określmy relację

$$\mathbf{y}' \preceq_o \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,m} (y'_i - y_i^0) < \max_{i=1,\ldots,m} (y''_i - y_i^0) \quad \text{lub}$$
$$\left(\max_{i=1,\ldots,m} (y'_i - y_i^0) = \max_{i=1,\ldots,m} (y''_i - y_i^0) \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^m y'_i \leq \sum_{i=1}^m y''_i \right)$$

Dla tak określonej relacji $\mathbf{y}^0 \preceq_o \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Łatwo sprawdzić, że relacja $\preceq_o$ jest spójna, zwrotna i przechodnia. Ponadto, odpowiednia relacja $\prec_o$ przyjmuje postać

$$\mathbf{y}' \prec_o \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,m} (y'_i - y^0_i) < \max_{i=1,\ldots,m} (y''_i - y^0_i) \quad \text{lub}$$
$$\left(\max_{i=1,\ldots,m} (y'_i - y^0_i) = \max_{i=1,\ldots,m} (y''_i - y^0_i) \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i < \sum_{i=1}^{m} y''_i \right)$$

i spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5). Tym samym relacja $\preceq_o$ jest racjonalną relacją preferencji, co kończy dowód twierdzenia. ■

Pojęcie niezdominowanych wektorów ocen dotyczy elementów przestrzeni ocen Y. W wielokryterialnym problemie decyzyjnym interesują nas raczej odpowiednie wektory dopuszczalne w przestrzeni decyzji X.

Definicja 1.7 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x} \in Q$ nazywamy rozwiązaniem efektywnym (Pareto–optymalnym, sprawnym) zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu wektor ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest wektorem niezdominowanym.*

Z wniosków 1.3 i 1.4 i twierdzenia 1.3 wynikają następujące charakterystyki rozwiązań efektywnych.

Wniosek 1.5 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Wniosek 1.6 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$.*

Wniosek 1.7 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Wniosek 1.8 *Dla dowolnej permutacji τ zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$, wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym zadania*

$$\min \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Wniosek 1.9 *Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym zadania*

$$\min \{(s_1(f_1(\mathbf{x})), s_2(f_2(\mathbf{x})), \ldots, s_m(f_m(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Zauważmy, że zgodnie z wnioskami 1.8 i 1.9 efektywność rozwiązania nie zależy od kolejności użytych funkcji oceny f_i i od ściśle monotonicznych zmian skal indywidualnych ocen.

Stanowiące główny przedmiot naszych rozważań zadania WPL i WPLD mają domknięte zbiory rozwiązań dopuszczalnych Q i liniowe funkcje oceny f_i. Zatem domknięte są odpowiednie zbiory ocen osiągalnych A. Co więcej, w przypadku regularnego zadania WPL lub WPLD zbiór Q jest niepusty oraz istnieją rozwiązania optymalne $\bar{\mathbf{x}}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jednokryterialnych zadań (1.9). Stąd $A \neq \emptyset$ i $A \subset Y(\mathbf{y}^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{y}^*\}$, gdzie $y_i^* = f_i(\bar{\mathbf{x}}^i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Z twierdzenia 1.2 wynika więc następujący wniosek.

Wniosek 1.10 *Regularne zadania WPL i WPLD mają rozwiązania efektywne.*

Wniosek 1.5 identyfikuje rozwiązania efektywne zadania wielokryterialnego jako elementy minimalne racjonalnej relacji preferencji. Zgodnie z definicją 1.1 racjonalna relacja preferencji spełnia warunki zwrotności, przechodniości i ścisłej monotoniczności na całej przestrzeni ocen Y. W przypadku konkretnego zadania wielokryterialnego o ustalonym zbiorze dopuszczalnym Q i zbiorze ocen osiągalnych A nie ma potrzeby rozpatrywania relacji preferencji określonych na całej przestrzeni Y.

Twierdzenie 1.4 *Jeżeli $A \subset Y(\mathbf{y}^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{y}^*\}$ dla pewnego $\mathbf{y}^* \in Y$ i istnieje relacja preferencji $\preceq$ spełniająca warunki zwrotności, przechodniości oraz ścisłej monotoniczności na zbiorze $Y(\mathbf{y}^*)$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, to wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem efektywnym. Na mocy wniosku 1.7 istnieje wtedy $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Niech $I_0 = \{i \in I \ : \ f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^0)\}$. Zauważmy, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \sum_{i \in I_0}(f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}^0))\mathbf{e}_i$ oraz dla dowolnego $J \subset I_0$ wektor ocen $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \sum_{i \in J}(f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}^0))\mathbf{e}_i$ należy do zbioru $Y(\mathbf{y}^*)$. Zatem, dzięki przechodniości i ścisłej monotoniczności relacji $\preceq$ na zbiorze $Y(\mathbf{y}^*)$, otrzymujemy $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, co przeczy założeniu twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.5 *Jeżeli istnieje relacja preferencji $\preceq$ spełniająca na zbiorze ocen osiągalnych A warunek*

$$\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \tag{1.12}$$

taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, to wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem efektywnym. Na mocy wniosku 1.7 istnieje wtedy $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem, dzięki (1.12), $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, co przeczy założeniu twierdzenia. ■

1.3 Techniki skalaryzacji

Zgodnie z wnioskiem 1.6 pojedyncze rozwiązania efektywne zadania wielokryterialnego można wyznaczać poszukując w zbiorze ocen osiągalnych A wektorów najmniejszych w sensie pewnej spójnej racjonalnej relacji preferencji. W szczególności, można w tym celu rozwiązywać *skalaryzacje* zadania wielokryterialnego, czyli zadania optymalizacji jednokryterialnej z *funkcją skalaryzującą* $s : R^m \to R$

$$\min \{s(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.13}$$

Minimalizacja funkcji skalaryzującej s definiuje relację preferencji

$$\mathbf{y}' \preceq_s \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad s(\mathbf{y}') \leq s(\mathbf{y}'') \tag{1.14}$$

Zauważmy, że relacja $\preceq_s$ jest zawsze spójna, zwrotna i przechodnia. Następujące twierdzenie dostarcza prostego warunku dostatecznego na to, by rozwiązanie optymalne skalaryzowanego zadania (1.13) było rozwiązaniem efektywnym oryginalnego zadania wielokryterialnego.

Twierdzenie 1.6 *Jeżeli funkcja skalaryzująca $s : R^m \to R$ definiuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek ścisłej monotoniczności (1.5), to rozwiązanie optymalne zadania (1.13) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Dla dowolnej funkcji $s : R^m \to R$ relacja preferencji $\preceq_s$ zdefiniowana wzorem (1.14) jest zwrotna, przechodnia i spójna. Jeżeli relacja $\preceq_s$ spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5), to jest racjonalną relacją preferencji. Rozwiązanie optymalne $\mathbf{x}^0$ zadania (1.13) spełnia warunek $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq_s \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$. Zatem na mocy wniosku 1.6 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Twierdzenie 1.6 dotyczy sytuacji, gdy funkcja skalaryzująca definiuje relację preferencji spełniającą warunek ścisłej monotoniczności na całej przestrzeni Y. Odpowiednia skalaryzacja (1.13) pozwala nam wtedy wyznaczyć rozwiązanie efektywne dla dowolnego zadania wielokryterialnego (1.7). W przypadku konkretnego zadania wielokryterialnego może wystarczać, że funkcja skalaryzująca definiuje relację preferencji spełniającą warunek ścisłej monotoniczności na pewnym zbiorze $D \subset Y$, czyli

$$\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i \prec \mathbf{y} \quad \text{dla } \varepsilon > 0, \ (\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i), \ \mathbf{y} \in D, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.15}$$

Twierdzenie 1.7 *Jeżeli istnieje $\mathbf{y}^* \in Y$ taki, że $A \subset Y(\mathbf{y}^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{y}^*\}$ oraz funkcja skalaryzująca $s : R^m \to R$ definiuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek ścisłej monotoniczności (1.15) na zbiorze $Y(\mathbf{y}^*)$, to rozwiązanie optymalne zadania (1.13) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Dla dowolnej funkcji $s : R^m \to R$ relacja preferencji $\preceq_s$ zdefiniowana wzorem (1.14) jest zwrotna i przechodnia. Jeżeli relacja $\preceq_s$ spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5) na zbiorze $Y(\mathbf{y}^*)$, to spełnione są założenia twierdzenia 1.4. Zatem na mocy twierdzenia 1.4 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Często funkcje skalaryzujące definiują relacje preferencji nie spełniające warunku ścisłej monotoniczności (1.5), a jedynie warunek *słabej monotoniczności*

$$\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i \preceq \mathbf{y} \quad \text{dla } \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.16}$$

Są to również interesujące skalaryzacje, ponieważ jest dla nich prawdziwe następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.8 *Jeżeli funkcja skalaryzująca $s : R^m \to R$ definiuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek słabej monotoniczności (1.16), to zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.13) zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0 \in Q$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (1.13). Jeżeli $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem efektywnym, to istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Na mocy (słabej) monotoniczności i przechodniości relacji $\preceq_s$ prawdziwa jest wtedy nierówność $s(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq s(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Oznacza to, że wektor $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.13). Zatem nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ nie należący do zbioru rozwiązań optymalnych zadania (1.13) taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, co dowodzi prawdziwość tezy twierdzenia. ■

Wniosek 1.11 *Jeżeli funkcja skalaryzująca $s : R^m \to R$ definiuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek słabej monotoniczności (1.16), to jednoznaczne w przestrzeni ocen Y rozwiązanie optymalne zadania (1.13) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 1.12 *Jeżeli istnieje $\mathbf{y}^* \in Y$ taki, że $A \subset Y(\mathbf{y}^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{y}^*\}$ oraz funkcja skalaryzująca $s : R^m \to R$ definiuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek słabej monotoniczności na zbiorze $Y(\mathbf{y}^*)$, to zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.13) zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7) i jednoznaczne w przestrzeni ocen Y rozwiązanie optymalne zadania (1.13) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Zgodnie z twierdzeniem 1.8 zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji (1.13) definiującej relację preferencji spełniającej jedynie warunek słabej monotoniczności zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7). Może on jednak zawierać również pewne nieefektywne rozwiązania optymalne, a standardowe procedury obliczeniowe optymalizacji jednokryterialnej wyznaczają na ogół tylko jedno rozwiązanie optymalne (które może być nieefektywne). Dla praktycznego wykorzystania tych skalaryzacji w systemie wspomagania decyzji potrzebne jest uściślenie wyboru rozwiązania optymalnego tak, aby zagwarantować efektywność wyznaczonego rozwiązania. Takie uściślenie będziemy dalej nazywać *regularyzacją* skalaryzacji. Zauważmy, że skalaryzacja polegająca na wyborze jednej ustalonej funkcji oceny f_j $(j \in I)$, czyli $s(\mathbf{y}) = y_j$, spełnia założenia twierdzenia 1.8. Zatem dla zadań optymalizacji jednokryterialnej

$$\min \{(f_j(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}, \qquad j \in I \tag{1.17}$$

prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 1.13 *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.17) zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7), a jednoznaczne w przestrzeni ocen Y rozwiązanie optymalne zadania (1.17) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Szczególnym przypadkiem skalaryzującej funkcji celu spełniającej założenia twierdzenia 1.6 jest suma indywidualnych funkcji oceny, która prowadzi do zadania postaci

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.18}$$

Wniosek 1.14 *Rozwiązanie optymalne zadania (1.18) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Powszechnie stosowaną techniką wyznaczania rozwiązań efektywnych jest *metoda ważenia ocen* oparta na skalaryzacji za pomocą liniowych kombinacji funkcji oceny, czyli na wyznaczaniu rozwiązań optymalnych skalaryzacji postaci

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.19}$$

Poprawność takiego podejścia wynika z twierdzenia 1.9 i wniosku 1.14.

Wniosek 1.15 *Dla dowolnych dodatnich wag w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ rozwiązanie optymalne zadania (1.19) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Metoda ważenia ocen z odpowiednio dobieranymi wagami pozwala na wyznaczenie dowolnego rozwiązania efektywnego wielokryterialnego zadania programowania liniowego. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie (por. Steuer, 1986).

Twierdzenie 1.9 *Dla każdego $\mathbf{x}^0$ rozwiązania efektywnego zadania WPL istnieją dodatnie wagi w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ takie, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (1.19).*

Metoda ważenia ocen jest bardzo atrakcyjną skalaryzacją, ponieważ funkcja skalaryzująca jest tu liniowa i dlatego nie wprowadza żadnych utrudnień obliczeniowych do zadań WPL i WPLD. To znaczy, skalaryzacja (1.19) zadania WPL jest zadaniem programowania liniowego i odpowiednio skalaryzacja (1.19) zadania WPLD jest zadaniem PLD. Niestety twierdzenie 1.9 dotyczy tylko wielokryterialnych zadań programowania liniowego i nie jest prawdziwe w przypadku ogólnych zadań optymalizacji wielokryterialnej. W szczególności twierdzenie to nie jest prawdziwe w przypadku interesujących nas zadań WPLD. Dokładniej, w przypadku zadania WPLD mogą istnieć rozwiązania efektywne, które nie są rozwiązaniami optymalnymi zadania

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.20}$$

dla żadnych ściśle rosnących liniowych funkcji $s_i : R \rightarrow R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ilustruje to następujący prosty przykład.

Przykład 1.2. Rozpatrzmy dwukryterialne zagadnienie optymalnego załadunku

$$\min \{(3x_1+2x_2, 2x_2+3x_3) \ : \ x_1+x_2+x_3 = 1, \quad x_j \geq 0, \quad x_j \in Z \quad \text{dla } j = 1, 2, 3\}$$

Zadanie to ma trzy rozwiązania dopuszczalne: (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1), z wektorami ocen odpowiednio: (3,0), (2,2) i (0,3). Jak łatwo sprawdzić, wszystkie trzy wektory ocen są niezdominowane i, co za tym idzie, wszystkie trzy rozwiązania dopuszczalne są efektywne. Pokażemy, że (0,1,0) nie jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (1.20) dla żadnych ściśle rosnących liniowych funkcji s_1 i s_2.

Przypuśćmy, że (0,1,0) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.20) dla pewnych funkcji

$$s_1(y_1) = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad s_2(y_2) = \alpha_2 y_2 + \beta_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

Spełnione są wtedy nierówności

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \beta_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 &\leq \beta_1 + 3\alpha_2 + \beta_2 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 &\leq 3\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

Stąd $4(\alpha_1 + \alpha_2) \leq 3(\alpha_1 + \alpha_2)$, co przeczy warunkowi $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Zatem (0,1,0) nie jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.20) dla żadnych ściśle rosnących liniowych funkcji s_1 i s_2. □

Zadania programowania liniowego dyskretnego są w ogólnym przypadku istotnie trudniejsze od zadań programowania liniowego. Istnieje jednak obszerna klasa (jednokryterialnych) zadań PLD, które mogą być rozwiązywane jak zwykłe zadania PL. Są to tzw. zadania unimodularne, obejmujące między innymi problem przydziału i szereg innych zagadnień optymalizacji na grafach (por. Nemhauser i Wolsey, 1988; Walukiewicz, 1986). W zadaniach tych macierz **A** spełnia warunek całkowitej unimodularności (wszystkie nieosobliwe kwadratowe podmacierze mają wyznaczniki równe 1 lub -1), co gwarantuje, że dla dowolnego całkowitego wektora prawych stron **b** wszystkie wierzchołki zbioru dopuszczalnego Q mają całkowite współrzędne. Zbiór rozwiązań optymalnych zadania dyskretnego jest wtedy całkowicie zawarty w zbiorze rozwiązań optymalnych ciągłej relaksacji zadania PLD (zadania PL otrzymanego przez pominięcie warunków całkowitoliczbowości zmiennych) i każde wierzchołkowe rozwiązanie optymalne zadania ciągłego jest jednocześnie rozwiązaniem optymalnym oryginalnego problemu dyskretnego. Oznacza to, że w unimodularnych jednokryterialnych zadaniach PLD można po prostu pominąć warunki całkowitoliczbowości zmiennych i wyznaczać wierzchołkowe rozwiązania optymalne (np. metodą sympleks) odpowiednich ciągłych zadań PL.

W przypadku zadań WPLD unimodularność modelu nie upraszcza tak bardzo zadania jak w optymalizacji jednokryterialnej. Zbiór rozwiązań efektywnych unimodularnego problemu WPLD może nie być zawarty w zbiorze rozwiązań efektywnych ciągłej relaksacji tego zadania. Nawet w przypadku, gdy wszystkie rozwiązania dopuszczalne problemu WPLD są wierzchołkowymi rozwiązaniami dopuszczalnymi ciągłej relaksacji, może się zdarzyć, że pewne rozwiązanie efektywne zadania WPLD nie jest rozwiązaniem efektywnym odpowiedniego problemu WPL. Wynika to z faktu, że wierzchołek zbioru dopuszczalnego Q może być rozwiązaniem efektywnym w zbiorze wszystkich wierzchołków, ale nie być rozwiązaniem efektywnym w przypadku całego zbioru Q. Taką sytuację ilustruje przykład 1.2. Zauważmy, że zbiorem rozwiązań efektywnych ciągłej relaksacji problemu rozpatrywanego w przykładzie jest odcinek łączący wierzchołki (1,0,0) i (0,0,1) (wraz z tymi wierzchołkami). Rozważane rozwiązanie efektywne problemu WPLD (0,1,0) nie należy do zbioru rozwiązań efektywnych ciągłej relaksacji. Dlatego też, inaczej niż w programowaniu jednokryterialnym, unimodularne zadania WPLD nie mogą być zastąpione swoimi ciągłymi relaksacjami.

Minimalizacja funkcji skalaryzującej w postaci sumy poszczególnych funkcji oceny (1.18) może być interpretowana jako wyznaczanie rozwiązania o najlepszej średniej ocenie. Podobnie można rozpatrywać minimalizację najgorszej oceny, czyli *skalaryzację minimaksową*

$$\min \{ \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.21}$$

Funkcja skalaryzująca $\max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x})$ nie jest funkcją liniową. W przypadku liniowych funkcji f_i jest ona jednak wypukłą funkcją kawałkami liniową i dlatego minimalizacja (1.21) może być zapisana za pomocą zależności liniowych

$$\begin{aligned} &\min \ z \\ &\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \\ &f_i(\mathbf{x}) \le z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Tym samym skalaryzacja (1.21) zadania WPL jest zadaniem PL i odpowiednio skalaryzacja (1.21) zadania WPLD jest zadaniem PLD. Ponadto w przypadku zadań WPL istnieje możliwość implementacji metody sympleks z niejawną reprezentacją minimaksowej funkcji celu bez wprowadzania dodatkowych nierówności do ograniczeń zadania (Ogryczak i Zorychta, 1994).

Relacja preferencji definiowana przez zadanie (1.21)

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,m} y_i' \le \max_{i=1,\ldots,m} y_i'' \tag{1.22}$$

nie spełnia warunku ścisłej monotoniczności (1.5). Tym samym minimaksowa skalaryzacja (1.21) nie spełnia założeń twierdzenia 1.6. Niemniej jednak jest to interesująca skalaryzacja, ponieważ prawdziwe są dla niej następujące zależności.

Twierdzenie 1.10 *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.21) zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Relacja preferencji (1.22) spełnia warunek słabej monotoniczności (1.16). Zatem na mocy twierdzenia 1.8 zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.21) zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Wniosek 1.16 *Jednoznaczne w przestrzeni ocen Y rozwiązanie optymalne zadania (1.21) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Skalaryzację minimaksową (1.21), podobnie jak skalaryzację (1.18), można rozpatrywać z wagami. Ogólniej, możemy wprowadzić do skalaryzacji minimaksowej funkcje $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ skalujące oceny, czyli rozpatrywać zadanie postaci

$$\min \{ \max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.23}$$

Twierdzenie 1.11 *Jeżeli funkcje $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ są ściśle rosnące i dla pewnego $\mathbf{y}^0 \in Y$ spełniają warunek*

$$s_1(y_1^0) = s_2(y_2^0) = \cdots = s_m(y_m^0) \tag{1.24}$$

to dla każdego $\mathbf{y} \in Y$ prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{y} \not\gneqq \mathbf{y}^0 \quad \Rightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,m} s_i(y_i^0) < \max_{i=1,\ldots,m} s_i(y_i) \tag{1.25}$$

Dowód. Jeżeli $\mathbf{y} \not\gneqq \mathbf{y}^0$, to istnieje indeks i_0 taki, że $y_i > y_i^0$. Zatem, korzystając z warunku (1.24) i faktu, że funkcje s_i są ściśle rosnące, otrzymujemy

$$\max_{i=1,\ldots,m} s_i(y_i^0) = s_{i_0}(y_{i_0}^0) < s_{i_0}(y_{i_0}) \le \max_{i=1,\ldots,m} s_i(y_i)$$

■

Wniosek 1.17 *Jeżeli funkcje $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ są ściśle rosnące i dla pewnego $\mathbf{y}^0 \in Y$ spełniają warunek (1.24), to relacja preferencji $\preceq$ definiowana przez zadanie (1.23) spełnia warunek*

$$\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{y}^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^0 \prec \mathbf{y} \tag{1.26}$$

Twierdzenie 1.12 *Rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania (1.23) z funkcjami skalującymi postaci*

$$s_i(y_i) = y_i - f_i(\mathbf{x}^0) \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.27}$$

Dowód. Funkcje s_i określone wzorem (1.27) są ściśle rosnące i spełniają warunek (1.24) dla $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem spełnione są założenia twierdzenia 1.11. Jednocześnie z efektywności wektora $\mathbf{x}^0$ wynika, że nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ spełniający nierówność $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \le \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ (por. wniosek 1.7). Stąd na mocy twierdzenia 1.11 $\max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0)) < \max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}))$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$ takiego, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem $\mathbf{x}^0$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (1.23). ■

Twierdzenie 1.13 *Jeżeli dla wszystkich osiągalnych wektorów ocen $\mathbf{y} \in Y$ prawdziwa jest nierówność $\mathbf{y}^* < \mathbf{y}$, to dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) istnieją dodatnie wagi w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ takie, że $\mathbf{x}^0$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania (1.23) z funkcjami skalującymi postaci*

$$s_i(y_i) = w_i(y_i - y_i^*) \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.28}$$

Dowód. Z założeń twierdzenia wynika, że można przyjąć $w_i = 1/(f_i(\mathbf{x}^0) - y_i^*)$. Przy tak określonych wagach w_i, funkcje s_i określone wzorem (1.28) są ściśle rosnące i spełniają warunek (1.24) dla $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem spełnione są założenia twierdzenia 1.11. Jednocześnie z efektywności wektora $\mathbf{x}^0$ wynika, że nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ spełniający nierówność $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \le \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ (por. wniosek 1.7). Stąd na mocy twierdzenia 1.11 $\max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0)) < \max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}))$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$ takiego, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem $\mathbf{x}^0$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (1.23). ■

Wniosek 1.18 *Dla każdego* $\mathbf{x}^0$ *rozwiązania efektywnego zadania wielokryterialnego (1.7) istnieją ściśle rosnące funkcje liniowe* $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *takie, że* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.23).*

Wprowadzając skalaryzację (1.13) zadania wielokryterialnego określamy w przestrzeni ocen Y spójną, zwrotną i przechodnią relację preferencji (1.14). Zgodnie z twierdzeniem 1.6, jeżeli relacja (1.14) spełnia warunek ścisłej monotoniczności, to rozwiązanie optymalne skalaryzacji (1.13) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego. Istotną zaletą skalaryzacji (1.13) jest możliwość wykorzystania standardowych metod programowania matematycznego do wyznaczania jej rozwiązania optymalnego. Zauważmy, że możliwość praktycznego wyznaczenia rozwiązania optymalnego (najmniejszego) dotyczy nie tylko skalaryzacji (1.13), ale również szeregu innych preporządków liniowych. W skalaryzacji (1.13) dokonujemy odwzorowania $s : Y \to R$ i poszukujemy elementu $s(\mathbf{y}) \in R$ najmniejszego w sensie porządku określonego nierównością $\leq$. Równie dobrze można rozpatrywać odwzorowania $\mathbf{s} : Y \to R^p$ i poszukiwać wektora $\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in R^p$ najmniejszego w sensie pewnego porządku określonego na R^p. Szczególnie często wykorzystuje się w takim podejściu *porządek leksykograficzny* określony na przestrzeni R^p relacją $\leq_{lex}$ zdefiniowaną następująco

$\mathbf{v}' <_{lex} \mathbf{v}'' \Leftrightarrow$ istnieje indeks r taki, że $v'_r < v''_r$ oraz $v'_k = v''_k$ dla $k < r$

$\mathbf{v}' \leq_{lex} \mathbf{v}'' \Leftrightarrow \mathbf{v}' <_{lex} \mathbf{v}''$ lub $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$

Relacja nierówności leksykograficznej $\leq_{lex}$ jest zwrotna, przechodnia, spójna i *antysymetryczna*

$$(\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \preceq \mathbf{y}') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}''$$

Definiuje ona zatem porządek liniowy.

Jako uogólnienie skalaryzacji (1.13) będziemy rozpatrywać *skalaryzacje leksykograficzne*, czyli zadania postaci

$$\text{lexmin } \{(s_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), s_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, s_p(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.29}$$

Ponieważ występujący w zapisie zadania (1.29) operator minimum leksykograficznego jednoznacznie określa, że jest to skalaryzacja leksykograficzna, to tam, gdzie nie będzie to prowadzić do niejasności, zadanie typu (1.29) będziemy nazywać po prostu skalaryzacją wielokryterialnego zadania (1.7). Zadanie leksykograficzne (1.29) określa następujący ciąg zadań skalarnych:

1. Wyznaczamy zbiór S_1 rozwiązań optymalnych zadania
$$\mathrm{P}_1 \ : \ \min \ \{s_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$
2. Dla $k = 2, 3, \ldots, p$ wyznaczamy zbiór S_k rozwiązań optymalnych zadania
$$\mathrm{P}_k \ : \ \min \ \{s_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q, \ \mathbf{x} \in S_{k-1}\}$$
3. Każdy element zbioru S_p jest rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznego (1.29).

Najprostszą techniką definiowania zbiorów S_k jest zapisywanie ich za pomocą warunków

$$s_t(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \bar{z}_t \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, k \tag{1.30}$$

gdzie $\bar{z}_t$ jest wartością optymalną funkcji celu w zadaniu P_t. Prowadzi ona do tzw. podejścia sekwencyjnego, czyli rozwiązywania ciągu zadań o rosnącej liczbie ograniczeń. Podejście sekwencyjne może być łatwo stosowane do dowolnych typów problemów (zarówno liniowych, jak i nieliniowych) i implementowane z wykorzystaniem standardowych procedur optymalizacji jednokryterialnej odpowiedniego typu. Przykład prostego programu sterującego implementującego podejście sekwencyjne w pakiecie MPSX został przedstawiony w książce Ogryczaka (1989, rozdział 14).

Skalaryzacja leksykograficzna (1.29) definiuje relację preferencji

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}(\mathbf{y}') \leq_{lex} \mathbf{s}(\mathbf{y}'') \tag{1.31}$$

Zauważmy, że relacja (1.31) jest zawsze spójna, zwrotna i przechodnia. Następujące twierdzenie dostarcza prostego warunku dostatecznego na to, by rozwiązanie optymalne skalaryzacji leksykograficznej (1.29) było rozwiązaniem efektywnym oryginalnego zadania wielokryterialnego.

Twierdzenie 1.14 *Jeżeli skalaryzacja leksykograficzna (1.29) definiuje relację preferencji (1.31) spełniającą warunek ścisłej monotoniczności (1.5), to rozwiązanie optymalne zadania (1.29) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Dla dowolnej funkcji wektorowej $\mathbf{s} : R^m \to R^p$ relacja preferencji $\preceq$ zdefiniowana wzorem (1.31) jest zwrotna, przechodnia i spójna. Jeżeli relacja $\preceq$ spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5), to jest racjonalną relacją preferencji. Rozwiązanie optymalne $\mathbf{x}^0$ zadania (1.29) spełnia warunek $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$. Zatem na mocy wniosku 1.6 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Najprostszą skalaryzacją leksykograficzną zadania wielokryterialnego (1.7) jest zadanie

$$\text{lexmin } \{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.32}$$

czyli zadanie z ustaloną hierarchią ważności fukcji oceny.

Twierdzenie 1.15 *Rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego (1.32) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Zadanie (1.32) definiuje relację preferencji $\preceq$ określoną wzorem

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \leq_{lex} \mathbf{y}''$$

Relacja ta jest zwrotna, przechodnia i spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5), czyli jest racjonalną relacją preferencji. Rozwiązanie optymalne $\mathbf{x}^0$ zadania (1.32) spełnia warunek $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$. Zatem na mocy wniosku 1.6 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Wniosek 1.19 *Dla dowolnej permutacji τ zbioru $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego*

$$\text{lexmin } \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.33}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).

Twierdzenie 1.16 *Dla dowolnej permutacji τ zbioru $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ i dowolnego $1 \leq p \leq m$, zbiór rozwiązań optymalnych zadania*

$$\text{lexmin } \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(p)}(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.34}$$

zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1.7), a jednoznaczne w przestrzeni ocen Y rozwiązanie optymalne zadania (1.34) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).

Dowód. Zadanie (1.34) definiuje relację preferencji $\preceq$ określoną wzorem

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad (y'_{\tau(1)}, y'_{\tau(2)}, \ldots, y'_{\tau(p)}) \leq_{lex} (y''_{\tau(1)}, y''_{\tau(2)}, \ldots, y''_{\tau(p)})$$

Relacja ta jest zwrotna, przechodnia i spełnia warunek słabej monotoniczności (1.16).

Niech $\mathbf{x}^0 \in Q$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (1.34). Jeżeli $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem efektywnym, to istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Na mocy słabej monotoniczności i przechodniości relacji $\preceq$ prawdziwa jest wtedy nierówność

$$(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(p)}(\mathbf{x})) \leq_{lex} (f_{\tau(1)}(\mathbf{x}^0), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}^0), \ldots, f_{\tau(p)}(\mathbf{x}^0))$$

Oznacza to, że wektor $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.34). Zatem nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ nie należący do zbioru rozwiązań optymalnych zadania (1.34) taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, co dowodzi prawdziwości tezy twierdzenia. ■

Zauważmy, że rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego (1.33) jest też rozwiązaniem optymalnym zadania jednokryterialnego (1.17) z $j = \tau(1)$. Dokładniej, zadanie optymalizacji jednokryterialnej (1.17) jest częściowym zadaniem leksykograficznym (1.34) z $p = 1$. Zadanie (1.33) jest zatem regularyzacją leksykograficzną odpowiedniego zadania optymalizacji jednokryterialnej. Zgodnie z wnioskiem 1.13 rozwiązując zadanie jednokryterialne (1.17) można zawsze wygenerować rozwiązanie efektywne problemu wielokryterialnego (1.7). Jeżeli jednak wybieramy jedno z rozwiązań optymalnych, to może sie zdarzyć, że (w przypadku niejednoznaczności rozwiązań optymalnych) wybrane rozwiązanie optymalne zadania (1.17) nie jest rozwiązaniem efektywnym zadania (1.7). Koncepcja optymalizacji leksykograficznej może być wykorzystana do regularyzacji zadania jednokryterialnego (1.17). Jedno zadanie (1.17) może być regularyzowane za pomocą różnych zadań (1.33), odpowiadających różnym permutacjom pozostałych funkcji oceny. Istnieje możliwość prostszej regularyzacji zadania optymalizacji jednokryterialnej za pomocą dwupoziomowego zadania leksykograficznego

$$\text{lexmin } \{(f_{i_0}(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\}, \qquad i_0 \in I \tag{1.35}$$

Twierdzenie 1.17 *Rozwiązanie optymalne (dwupoziomowego) zadania leksykograficznego (1.35) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Relacja preferencji odpowiadająca (1.35) ma postać

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad y'_{i_0} < y''_{i_0} \quad \text{lub} \quad \left(y'_{i_0} = y''_{i_0} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i \leq \sum_{i=1}^{m} y''_i \right)$$

Relacja ta spełnia warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5). Jest to więc racjonalna relacja preferencji i na mocy twierdzenia 1.3 rozwiązanie optymalne $\mathbf{x}^0$ zadania (1.35) generuje niezdominowany wektor osiągnięcia $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Zatem $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Koncepcja dwupoziomowej optymalizacji leksykograficznej typu (1.35) może być wykorzystana do regularyzacji dowolnych skalaryzacji (1.13) generujących relację preferencji, która nie spełnia warunku ścisłej monotoniczności (1.5), a jedynie warunek słabej monotoniczności (1.16). W szczególności dotyczy to podejścia minimaksowego (1.21), które może być zastąpione zadaniem

$$\text{lexmin } \{ (\max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{1.36}$$

Twierdzenie 1.18 *Relacja preferencji definiowana przez (dwupoziomowe) zadanie leksykograficzne (1.36) jest racjonalną relacją preferencji.*

Dowód. Relacja preferencji $\preceq$ odpowiadająca (1.36) ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad & \max_{i=1,\ldots,m} y'_i < \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{lub} \\ & \left(\max_{i=1,\ldots,m} y'_i = \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i \leq \sum_{i=1}^{m} y''_i \right) \end{aligned}$$

Relacja ta spełnia warunki zwrotności (1.3) i przechodniości (1.4). Odpowiednia relacja ścisłej preferencji ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad & \max_{i=1,\ldots,m} y'_i < \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{lub} \\ & \left(\max_{i=1,\ldots,m} y'_i = \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i < \sum_{i=1}^{m} y''_i \right) \end{aligned}$$

i spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5). Zatem relacja definiowana przez zadanie leksykograficzne (1.36) jest racjonalną relacją preferencji. ■

Wniosek 1.20 *Rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego (1.36) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 1.21 *Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, relacja preferencji definiowana przez (dwupoziomowe) zadanie leksykograficzne*

$$\text{lexmin } \{ (\max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{1.37}$$

jest racjonalną relacją preferencji.

Wniosek 1.22 *Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji* $s_i : R \rightarrow R$ *(*$i = 1, 2, \dots, m$*) rozwiązanie optymalne (dwupoziomowego) zadania leksykograficznego (1.37) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Zauważmy, że każde rozwiązanie optymalne zadania (1.37) jest również rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania minimaksowego (1.23). Zatem, dla zadania (1.37) prawdziwe są twierdzenia 1.11–1.13 i wynikające z nich wnioski. W szczególności z wniosku 1.18 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.23 *Dla każdego rozwiązania efektywnego* $\mathbf{x}^0$ *zadania wielokryterialnego (1.7) istnieją ściśle rosnące funkcje liniowe* $s_i : R \rightarrow R$ *(*$i = 1, 2, \dots, m$*) takie, że* $\mathbf{x}^0$ *jest jednoznacznym w przestrzeni ocen* Y *rozwiązaniem optymalnym zadania (1.37).*

Koncepcja optymalizacji minimaksowej bez dodatkowej regularyzacji jest zbyt zgrubna i nie jest w stanie odfiltrować wszystkich rozwiązań nieefektywnych, ponieważ koncentruje się ona jedynie na wartościach największych współrzędnych wektorów ocen i ignoruje różnice pozostałych współrzędnych. Koncepcja optymalizacji minimaksowej może być rozciągnięta na minimalizację drugich co do wielkości współrzędnych wektorów ocen, trzecich co do wielkości itd. Prowadzi to do koncepcji *minimaksymalizacji leksykograficznej*, czyli minimalizacji leksykograficznej wektorów $(f_{j_1}(\mathbf{x}), f_{j_2}(\mathbf{x}), \dots, f_{j_p}(\mathbf{x}))$ ze współrzędnymi uporządkowanymi nierosnąco. Koncepcja minimaksimum leksykograficznego może być sformułowana następująco. Wprowadzamy przekształcenie $\Theta : R^m \rightarrow R^m$ porządkujące nierosnąco współrzędne wektorów. To znaczy, $\Theta(\mathbf{y}) = (\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y}), \dots, \theta_m(\mathbf{y}))$, gdzie $\theta_1(\mathbf{y}) \geq \theta_2(\mathbf{y}) \geq \dots \geq \theta_m(\mathbf{y})$ i istnieje permutacja τ zbioru I taka, że $\theta_i(\mathbf{y}) = y_{\tau(i)}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Zauważmy, że standardowe podejście minimaksowe (1.21) polega na minimalizacji $\theta_1(\mathbf{y})$ i nie bierze pod uwagę wartości $\theta_i(\mathbf{y})$ dla $i \geq 2$. To jest właśnie przyczyna, dla której podejście minimaksowe jest zbyt zgrubne i dopuszcza rozwiązania nieefektywne jako możliwe rozwiązania optymalne. Aby uwzględnić wszystkie współrzędne wektorów ocen, będziemy poszukiwać minimum leksykograficznego wśród uporządkowanych wektorów ocen. Relacja nierówności leksykograficznej jest porządkiem liniowym i dlatego możliwe jest wyznaczenie najlepszego uporządkowanego wektora ocen w sensie tej relacji. Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ nazywamy leksykograficznym rozwiązaniem minimaksowym, gdy

$$\Theta(f_1(\mathbf{x}^0), f_2(\mathbf{x}^0), \dots, f_m(\mathbf{x}^0)) \leq_{lex} \Theta(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

dla wszystkich $\mathbf{x} \in Q$. To znaczy, leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe jest rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznego

$$\text{lexmin} \; \{\Theta(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.38}$$

Twierdzenie 1.19 *Relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (1.38) jest racjonalną relacją preferencji.*

Dowód. Relacja preferencji odpowiadająca leksykograficznej minimaksymalizacji ma postać

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{y}'')$$

Relacja ta spełnia oczywiście warunki zwrotności (1.3) i przechodniości (1.4). Dla wykazania ścisłej monotoniczności (1.5) zauważmy, że z $\varepsilon > 0$ zachodzi $y_i = \theta_{j'}(\mathbf{y}) > y_i - \varepsilon = \theta_{j''}(\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{e}_i)$ oraz istnieje indeks j_0, $j' \leq j_0 \leq j''$ taki, że

$$\theta_{j_0}(\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{e}_i) < \theta_{j_0}(\mathbf{y}) \quad \text{i} \quad \theta_j(\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{e}_i) \leq \theta_j(\mathbf{y}) \quad \text{dla } j < j_0$$

co dowodzi spełnienia aksjomatu ścisłej monotoniczności (1.5). ■

Wniosek 1.24 *Rozwiązanie optymalne zadania (1.38) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 1.25 *Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji $s_i : R \to R$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną*

$$\operatorname{lexmin} \{\Theta(s_1(f_1(\mathbf{x})), s_2(f_2(\mathbf{x})), \ldots, s_m(f_m(\mathbf{x}))) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.39}$$

jest racjonalną relacją preferencji.

Wniosek 1.26 *Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji $s_i : R \to R$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego (1.39) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Zauważmy, że każde rozwiązanie optymalne zadania (1.39) jest również rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania minimaksowego (1.23). Zatem, dla zadania (1.39) prawdziwe są twierdzenia 1.11–1.13 i wynikające z nich wnioski. W szczególności z wniosku 1.18 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.27 *Dla każdego $\mathbf{x}^0$ rozwiązania efektywnego zadania wielokryterialnego (1.7) istnieją ściśle rosnące funkcje liniowe $s_i : R \to R$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) takie, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1.39), jednoznacznym w przestrzeni ocen Y.*

Ponadto, jak pokazujemy w poniższych twierdzeniach, wniosek 1.17 może zostać istotnie wzmocniony w przypadku relacji preferencji $\preceq$ definiowanej przez minimaksymalizację leksykograficzną (1.38).

Twierdzenie 1.20 *Relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (1.38) spełnia warunek*

$$y_{i'} > y_{i''} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$$
$$\textit{dla } 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - y_{i''},\; 0 \leq \varepsilon'' \leq y_{i'} - y_{i''} - \varepsilon' \tag{1.40}$$

Dowód. Zauważmy, że jeżeli $y_{i'} = \theta_{j'}(\mathbf{y}) > y_{i''} = \theta_{j''}(\mathbf{y})$, to istnieje indeks j_0, $j' \leq j_0 \leq j''$ taki, że dla $0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - y_{i''}$ i $0 \leq \varepsilon'' \leq y_{i'} - y_{i''} - \varepsilon'$

$$\theta_{j_0}(\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon\mathbf{e}_{i''}) < \theta_{j_0}(\mathbf{y}) \quad \text{i} \quad \theta_j(\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon\mathbf{e}_{i''}) \leq \theta_j(\mathbf{y}) \quad \text{dla } j < j_0$$

co dowodzi spełnienia warunku (1.40). ■

Twierdzenie 1.21 *Jeżeli funkcje $s_i : R \rightarrow R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ są ściśle rosnące i dla pewnego $\mathbf{y}^0 \in Y$ spełniają warunek (1.24), to relacja preferencji $\preceq$ definiowana przez zadanie (1.39) spełnia warunek*

$$y_{i'} > y^0_{i'} \quad i \quad y_{i''} < y^0_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$$
$$dla \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - y^0_{i'}, \quad 0 \leq \varepsilon'' \leq y^0_{i''} - y_{i''} \quad (1.41)$$

Dowód. Zauważmy, że ponieważ funkcje s_i są ściśle rosnące i spełniają warunek (1.24), to z $y_{i'} > y^0_{i'}$ i $y_{i''} < y^0_{i''}$ wynika

$$s_{i'}(y_{i'}) > s_{i'}(y_{i'} - \varepsilon') \geq s^* \quad \text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - y^0_{i'}$$
$$s_{i''}(y_{i''}) \leq s_{i''}(y_{i''} - \varepsilon'') \leq s^* \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varepsilon'' \leq y^0_{i''} - y_{i''}$$

gdzie $s^* = s_1(y^0_1) = \cdots = s_m(y^0_m)$. Zatem na mocy twierdzenia 1.20 relacja preferencji $\preceq$ definiowana przez (1.39) spełnia warunek $\mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$. ■

Warunki (1.26) i (1.41) są sobie równoważne w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni ocen ($m = 2$). W przypadku większej liczby funkcji oceny warunek (1.41) jest silniejszy od warunku (1.26), jako że każda racjonalna relacja preferencji mająca własność (1.41) spełnia następujące uogólnienie warunku (1.26)

$$(y_i)_{i \in I'} \lneqq (y^0_i)_{i \in I'} \quad \Rightarrow \quad [(y^0_i)_{i \in I'}, (y_i)_{i \in I \setminus I'}] \prec \mathbf{y} \quad \text{dla } I' \subset I \qquad (1.42)$$

Warunek (1.42) oznacza, że dla dowolnego podzbioru I' zbioru wszystkich ocen I, jeżeli przynajmniej jedna z ocen y_i, $i \in I'$ jest większa od y^0_i, to zastąpienie wszystkich ocen y_i dla $i \in J$ przez odpowiednie oceny y^0_i jest preferowane w stosunku do oryginalnych wartości ocen. Warunek (1.26) jest ograniczeniem warunku (1.42) do przypadku $I' = I$.

Koncepcja minimaksimum leksykograficznego jest znana w teorii gier jako jądro (nucleolus) gry macierzowej (Schmeidler, 1969; Justman, 1977; Potters i Tijs, 1992). W grach macierzowych zbiór dopuszczalny Q jest wielościennym zbiorem wypukłym i funkcje f_i są liniowe. W takim przypadku zawsze istnieje dominująca funkcja oceny, stała (przyjmująca wartość optymalną) na całym zbiorze rozwiązań optymalnych problemu minimaksowego. Dlatego leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe zadania WPL może być wyznaczone, podobnie jak standardowe rozwiązanie leksykograficzne, przez sekwencyjną optymalizację minimaksową z eliminacją dominujących funkcji oceny (Potters i Tijs, 1992; Marchi i Oviedo, 1992). Odpowiedni sekwencyjny algorytm minimaksowy przyjmuje następującą postać

Algorytm SAM
Krok 0^0 Ustalamy wartości początkowe $k = 0$, $Q_0 = Q$ i $I_0 = I$.
Krok 1^0 Dla bieżącego k rozwiązujemy zadanie minimaksowe

$$\mathbf{P}_k : \quad \min_{\mathbf{x}} \{\max_{i \in I_k} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q_k\}$$

Niech z_k oznacza wartość optymalną zadania $\mathbf{P}_k$.
Krok 2^0 Określamy $Q_{k+1} = \{\mathbf{x} \in Q_k \ : \ f_i(\mathbf{x}) \leq z_k \quad \text{dla } i \in I_k\}$,
wyznaczamy $S_k = \{i \in I_k : \quad f_i(\mathbf{x}) = z_k \quad \text{dla wszystkich} \quad \mathbf{x} \in Q_{k+1}\}$
i kładziemy $I_{k+1} = I_k - S_k$.

Krok 3^0 Jeżeli $I_{k+1} = \emptyset$, to przechodzimy do kroku 4^0. W przeciwnym przypadku zwiększamy k o 1 i powracamy do kroku 1^0.
Krok 4^0 Stop. Ostatni zbiór Q_{k+1} jest zbiorem wszystkich rozwiązań optymalnych leksykograficznego problemu minimaksowego. □

W przypadku zadań WPL algorytm SAM jest dobrze zdefiniowany, ponieważ w każdej iteracji zbiór Q_k jest wypukłym zbiorem wielościennym i dlatego zbiór indeksów funkcji dominujących (zbiór S_k) jest niepusty. Ponadto, przy stosowaniu metody sympleks do rozwiązywania problemów P_k, zbiór S_k może być względnie łatwo wyznaczony i dodatkowe ograniczenia zawężające zbiór Q_k mogą być wprowadzone przez ustalanie wartości odpowiednich zmiennych (Klein i inni, 1992). Niestety algorytm nie może być bezpośrednio stosowany do problemów dyskretnych, ponieważ może wtedy nie istnieć dominująca funkcja f_i (zbiór S_k może być pusty). Ilustrujemy to prostym przykładem.

Przykład 1.3. Rozpatrzmy dwukryterialne zagadnienie optymalnego załadunku

$$\min \{(3x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_3) \ : \ x_1 + x_2 = 1, \quad x_j \geq 0, \quad x_j \in Z \quad \text{dla } j = 1, 2\}$$

Zadanie to ma dwa rozwiązania dopuszczalne: (1,0) i (0,1), z wektorami ocen odpowiednio: (3,1) i (2,3). Jak łatwo sprawdzić, oba rozwiązania dopuszczalne są rozwiązaniami optymalnymi zadania minimaksowego

$$\min \{\max\{3x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_3\} \ : \ x_1 + x_2 = 1, \quad x_j \geq 0, \quad x_j \in Z \quad \text{dla } j = 1, 2\}$$

z wartością optymalną $z = 3$, chociaż tylko wektor (1,0) jest leksykograficznym rozwiązaniem minimaksowym. Jednakże ani funkcja f_1, ani f_2 nie przyjmuje wartości 3 dla obu rozwiązań optymalnych. Tym samym odpowiedni zbiór S_k jest pusty i nie jest możliwe kontynuowanie algorytmu sekwencyjnego. □

Maschler i inni (1992) pokazali, że w ogólnym przypadku obejmującym problemy dyskretne, leksykograficzne minimaksimum może być wyrażone jako ciąg problemów minimaksowych z odpowiednio zmodyfikowanymi funkcjami oceny. Podejście to opiera się na spostrzeżeniu, że leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe nie ulega zmianie, gdy dowolne dwie funkcje $f_{i'}$ i $f_{i''}$ zastąpimy funkcjami wyrażającymi odpowiednio ich minimum i maksimum, czyli funkcjami $\bar{f}_{i'}$ i $\bar{f}_{i''}$ zdefiniowanymi jako

$$\bar{f}_{i'}(\mathbf{x}) = \min\{f_{i'}(\mathbf{x}), f_{i''}(\mathbf{x})\} \quad \text{i} \quad \bar{f}_{i''}(\mathbf{x}) = \max\{f_{i'}(\mathbf{x}), f_{i''}(\mathbf{x})\} \tag{1.43}$$

Stosując rekurencyjnie takie zamiany można zastąpić oryginalny zbiór funkcji f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ następującym

$$\bar{f}_i(\mathbf{x}) = \min\{\max_{k=1,\ldots,i} f_k(\mathbf{x}), f_{i+1}(\mathbf{x})\} \quad \text{dla } i < n; \quad \bar{f}_m(\mathbf{x}) = \max_{k \in I} f_k(\mathbf{x}) \tag{1.44}$$

gdzie $\bar{f}_m$ jest funkcją dominującą i stałą na całym zbiorze rozwiązań optymalnych problemu minimaksowego. Zatem, podobnie jak w przypadku wypukłego zbioru dopuszczalnego, można stosować sekwencyjną optymalizację minimaksową i eliminację dominujących (zmodyfikowanych) funkcji. Krok 2^0 w algorytmie SAM przyjmuje wtedy postać

Krok 2^0 Określamy $Q_{k+1} = \{\mathbf{x} \in Q_k : \quad f_i(\mathbf{x}) \leq z_k \quad \text{dla } i \in I_k\}$,
i wyznaczamy $S_k = \{i \in I_k : \quad f_i(\mathbf{x}) = z_k \quad \text{dla wszystkich} \quad \mathbf{x} \in Q_{k+1}\}$.
Jeżeli $S_k \neq \emptyset$, to kładziemy $I_{k+1} = I_k - S_k$ i przechodzimy do kroku 3^0.
W przeciwnym przypadku stosujemy transformację (1.44) do funkcji f_i dla $i \in I_k$ i powracamy do kroku 1^0 (bez zmiany k).

W przykładzie 1.3 rozwiązania optymalne zadania minimaksowego generowały wektory ocen (3,1) i (2,3) tak, że żadna z oryginalnych funkcji oceny nie była dominująca. Zauważmy, że zastępując oryginalne funkcje oceny f_1 i f_2 przez ich minimum i maksimum (zgodnie z (1.44)) otrzymujemy nowe wektory ocen (1,3) i (2,3). W tym wypadku druga funkcja jest stała i minimalizując pierwszą funkcję można wyznaczyć leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe. Transformacje (1.43) i (1.44) mogą być łatwo implementowane w zadaniach o skończonej liczbie znanych explicite rozwiązań dopuszczalnych. W takim przypadku jednak można również łatwo zaimplementować operator porządkujący Θ i transformacje (1.43) i (1.44) są mu równoważne. Niestety, w ogólnym przypadku formuły (1.44) wymagają wprowadzania dodatkowych zmiennych binarnych i w konsekwencji w trakcie realizacji zmodyfikowanego algorytmu SAM zbiór Q_k zawiera rosnącą liczbę dyskretnych zmiennych i ograniczeń. Czyni to algorytm bardzo złożonym obliczeniowo.

Burkard i Rendl (1991) pokazali, że dla prostych problemów dyskretnych leksykograficzna minimaksymalizacja może być zastąpiona równoważną minimalizacją odpowiedniej sumy ważonej. Zasadnicza idea tego podejścia polega na wykorzystaniu faktu skończoności zbioru wszystkich możliwych ocen w problemach dyskretnych. Zwiększanie różnic pomiędzy wartościami ocen bez zmiany ich porządku nie ma wpływu na leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe. Gdy różnice są dostatecznie duże, to minimalizacja sumy ocen jest równoważna leksykograficznej minimaksymalizacji. Fakt ten był również wykorzystywany w zadaniach lokalizacyjnych, gdzie odległości zastępowano ich odpowiednio wysokimi potęgami (Krarup i Pruzan, 1981). Wymaga to jednak nierealistycznie wysokich potęg dla zagwarantowania odpowiednio dużych różnic pomiędzy wartościami. Burkard i Rendl (1991) proponują, żeby najpierw odwzorować zbiór wartości ocen na zbiór liczb całkowitych i dopiero potem wykorzystać potęgowanie wartości. Wszystkie podejścia dostatecznie zwiększające różnice pomiędzy wartościami ocen prowadzą jednak do poważnych trudności obliczeniowych i w zasadzie wymagają specjalnych arytmetyk. W rozdziale 4 proponujemy algorytm wyznaczania leksykograficznego minimaksimum dla problemów o skończonych zbiorach wartości ocen, oparty na sekwencyjnej optymalizacji, co nie powoduje trudności obliczeniowych.

1.4 Systemy wspomagania decyzji

Pojęcie rozwiązania efektywnego zagadnienienia optymalizacji wielokryterialnej (1.7) określa dwa możliwe zadania obliczeniowe:
– wyznaczenie dowolnego rozwiązania efektywnego,
– wyznaczenie wszystkich rozwiązań efektywnych.

Wyznaczanie jednego dowolnego rozwiązania efektywnego jest naturalnym rozszerzeniem podejścia do niejednoznaczności rozwiązania optymalnego w optymalizacji jednokryterialnej, gdzie przyjmuje się, że jedynym wyróżnikiem jakości rozwiązania jest wartość funkcji celu i dlatego wszystkie rozwiązania optymalne są równie dobre. Wszystkie rozwiązania optymalne mają tam jednak identyczne oceny (w jednowymiarowej przestrzeni Y), a różne mogą być jedynie ich realizacje (w przestrzeni X). Podejście to nie jest akceptowane w optymalizacji wielokryterialnej, gdzie różne rozwiązania efektywne mogą mieć różne wektory ocen. Ponadto, fakt użycia w modelu wielu funkcji oceny oznacza brak jednej zagregowanej funkcji celu jako uniwersalnego wskaźnika jakości definiującego preporządek. Może to wynikać z nieistnienia takiego uniwersalnego wskaźnika lub, co jest częstsze, niemożności sformułowania apriori odpowiedniej funkcji. Tym samym nieporównywalność poszczególnych rozwiązań efektywnych w sensie modelu (1.7) nie oznacza ich nieporównywalności, a tym bardziej nierozróżnialności. Dlatego dla matematycznego uściślenia problemu wielokryterialnego przyjmuje się niekiedy (por. Galas i inni, 1987), że rozwiązaniem zadania optymalizacji wielokryterialnej jest cały zbiór rozwiązań efektywnych lub zbiór rozwiązań efektywnych generujących zbiór wszystkich niezdominowanych wektorów ocen.

W ogólnym przypadku zbiór rozwiązań efektywnych wielokryterialnego zadania programowania matematycznego może być nieskończony. Zbiór rozwiązań efektywnych dla zadania WPL jest spójnym brzegowym podzbiorem zbioru dopuszczalnego (por. Steuer, 1986). Dokładniej, zbiór rozwiązań efektywnych zadania WPL jest sumą skończonej liczby (efektywnych) ścian zbioru dopuszczalnego, który jest wielościennym zbiorem wypukłym. Yu i Zeleny (1974) rozbudowali odpowiednio algorytm metody sympleks do wyznaczania wszystkich efektywnych rozwiązań wierzchołkowych zadania WPL i identyfikacji wszystkich ścian wchodzących w skład zbioru rozwiązań efektywnych.

W przypadku zadania WPL o dwu funkcjach oceny istnieje możliwość wykorzystania technik parametrycznego programowania liniowego do analizy całego zbioru rozwiązań efektywnych. Podejście to może być łatwo zaimplementowane w pakietach programowania liniowego wyposażonych w procedury obliczeniowe parametrycznej metody sympleks. W szczególności dotyczy to komercyjnego pakietu programowania liniowego MPSX, dla którego odpowiedni program sterujący został przedstawiony przez Ogryczaka (1989, rozdział 14). W przypadku niedostępności procedur obliczeniowych parametrycznego programowania liniowego można do tego celu wykorzystać techniki programowania ilorazowego (Prasad i Karwan, 1992). Analiza parametryczna może być rozszerzona na większą liczbę funkcji oceny przez stosowanie odpowiednich przekrojów. Przykład takiej analizy dla rzeczywistego zagadnienia rejonizacji z wykorzystaniem środowiska programistycznego pakietu MPSX został przedstawiony przez Ogryczaka i Malczewskiego (1987). Jako rozwiązań startowych do analizy parametrycznej użyto tam rozwiązań zadań optymalizacji leksykograficznej z różną hierarchią poszczególnych funkcji celu.

W celu rozstrzygnięcią praktycznego problemu decyzyjnego trzeba wybrać jedno rozwiązanie do realizacji. Tym samym zbioru rozwiązań efektywnych zadania wielokryterialnego nie można traktować jako ostatecznego rozwiązania odpowiedniego problemu decyzyjnego. Zauważmy, że dla dowolnej racjonalnej relacji preferencji $\preceq$ rozwiązania dopuszczalne generujące wektory ocen minimalne w sensie tej relacji należą do zbioru rozwiązań efektywnych (wniosek 1.5). Co więcej, dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}$ istnieje racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$ (wniosek 1.6). Zatem wybór specyficznego rozwiązania efektywnego faktycznie oznacza wybór relacji preferencji $\preceq$. W wielokryterialnych problemach decyzyjnych relacja preferencji nie jest znana a priori i dlatego ostatecznego wyboru rozwiązania może dokonać jedynie decydent. Ze względu na liczność zbioru rozwiązań efektywnych, nawet w przypadku wyznaczenia metodami obliczeniowymi całego zbioru rozwiązań efektywnych decydent nie może dokonać wyboru rozwiązania bez pomocy odpowiedniego interakcyjnego systemu informatycznego. System taki, nazywany tu *systemem wspomagania decyzji* (SWD), umożliwia sterowany przegląd zbioru rozwiązań efektywnych. Na podstawie podawanych przez decydenta wartości pewnych *parametrów sterujących* system przedstawia różne rozwiązania efektywne do analizy. Tym samym parametry sterujące określają pewną *parametryzację* zbioru rozwiązań efektywnych. Zauważmy, że taka parametryczna analiza zbioru rozwiązań efektywnych pozwala uniknąć konieczności bezpośredniego wyznaczania całego zbioru rozwiązań efektywnych. Zamiast tego SWD zawierający odpowiedni moduł optymalizacyjny może każdorazowo wyznaczać jedno rozwiązanie efektywne odpowiadające bieżącym wartościom parametrów sterujących. Zatem metodologia ta pozwala na analizę zarówno problemów ciągłych, jak i dyskretnych. Istotne jest tu jednak, aby system gwarantował spełnienie postulatu *zupełności* parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych, czyli aby dla każdego niezdominowanego wektora ocen istniał zestaw wartości parametrów sterujących, przy których system wyznaczy rozwiązanie efektywne generujące ten wektor ocen.

Zgodnie z bieżącym trendem rozwoju badań operacyjnych (por. Geoffrion, 1992; Wierzbicki, 1993), wielokryterialne problemy decyzyjne rozwiązuje się za pomocą interaktywnych systemów wspomagania decyzji. Dla modelu racjonalnych preferencji, czyli dla interaktywnego wyznaczania rozwiązań efektywnych, istnieje rozwinięta metodologia. Interaktywne techniki analizy zbioru rozwiązań efektywnych wykorzystują *parametryczną* skalaryzację wielokryterialnego zadania (1.7)

$$\min_{\mathbf{x}} \{(s(\mathbf{u}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}, \qquad \mathbf{u} \in U \tag{1.45}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem parametrów sterujących, a $s : U \times Y \to R$ funkcją skalaryzującą.

Istotne jest tu, aby skalaryzacja spełniała zasadę efektywności, czyli żeby dla każdego wektora parametrów sterujących $\mathbf{u} \in U$ rozwiązanie optymalne skalarnego zadania (1.45) było rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego (1.7). Parametryczna skalaryzacja (1.45) powinna też spełniać warunek zupełności parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych (por. Wierzbicki, 1986). To znaczy, dla każdego $\mathbf{x}^0$ rozwiązania efektywnego zadania (1.7) powinien istnieć wektor parametrów sterujących $\mathbf{u}^0 \in U$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (1.45). Mówimy wtedy, że parametryczna skalaryzacja (1.45) stanowi zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych wielokryterialnego zadania (1.7). Zauważmy, że zgodnie z wnioskiem 1.15 i twierdzeniem 1.9 metoda wag, czyli parametryczna skalaryzacja (1.19) z dodatnimi wagami w_i, stanowi zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych zadania WPL. Nie jest to jednak prawdą dla zadań WPLD (por. przykład 1.2).

Dla wykorzystania parametrycznej skalaryzacji w systemie wspomagania decyzji istotne jest, aby zadania skalarne (1.45) były względnie łatwe obliczeniowo, czyli funkcja skalaryzująca s nie powinna wprowadzać do modelu istotnych utrudnień obliczeniowych. Na przykład, dla zadań WPL zadanie skalarne (1.45) powinno być zadaniem programowania liniowego. Parametry sterujące powinny reprezentować łatwo rozumiane przez decydenta wielkości rzeczywiste charakteryzujące jego preferencje. Parametryczna skalaryzacja spełniająca wszystkie powyższe postulaty umożliwia implementację systemu wspomagania decyzji, pozwalającego wyznaczyć rozwiązanie efektywne zgodne z preferencjami decydenta.

Parametryczna skalaryzacja (1.45) definiuje parametryczną relację preferencji $\preceq_{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{y}' \preceq_{\mathbf{u}} \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad s(\mathbf{u}, \mathbf{y}') \leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}'')$$

Zamiast parametrycznej skalaryzacji można więc rozważać ogólniejsze parametryczne relacje preferencji. Aby był spełniony postulat efektywności, powinny to być racjonalne relacje preferencji. Ponadto, dla dobrego postawienia odpowiedniego zadania minimalizacji, powinien zawsze istnieć element najmniejszy w sensie relacji $\preceq_{\mathbf{u}}$. Własność tę mają relacje porządku liniowego. W szczególności relacja porządku leksykograficznego spełnia powyższe wymagania i zapewnia możliwość wyznaczenia elementu najmniejszego. Dlatego zadanie (1.45) może być zastąpione skalaryzacją leksykograficzną

$$\operatorname*{lexmin}_{\mathbf{x}} \{(\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\}, \qquad \mathbf{u} \in U \tag{1.46}$$

gdzie $\mathbf{s}$ jest wektorową funkcją skalaryzującą.

Zionts i Wallenius (1976, 1983) opracowali metody interaktywnej identyfikacji funkcji użyteczności (Fishburn, 1970; Keeney i Raiffa, 1976). Opierają się one na założeniu określonej postaci funkcji użyteczności o nieznanych współczynnikach, czyli wykorzystują pewną parametryczną skalaryzację typu (1.45). Nieznane współczynniki funkcji użyteczności nie reprezentują jednak łatwo rozumianych przez decydenta wielkości rzeczywistych. Dlatego w metodach Zionts i Walleniusa są one identyfikowane w ramach procesu interaktywnego, w czasie którego decydent porównuje wektory ocen przedstawianych mu rozwiązań efektywnych. Wyniki porównań poszczególnych par rozwiązań pozwalają stopniowo zawężać zbiór potencjalnych wartości nieznanych współczynników i w wyniku otrzymujemy proces zbieżny do poszukiwanej funkcji użyteczności. Wymaga to jednak, aby decydent był w pełni konsekwentny w swoich porównaniach. Tym samym, takie podejście nie dopuszcza możliwości ewolucji preferencji decydenta w wyniku lepszego poznawania problemu decyzyjnego w trakcie jego analizy z systemem wspomagania decyzji. Kłóci się to z zasadniczą koncepcją SWD jako narzędzia analizy problemu decyzyjnego wspierającego proces podejmowania decyzji przez decydenta. W tej pracy interesują nas otwarte systemy wspomagania decyzji nie narzucające decydentowi żadnego sztywnego scenariusza analizy problemu decyzyjnego i dopuszczające możliwość modyfikacji jego preferencji w trakcie analizy, w wyniku poznawania specyfiki problemu decyzyjnego (Wierzbicki, 1993). Dla takich systemów zasadniczym narzędziem matematycznym i — co za tym idzie — jądrem metodologicznym jest odpowiednia parametryczna skalaryzacja (1.45) lub (1.46) spełniająca warunek zupełnej parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych. Dlatego praca ta koncentruje się na analizie różnych parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych zadań WPL i WPLD z punktu widzenia reprezentowanych przez nie modeli preferencji i ich przydatności w praktycznych systemach wspomagania decyzji.

W większości systemów wspomagania decyzji jako pierwszy krok analizy wielokryterialnej stosuje się jednokryterialną optymalizację względem każdej funkcji oceny z osobna. Umożliwia to weryfikację, czy rozważany problem wielokryterialny jest zadaniem regularnym. W wyniku optymalizacji pojedynczych funkcji oceny powstaje tak zwana *macierz realizacji celów* (pay–off matrix, Steuer, 1986), która pozwala na oszacowanie zakresu zmian poszczególnych funkcji oceny na zbiorze rozwiązań efektywnych. Macierz ta dostarcza również pewnych informacji na temat tzw. konfliktowości funkcji oceny (por. Rietveld, 1980; Galas, 1986). Macierz realizacji celów jest tablicą zawierającą wartości wszystkich funkcji oceny (wierszy) otrzymywane podczas rozwiązywania poszczególnych problemów jednokryterialnych (kolumn). To znaczy, elementy macierzy realizacji celów $\mathbf{K} = (k_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ przyjmują wartości $k_{ij} = f_i(\mathbf{x}^j)$, gdzie $\mathbf{x}^j$ jest rozwiązaniem optymalnym jednokryterialnego zadania (1.17), czyli min $\{(f_j(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$.

Macierz realizacji celów generuje *wektor utopii* $\mathbf{y}^u$ reprezentujący najlepsze wartości każdej funkcji oceny rozpatrywanej osobno, czyli $y_i^u = k_{ii} = f_i(\mathbf{x}^i)$. Wektor utopii stanowi dolne ograniczenie wszystkich osiągalnych wektorów ocen, tzn. $\mathbf{y}^u \leqq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in A$. Jest on zwykle nieosiągalny ($\mathbf{y}^u \notin A$), czyli nie ma rozwiązania dopuszczalnego z takimi wartościami funkcji oceny. Jeżeli istnieje wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^u$, to $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania wielokryterialnego w sensie każdego racjonalnego modelu preferencji. Sytuacja taka może się zdarzyć tylko wtedy, gdy nie ma konfliktu pomiędzy funkcjami oceny.

Zadania optymalizacji jednokryterialnej (1.17) mogą mieć niejednoznaczne rozwiązania optymalne i generować rozwiązania nieefektywne (por. twierdzenie 1.13) o zawyżonych wartościach ocen nie podlegających minimalizacji w danym zadaniu. Zatem, w ogólnym przypadku, macierz realizacji celów jest niejednoznacznie określona i współczynniki wektora utopii stanowią jedyną informację niezależną od wyboru rozwiązania optymalnego w zadaniach jednokryterialnych. Dla zapewnienia użyteczności pozostałych współczynników konieczne jest zastosowanie techniki regularyzacyjnej podczas wyliczania macierzy realizacji celów, tak aby każde jednokryterialne rozwiązanie optymalne było jednocześnie rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego. W przypadku niewielkiej liczby funkcji oceny (małe m) możliwe jest wyznaczenie rozszerzonej macierzy realizacji celów, opartej na rozwiązaniach zadań leksykograficznych (1.33) dla wszystkich możliwych hierarchii funcji oceny (dla wszystkich permutacji τ). W przypadku większej liczby funkcji oceny musimy ograniczyć się do rozwiązania m zadań jednokryterialnych z regularyzacją typu (1.35) w celu zapewnienia efektywności wyznaczanych rozwiązań optymalnych.

Z macierzy realizacji celów można wyznaczyć również tzw. *wektor nadiru* $\mathbf{y}^n$, wyrażający najgorsze wartości dla każdej funkcji oceny odnotowane podczas poszczególnych optymalizacji jednokryterialnych, czyli $y_i^n = \max_{j=1,\ldots,m} k_{ij} = \max_{j=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}^j)$. Składowe wektora nadiru nie muszą wyrażać najgorszych wartości odpowiednich funkcji oceny na całym zbiorze rozwiązań efektywnych. To znaczy, w ogólnym przypadku nie jest prawdą, że $\mathbf{y}^n \geqq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in A_N$. Wyrażają one jedynie najgorsze (największe) wartości każdej funkcji zanotowane podczas optymalizacji innych funkcji. Wyznaczenie wektora $\mathbf{y}^w$ takiego, że $\mathbf{y}^w \geqq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in A_N$ jest złożonym zadaniem obliczeniowym (Isermann i Steuer, 1987; Benson, 1992). Wektor nadiru stanowi dolne ograniczenie wektora $\mathbf{y}^w$ i na ogól jego dobre przybliżenie wystarczające do wstępnego zorientowania się w zakresach zmienności poszczególnych ocen dla różnych rozwiązań efektywnych.

Przykład 1.4. Stosując standardową optymalizację jednokryterialną (bez regularyzacji) przy wielokryterialnej optymalizacji rejonów działania przychodni (Ogryczak i Malczewski, 1987), dla jednego z zestawów danych otrzymaliśmy macierz realizacji celów przedstawioną w tablicy 1.1. Sugeruje ona występowanie konfliktu pomiędzy funkcją oceny f_1 i pozostałymi dwoma ocenami, jak również pomiędzy funkcjami oceny f_2 i f_3.

Tablica 1.1

Macierz realizacji celów

Tablica 1.1:

Funkcja oceny	Minimalizowana funkcja f_1	f_2	f_3	Utopia	Nadir
f_1	2.227	2.230	2.228	2.227	2.230
f_2	1.840	1.633	1.840	1.633	1.840
f_3	3470	3470	3443	3443	3470

Stosując optymalizacje leksykograficzne (1.33) otrzymaliśmy rozszerzoną macierz realizacji celów przedstawioną w tablicy 1.2. Obie macierze generują te same wektory utopii i nadiru. Jednakże z rozszerzonej macierzy realizacji celów widać brak konfliktu pomiędzy funkcjami oceny f_2 i f_3. Rozwiązania odpowiadające hierachii $f_2/f_3/f_1$ i $f_3/f_2/f_1$ generują te same wektory ocen o najmniejszych możliwych wartościach ocen f_2 i f_3. Istnieje jedynie konflikt pomiędzy f_1 a dwoma pozostałymi ocenami. Uwzględniając fakt bardzo małych względnych wahań oceny f_1 (poniżej 0.15%), możemy uznać, że praktycznie nie ma konfliktu pomiędzy ocenami i przyjąć rozwiązanie minimalizujące jednocześnie f_2 i f_3 (odpowiadające hierachii $f_2/f_3/f_1$ i $f_3/f_2/f_1$) jako zadowalające rozwiązanie problemu wielokryterialnego.

$\square$

Tablica 1.2

Rozszerzona macierz realizacji celów

Tablica 1.2:

Funkcja oceny	Minimalizowana funkcja					
	$f_1/f_2/f_3$	$f_1/f_3/f_2$	$f_2/f_1/f_3$	$f_2/f_3/f_1$	$f_3/f_1/f_2$	$f_3/f_2/f_1$
f_1	2.227	2.227	2.228	2.230	2.228	2.230
f_2	1.840	1.840	1.633	1.633	1.840	1.633
f_3	3470	3470	3470	3443	3443	3443

Rozdział 2

Programowanie celowe

2.1 Modele programowania celowego

Dobrym narzędziem dla interaktywnych systemów wspomagania decyzji wydaje się być *programowanie celowe* (por. Ignizio, 1982; Romero, 1991). Programowanie celowe (PC) zostało wprowadzone przez Charnesa i Coopera (1961) i dalej rozwijane przez Ijiri (1965), Lee (1972) i Ignizio (1976). Obecnie jest to najpowszechniej stosowana technika analizy wielokryterialnych problemów decyzyjnych (por. White, 1990). W programowaniu celowym głównymi parametrami sterującymi są *poziomy aspiracji* traktowane jako cele do osiągnięcia dla poszczególnych funkcji oceny. To znaczy, dla każdej funkcji oceny f_i zadawany jest poziom aspiracji a_i. Dla każdego rozwiązania dopuszczalnego $\mathbf{x} \in Q$ określone są wtedy odchylenia w dół i w górę wartości funkcji oceny od poziomów aspiracji, odpowiednio jako

$$d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \quad \text{i} \quad d_i^+ = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1}$$

gdzie $(.)_+$ oznacza część nieujemną liczby. Za rozwiązanie optymalne dla problemu programowania celowego uważa się rozwiązanie dopuszczalne minimalizujące odchylenia od poziomów aspiracji. Miara odchylenia jest określona przez tzw. *funkcję osiągnięcia*. Najprostszą i najczęściej stosowaną funkcją osiągnięcia jest ważona suma odchyleń

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \sum_{i=1}^{m} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \tag{2.2}$$

gdzie w_i^- i w_i^+ są nieujemnymi wagami odpowiadającymi poszczególnym odchyleniom.

Odchylenia są zwykle wprowadzane do modelu PC za pomocą dodatkowego układu *równań celowych*

$$f_i(\mathbf{x}) + d_i^- - d_i^+ = a_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.3}$$

$$d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.4}$$

gdzie d_i^-, d_i^+ są nieujemnymi zmiennymi stanu wyrażającymi odpowiednio odchylenie w dół i w górę aktualnej wartości i-tej funkcji oceny od odpowiedniego poziomu aspiracji a_i. Zauważmy, że zmienne d_i^- i d_i^+ zdefiniowane za pomocą równań celowych (2.3)–(2.4) wyrażają odpowiednie odchylenia (2.1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$d_i^- d_i^+ = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.5}$$

W równaniach celowych (2.3)–(2.4) warunek ten nie występuje i dlatego istnieją rozwiązania dopuszczalne $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ nie spełniające (2.1). W programowaniu celowym zakłada się jednak, że wagi w_i^- i w_i^+ są nieujemne. Jeżeli ponadto dla każdego i przynajmniej jedna z wag jest dodatnia, czyli

$$w_i^- + w_i^+ > 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.6}$$

to warunek (2.5) jest spełniony przez wszystkie rozwiązania optymalne. Co więcej, warunek (2.6) gwarantuje spełnienie (2.5) w rozwiązaniu optymalnym nawet bez założenia nieujemności wag. Natomiast w przypadku, gdy $w_{i_0}^- = w_{i_0}^+ = 0$ dla pewnego i_0, istnieją rozwiązania optymalne $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ nie spełniające warunku (2.5). Zauważmy jednak, że rozwiązaniem problemu decyzyjnego jest wektor $\mathbf{x}$, a nie cała trójka $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$. Dlatego przy stosowaniu programowania celowego istotne jest nie tyle zagwarantowanie, że zmienne d_i^- i d_i^+ wyrażają odpowiednie odchylenia (2.1), co fakt, że wyznaczony optymalny wektor $\mathbf{x}$ minimalizuje zadaną funkcję odchyleń. Innymi słowy, interesuje nas, kiedy wektor $\mathbf{x}$ będący rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\min \{g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \; : \; \mathbf{x} \in Q \text{ oraz (2.3) i (2.4)}\} \tag{2.7}$$

jest jednocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\min \{g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \; : \; \mathbf{x} \in Q \text{ oraz (2.1)}\} \tag{2.8}$$

Twierdzenie 2.1 *W przypadku ważonej funkcji osiągnięcia (2.2) z wagami spełniającymi warunek*

$$w_i^- + w_i^+ \geq 0 \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.9}$$

problemy (2.7) i (2.8) są sobie równoważne w tym sensie, że wektor dopuszczalny $\mathbf{x} \in Q$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym problemu (2.8).*

Dowód. Wektor $\mathbf{x}$ jest dopuszczalny dla problemu (2.8) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dopuszczalny dla rozszerzonego problemu (2.7). Dokładniej, każdemu wektorowi $\mathbf{x}$ dopuszczalnemu dla problemu (2.8) odpowiada zbiór $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$ rozwiązań dopuszczalnych dla problemu (2.7), gdzie

$$d_i^-(\mathbf{t}) = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ + t_i, \quad d_i^+(\mathbf{t}) = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ + t_i, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)^T, \; t_i \geq 0$$

Obliczając wartość funkcji osiągnięcia dla $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (w_i^- d_i^-(\mathbf{t}) + w_i^+ d_i^+(\mathbf{t})) \; &= \; \sum_{i=1}^m (w_i^-(a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ + w_i^+(f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+) + \\ &+ \; \sum_{i=1}^m t_i(w_i^- + w_i^+) \end{aligned}$$

Zatem, na mocy nierówności (2.9), $g(\mathbf{d}^-(\mathbf{0}), \mathbf{d}^+(\mathbf{0})) \leq g(\mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia. ■

Funkcja osiągnięcia (2.2) ma postać ważonej normy l_1 (nie jest ona normą ze względu na możliwość występowania wag zerowych). Do definicji funkcji osiągnięcia mogą być również użyte inne normy l_p: $\|\mathbf{y}\|_p = (\sum_{i=1}^m |y_i|^p)^{1/p}$. Większość z nich prowadzi jednak do nieliniowych funkcji osiągnięcia, co stanowi istotną komplikację modelu w przypadku zadań WPL. Dlatego poza normą l_1 w programowaniu celowym stosuje się jedynie niekiedy normę l_∞ (przypadek graniczny dla $p \to \infty$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |y_i|$), co prowadzi do tzw. *minimaksowej funkcji osiągnięcia*

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \max_{i=1,\dots,m} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \tag{2.10}$$

Zadanie programowania celowego (2.7) z minimaksową funkcją osiągnięcia (2.10) może generować optymalne wartości zmiennych d_i^- i d_i^+ nie spełniające warunku (2.5) nawet w przypadku nieujemnych wag spełniających warunek (2.6). Jest to zapewne jedna z przyczyn znacznie rzadszego stosowania minimaksowej funkcji osiągnięcia. Niemniej jednak dla minimaksowego programowania celowego prawdziwe jest następujący odpowiednik twierdzenia 2.1.

Twierdzenie 2.2 *W przypadku minimaksowej funkcji osiągnięcia (2.10) z wagami spełniającymi warunek (2.9) problemy (2.7) i (2.8) są sobie równoważne w tym sensie, że wektor dopuszczalny* $\mathbf{x} \in Q$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym problemu (2.8).*

Dowód. Wektor $\mathbf{x}$ jest dopuszczalny dla problemu (2.8) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dopuszczalny dla rozszerzonego problemu (2.7). Dokładniej, każdemu wektorowi $\mathbf{x}$ dopuszczalnemu dla problemu (2.8) odpowiada zbiór $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$ rozwiązań dopuszczalnych dla problemu (2.7), gdzie

$$d_i^-(\mathbf{t}) = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ + t_i, \quad d_i^+(\mathbf{t}) = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ + t_i, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)^T,\ t_i \geq 0$$

Zauważmy, że

$$w_i^- d_i^-(\mathbf{t}) + w_i^+ d_i^+(\mathbf{t}) = w_i^-(a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ + w_i^+(f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ + t_i(w_i^- + w_i^+)$$

Zatem, na mocy nierówności (2.9), $g(\mathbf{d}^-(\mathbf{0}), \mathbf{d}^+(\mathbf{0})) \leq g(\mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia. ■

Koncepcja stosowania poziomów aspiracji jako parametrów sterujących do modelowania preferencji w interaktywnym systemie wspomagania decyzji jest łatwo rozumiana i chętnie akceptowana przez użytkowników tych systemów. Funkcje osiągnięcia (2.2) i (2.10) wymagają jednak zdefiniowania również wag dla poszczególnych odchyleń, co nie jest łatwe. Oznacza to konieczność określenia stóp substytucji dla poszczególnych ocen. Dlatego powszechnie stosowane jest tzw. *leksykograficzne programowanie celowe* (Ignizio, 1982), gdzie wprowadza się hierarchię minimalizacji pewnych grup odchyleń. Ustalenie odpowiednich wag jest wtedy istotne tylko w ramach grupy odchyleń minimalizowanych na tym samym poziomie priorytetu (hierarchii). W leksykograficznym programowaniu celowym poszukuje się minimum leksykograficznego wektorowej funkcji osiągnięcia

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = (g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+), g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+), \ldots, g_p(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)) \tag{2.11}$$

ze składowymi $g_k(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ w postaci standardowych funkcji osiągnięcia (2.2), czyli

$$g_k(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \sum_{i \in I} (w_{ki}^- d_i^- + w_{ki}^+ d_i^+) \tag{2.12}$$

gdzie

w_{ki}^- współczynnik wagowy (waga) zmiennej d_i^- dla priorytetu k,
w_{ki}^+ współczynnik wagowy (waga) zmiennej d_i^+ dla priorytetu k.

Istnieje też możliwość wykorzystania w leksykograficznym programowaniu celowym minimaksowych funkcji osiągnięcia (2.10). Zauważmy, że wszystkie składowe $g_k(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ są formalnie funkcjami tych samych wektorów odchyleń $\mathbf{d}^-$ i $\mathbf{d}^+$. W praktyce każda z nich zależy tylko od pewnego podzbioru zmiennych d_i^- i d_i^+ o niezerowych odpowiednich współczynnikach wagowych w_{ki}^- i w_{ki}^+.

W przypadku leksykograficznego programowania celowego wektor $\mathbf{x}$ będący rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\text{lexmin } \{\mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \ : \ \mathbf{x} \in Q \text{ oraz (2.3) i (2.4)}\} \tag{2.13}$$

jest jednocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\text{lexmin } \{\mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \ : \ \mathbf{x} \in Q \text{ oraz (2.1)}\} \tag{2.14}$$

o ile macierze wag $\mathbf{W}^- = (w_{ki}^-)_{k=1,\ldots,p;i=1,\ldots,m}$ i $\mathbf{W}^+ = (w_{ki}^+)_{k=1,\ldots,p;i=1,\ldots,m}$ spełniają następującą nierówność leksykograficzną

$$\mathbf{W}^- + \mathbf{W}^+ \geq_{lex} \mathbf{0} \tag{2.15}$$

Tu i w dalszej części pracy przyjmujemy, że nierówność leksykograficzna zastowana do macierzy oznacza układ nierówności leksykograficznych dla poszczególnych kolumn macierzy. To znaczy, warunek (2.15) określa układ nierówności

$$\mathbf{W}_i^- + \mathbf{W}_i^+ \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

gdzie $\mathbf{W}_i^- = (w_{ki}^-)_{k=1,\ldots,p}$ i $\mathbf{W}_i^+ = (w_{ki}^+)_{k=1,\ldots,p}$ oznaczają i–te kolumny odpowiednich macierzy wag.

Twierdzenie 2.3 *W przypadku funkcji osiągnięcia (2.11)–(2.12) z macierzami wag spełniającymi nierówność (2.15) problemy (2.13) i (2.14) są sobie równoważne w tym sensie, że wektor dopuszczalny $\mathbf{x} \in Q$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.13) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym problemu (2.14).*

Dowód. Wektor $\mathbf{x}$ jest dopuszczalny dla problemu (2.14) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dopuszczalny dla rozszerzonego problemu (2.13). Dokładniej, każdemu wektorowi $\mathbf{x}$ dopuszczalnemu dla problemu (2.14) odpowiada zbiór $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$ rozwiązań dopuszczalnych dla problemu (2.13), gdzie

$$d_i^-(\mathbf{t}) = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ + t_i, \quad d_i^+(\mathbf{t}) = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ + t_i, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)^T, \ t_i \geq 0$$

Obliczając funkcję osiągnięcia dla $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$ otrzymujemy

$$\mathbf{W}^-\mathbf{d}^-(\mathbf{t}) + \mathbf{W}^+\mathbf{d}^+(\mathbf{t}) = \mathbf{W}^-(\mathbf{a} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{a})_+ + (\mathbf{W}^- + \mathbf{W}^+)\mathbf{t}$$

Zatem, na mocy nierówności (2.15), $\mathbf{g}(\mathbf{d}^-(\mathbf{0}), \mathbf{d}^+(\mathbf{0})) \leq_{lex} \mathbf{g}(\mathbf{d}^-(\mathbf{t}), \mathbf{d}^+(\mathbf{t}))$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia. ■

W rozważanych sformułowaniach zadań programowania celowego występował zbiór dopuszczalny Q. W typowych modelach programowania celowego (por. Ignizio, 1982) warunki dopuszczalności są traktowane jako pewne cele do osiągnięcia. Zauważmy, że ograniczenia zbioru dopuszczalnego mogą być interpretowane jako wymagania, by pewne funkcje zmiennych decyzyjnych osiągały określone wartości. Funkcje te można interpretować jako dodatkowe funkcje oceny, a wymagane wartości jako odpowiadające im cele. Każde ograniczenie jest zastępowane równaniem celowym z celem zdefiniowanym jako odpowiedni współczynnik prawej strony

$$f_i(\mathbf{x}) + d_i^- - d_i^+ = a_i$$

Dla każdego celu określa się odchylenia niedopuszczalne w jego realizacji. Mają one być równe zeru, aby spełnione były ograniczenia modelu. Dokładniej, nierówności $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ odpowiada niedopuszczalne odchylenie w górę d_i^+; nierówności $f_i(\mathbf{x}) \geq a_i$ odpowiada niedopuszczalne odchylenie w dół d_i^-, a równaniu $f_i(\mathbf{x}) = a_i$ odpowiadają niedopuszczalne oba odchylenia d_i^+ i d_i^-.

Możliwe są dwa podejścia do modelowania odchyleń niedopuszczalnych. Pierwsze z nich, nazywane techniką celów absolutnych (Ignizio, 1976), wykorzystuje leksykograficzną funkcję osiągnięcia. W tym podejściu sumę wszystkich niedopuszczalnych odchyleń traktuje się jako skalarną funkcję osiągnięcia minimalizowaną na pierwszym (najwyższym) poziomie priorytetu. Pozwala to na elastyczne traktowanie ograniczeń.

Technika celów absolutnych pozwala na uniknięcie problemu dodatkowych ograniczeń w leksykograficznym modelu PC. Jednakże zastosowanie tej techniki do prostego ważonego modelu PC przekształca go w model leksykograficzny. W tej sytuacji lepsze wydaje się drugie podejście, nazywane techniką sztywnych celów. W tym podejściu żąda się, by niedopuszczalne odchylenia były równe zeru i pomija się je w matematycznym sformułowaniu modelu. Technika sztywnych celów może być używana zarówno do modelu leksykograficznego, jak i ważonego, nie naruszając ich specyfiki. Pomijanie niektórych odchyleń powoduje jednak pewną nieregularność w opisie modelu. Dlatego do rozważań teoretycznych, gdzie istotna jest jednorodność opisu modelu, będziemy stosować odmienny sposób reprezentacji sztywnych celów. Zamiast wymuszać zerowanie niedopuszczalnych odchyleń przez pomijanie odpowiednich zmiennych stanu w modelu PC, ten sam efekt można osiągnać nadając wartość $+\infty$ odpowiednim współczynnikom wag. Zapewnia to regularną postać modelu PC, a jedyna nieregularność jest związana z występowaniem nieskończonych współczynników. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $0 \cdot \infty = 0$ i $0 \cdot (-\infty) = 0$.

Typowe sformułowanie leksykograficznego liniowego problemu PC jest następujące

wyznaczyć wektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ minimalizujący leksykograficznie

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = (g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+), g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+), \ldots, g_p(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)) \tag{2.16}$$

pod warunkiem, że

$$\sum_{j\in J} c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad \text{dla } i \in I \tag{2.17}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0} \tag{2.18}$$

gdzie

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$	zbiór indeksów funkcji oceny,
$J = \{1, 2, \ldots, n\}$	zbiór indeksów zmiennych decyzyjnych,
x_j	j–ta zmienna decyzyjna (strukturalna),
c_{ij}	współczynnik przy x_j w i–tej funkcji oceny,
a_i	cel dla i–tej funkcji oceny,
d_i^-	odchylenie w dół dla i–tej funkcji oceny,
d_i^+	odchylenie w górę dla i–tej funkcji oceny,
$g_k(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$	funkcja osiągnięcia postaci (2.12) minimalizowana dla priorytetu k ($k = 1, 2, \ldots, p$).

Wiele zastosowań praktycznych wymaga wprowadzenia tzw. *celów przedziałowych* (Romero, 1991). Standardowy cel dla funkcji oceny f_i jest zdefiniowny przez poziom aspiracji jako punkt a_i. Cele przedziałowe stanowią uogólnienie tak określonego celu na przedział liczbowy $[a_i^-; a_i^+]$ z odchyleniami określonymi odpowiednio jako $d_i^- = (a_i^- - f_i(x))_+$ i $d_i^+ = (f_i(x) - a_i^+)_+$. Standardowe cele punktowe występują w modelu (2.16)–(2.18) jako prawe strony równań celowych (2.18). Dla rozważań dopuszczających występowanie celów przedziałowych wygodniej jest reprezentować cele jako ograniczenia na zmienne, podczas gdy prawe strony równań celowych są równe zeru. Prowadzi to do innej postaci problemu PC, w której zależności (2.17) i (2.18) są zastąpione następującymi

$$\sum_{j\in J} c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = 0 \qquad \text{dla } i \in I \tag{2.19}$$

$$b_j^- \le x_j \le b_j^+ \qquad \text{dla } j \in J \tag{2.20}$$

$$\mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0} \tag{2.21}$$

gdzie pewne ograniczenia b_j^+ i b_j^- mogą przyjmować wartości odpowiednio ∞ lub $-\infty$. Zauważmy, że dla dowolnego problemu PC zależności (2.17) i (2.18) można zastąpić zależnościami (2.19)–(2.21). Na przykład wprowadzając dodatkowe zmienne (logiczne), analogicznie jak w standardowych pakietach programowania liniowego (por. Ogryczak, 1989). Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 2.1. Rozpatrzmy liniowy model PC zdefiniowany przez liniowe funkcje oceny f_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) i odpowiadające im przedziały (lub punkty) satysfakcjonujących wartości $[a_i^-; a_i^+]$. Zmienne decyzyjne x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) muszą należeć do pewnych dopuszczalnych przedziałów $[b_j^-; b_j^+]$. Model ten może być łatwo sformułowany w postaci (2.19)–(2.21). W tym celu przypisujemy każdej funkcji f_i zmienną logiczną y_i w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
f_i(\mathbf{x}) - y_i + d_i^- - d_i^+ &= 0 \qquad && \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\
b_j^- \leq x_j &\leq b_j^+ && \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \\
a_i^- \leq y_i &\leq a_i^+ && \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy w ten sposób zależności w pożądanej postaci z $(n+m)$–wymiarowym wektorem zmiennych strukturalnych $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ i odpowiednimi wektorami ograniczeń $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^- \\ \mathbf{a}^- \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{a}^+ \end{pmatrix}$. □

Dla ułatwienia dyskusji teoretycznych, problem (2.16) i (2.19)–(2.21) będziemy zapisywać w postaci macierzowej

wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ minimalizujący leksykograficznie

$$[(\mathbf{w}_1^- \mathbf{d}^- + \mathbf{w}_1^+ \mathbf{d}^+), \ldots, (\mathbf{w}_p^- \mathbf{d}^- + \mathbf{w}_p^+ \mathbf{d}^+)]^T = \mathbf{W}^- \mathbf{d}^- + \mathbf{W}^+ \mathbf{d}^+ \tag{2.22}$$

pod warunkiem, że

$$\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}^- - \mathbf{d}^+ = \mathbf{0} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+ \tag{2.24}$$

$$\mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0} \tag{2.25}$$

gdzie

- $\mathbf{w}_k^-$ wektor wiersz wymiaru $1 \times m$ jest wektorem wag zmiennych odchyleń w dół dla priorytetu k,
- $\mathbf{w}_k^+$ wektor wiersz wymiaru $1 \times m$ jest wektorem wag zmiennych odchyleń w górę dla priorytetu k,
- $\mathbf{W}^-$ macierz wymiaru $p \times m$ składająca się z wierszy $\mathbf{w}_k^-$,
- $\mathbf{W}^+$ macierz wymiaru $p \times m$ składająca się z wierszy $\mathbf{w}_k^+$,
- $\mathbf{C}$ macierz współczynników wymiaru $m \times n$,
- $\mathbf{b}^-$ wektor kolumna wymiaru $n \times 1$ jest wektorem dolnych ograniczeń na zmienne decyzyjne,
- $\mathbf{b}^+$ wektor kolumna wymiaru $n \times 1$ jest wektorem górnych ograniczeń na zmienne decyzyjne,
- $\mathbf{x}$ wektor kolumna wymiaru $n \times 1$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych,
- $\mathbf{d}^-$ wektor kolumna wymiaru $m \times 1$ jest wektorem zmiennych odchyleń w dół,
- $\mathbf{d}^+$ wektor kolumna wymiaru $m \times 1$ jest wektorem zmiennych odchyleń w górę.

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, dla niektórych współczynników w modelu (2.22)–(2.25) dopuszczamy nieskończone wartości. Dokładniej, mogą to być następujące współczynniki:

1^0 $b_j^- = -\infty$ (x_j jest nieograniczone z dołu),

2^0 $b_j^+ = +\infty$ (x_j jest nieograniczone z góry),

3^0 $w_{1i}^- = w_{2i}^- = \ldots = w_{pi}^- = +\infty$ ($d_i^- = 0$, niedopuszczalne jest odchylenie w dół dla celu i),

4^0 $w_{1i}^+ = w_{2i}^+ = \ldots = w_{pi}^+ = +\infty$ ($d_i^+ = 0$, niedopuszczalne jest odchylenie w górę dla celu i).

Zauważmy, że jeśli współczynniki wag nie spełniają nierówności (2.15), to problem (2.22)–(2.25) jest nieograniczony. Podobnie, nie ma powodów do rozpatrywania modelu PC nie spełniającego nierówności

$$\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \geqq \mathbf{0} \tag{2.26}$$

Problemy nie spełniające tej nierówności są jawnie sprzeczne. O problemie PC, dla którego spełnione są obie nierówności (2.15) i (2.26), mówimy, że jest problemem dobrze postawionym i dalej będziemy się zajmować tylko takimi problemami.

2.2 Symetryczna teoria dualności

Ważną zaletą programowania celowego jest możliwość rozwinięcia kompletnej teorii dualności dla liniowych (ważonych i leksykograficznych) modeli programowania celowego i wykorzystania jej do analizy wrażliwości rozwiązania. W tym podrozdziale przedstawiamy symetryczną teorię dualności liniowych zadań programowania celowego (Ogryczak, 1988), w której zadanie dualne do zadania programowania celowego jest też zadaniem programowaniem celowego. Dla pary dualnych zadań programowania celowego wyprowadzimy odpowiedniki klasycznych zależności dualnych w programowaniu liniowym, łącznie z własnością punktu siodłowego i wzorami na wartości krańcowe.

Dla uproszczenia zapisu posłużymy się jawną postacią odchyleń w modelu PC. To znaczy, zastąpimy $\mathbf{d}^-$ i $\mathbf{d}^+$ odpowiednio przez $(-\mathbf{Cx})_+$ i $(\mathbf{Cx})_+$, gdzie operator $(.)_+$ zastosowany do wektora działa na wszystkich współrzędnych wektora. Sformułujmy pierwotny problem PC wyrażony wzorami (2.22)–(2.25) jako problem leksykograficzny

$$\text{PPC}: \quad \text{lexmin}\,\{\mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+ \ : \ \mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+\} \tag{2.27}$$

Wektor $\mathbf{x}$ nazywamy dopuszczalnym dla pierwotnego problemu PC, jeśli spełnia nierówność $\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+$. Dopuszczalny wektor $\mathbf{x}^0$ nazywamy optymalnym, jeśli minimalizuje leksykograficznie wektorową funkcję osiągnięcia $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+$ na całym zbiorze dopuszczalnym, to znaczy

$$\mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx}^0)_+ \leq_{lex} \mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+$$

dla dowolnego dopuszczalnego $\mathbf{x}$. Na mocy twierdzenia 2.3 dobrze postawiony problem (2.22)–(2.25) jest równoważny problemowi (2.27). Problem (2.22)–(2.25) będziemy traktowali jako rozszerzoną postać pierwotnego problemu PC (2.27).

Zauważmy, że funkcję osiągnięcia problemu PPC (2.27) można wyrazić następująco

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+ = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{W}^- + \mathbf{W}^+)|\mathbf{Cx}| + \frac{1}{2}(\mathbf{W}^- - \mathbf{W}^+)(-\mathbf{Cx})_+ + \frac{1}{2}(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)(\mathbf{Cx})_+ = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{W}^- + \mathbf{W}^+)|\mathbf{Cx}| + \frac{1}{2}(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)\mathbf{Cx}
\end{aligned}$$

gdzie operator modułu jest rozumiany jako operacja po współrzędnych. Zatem, jeżeli spełniona jest nierówność (2.15), to dla dowolnych $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ i α_1, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\mathbf{h}(\alpha_1\mathbf{x}' + \alpha_2\mathbf{x}'') \leq_{lex} \alpha_1\mathbf{h}(\mathbf{x}') + \alpha_2\mathbf{h}(\mathbf{x}'')$$

czyli funkcja osiągnięcia jest leksykograficznie wypukła. Co za tym idzie, leksykograficzne minimum lokalne funkcji osiągnięcia jest również jej minimum globalnym.

Rozpatrzmy najpierw ważony problem PC, czyli przypadek problemu PC ze skalarną funkcją osiągnięcia (tzn. $p = 1$). Każdy ważony problem PC można sformułować jako problem programowania liniowego ze specjalną strukturą macierzy ograniczeń. Zatem zgodnie z teorią dualności programowania liniowego możemy zdefiniować dualny skalarny problem PC.

Pierwotny skalarny problem PC ma postać

$$\min \{\mathbf{w}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{w}^+(\mathbf{Cx})_+ \ : \ \mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+\} \tag{2.28}$$

gdzie $\mathbf{w}^- = \mathbf{w}_1^-$ i $\mathbf{w}^+ = \mathbf{w}_1^+$ są wierszami współczynników wag. Problem ten można również zapisać w rozwiniętej postaci jako pierwotny problem programowania liniowego

wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ minimalizujący
$\mathbf{w}^-\mathbf{d}^- + \mathbf{w}^+\mathbf{d}^+$
pod warunkiem, że są spełnione zależności (2.23), (2.24) i (2.25).

Odpowiedni problem dualny ma wtedy postać

wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ maksymalizujący

$$\mathbf{v}^-\mathbf{b}^- - \mathbf{v}^+\mathbf{b}^+ \tag{2.29}$$

pod warunkiem, że

$$\mathbf{uC} + \mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+ = \mathbf{0} \tag{2.30}$$

$$-\mathbf{w}^+ \leqq \mathbf{u} \leqq \mathbf{w}^- \tag{2.31}$$

$$\mathbf{v}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^+ \geqq \mathbf{0} \tag{2.32}$$

gdzie

- $\mathbf{u}$ wektor wiersz wymiaru $1 \times m$ jest wektorem dualnych zmiennych strukturalnych,
- $\mathbf{v}^-$ wektor wiersz wymiaru $1 \times n$ jest wektorem dualnych zmiennych odchyleń w dół,
- $\mathbf{v}^+$ wektor wiersz wymiaru $1 \times n$ jest wektorem dualnych zmiennych odchyleń w górę.

Problem (2.29)–(2.32) ma szczególną strukturę problemu programowania celowego, a dokładniej jest to rozwinięta postać problemu PC

$$\max \{(-\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^- - (\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^+ \ : \ -\mathbf{w}^+ \leqq \mathbf{u} \leqq \mathbf{w}^-\} \tag{2.33}$$

Łatwo sprawdzić, że ten problem jest dobrze postawiony wtedy, gdy pierwotny problem PC (2.28) jest dobrze postawiony. Problem (2.33) będziemy nazywać problemem dualnym do pierwotnego problemu (2.28).

Korzystając z teorii dualności dla programowania liniowego, możemy ustalić zależności pomiędzy pierwotnym (2.28) i dualnym (2.33) problemem PC. Wszystkie przedstawione tu twierdzenia, z wyjątkiem twierdzenia 2.4 i jednego punktu w twierdzeniu 2.6, wynikają bezpośrednio z teorii dualności w programowaniu liniowym, zastosowanej do rozwiniętej postaci pierwotnego i dualnego problemu PC. Z tego powodu ich dowody zostaną pominięte.

Twierdzenie 2.4 *Jeżeli* $\mathbf{x}$ *jest dopuszczalny dla pierwotnego problemu PC i* $\mathbf{u}$ *jest dopuszczalny dla dualnego problemu PC, to jest spełniona następująca nierówność*

$$\mathbf{w}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{w}^+(\mathbf{Cx})_+ \geqq -\mathbf{uCx} \geqq (-\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^- - (\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^+$$

Dowód.
$\mathbf{w}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{w}^+(\mathbf{Cx})_+ \geqq \mathbf{u}(-\mathbf{Cx})_+ - \mathbf{u}(\mathbf{Cx})_+ = -\mathbf{uCx} =$
$= (-\mathbf{uC})_+\mathbf{x} - (\mathbf{uC})_+\mathbf{x} \geqq (-\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^- - (\mathbf{uC})_+\mathbf{b}^+$ ■

Twierdzenie 2.5 *Jeżeli jeden z problemów PC, pierwotny lub dualny ma skończone rozwiązanie optymalne, to drugi problem także ma skończone rozwiązanie optymalne, a optymalne wartości funkcji osiągnięcia są sobie równe.*

Liniowy problem PC zazwyczaj ma rozwiązanie. Szczególnie, gdy spełnione są dodatkowe warunki (2.15) i (2.26). Ta własność dotyczy jednak problemów, w których występują tylko skończone współczynniki danych.

Wniosek 2.1 *Jeżeli wszystkie współczynniki danych są skończone, to zarówno pierwotny jak i dualny problem PC mają skończone rozwiązania optymalne, a optymalne wartości funkcji osiągnięcia są sobie równe.*

Twierdzenie 2.6 *Następujące warunki są równoważne:*

1^0 $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym pierwotnego problemu PC i* $\mathbf{u}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu dualnego;*

2^0 $\mathbf{x}^0$ *i* $\mathbf{u}^0$ *są dopuszczalne dla odpowiednich problemów PC, a wartości funkcji osiągnięcia są skończone i równe* $-\mathbf{u}^0\mathbf{Cx}^0$*, to znaczy*

$$\mathbf{w}^-(-\mathbf{Cx}^0)_+ + \mathbf{w}^+(\mathbf{Cx}^0)_+ = (-\mathbf{uC}^0)_+\mathbf{b}^- - (\mathbf{uC}^0)_+\mathbf{b}^+ = -\mathbf{u}^0\mathbf{Cx}^0$$

3^0 $\mathbf{x}^0$ *i* $\mathbf{u}^0$ *są dopuszczalne dla odpowiednich problemów PC oraz są spełnione warunki komplementarności*

$$(\mathbf{u}^0 + \mathbf{w}^+)(\mathbf{Cx}^0)_+ = 0 \tag{2.34}$$
$$(\mathbf{w}^- - \mathbf{u}^0)(-\mathbf{Cx}^0)_+ = 0 \tag{2.35}$$
$$(-\mathbf{u}^0\mathbf{C})_+(\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}^-) = 0 \tag{2.36}$$
$$(\mathbf{u}^0\mathbf{C})_+(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}^0) = 0 \tag{2.37}$$

4^0 para $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ jest punktem siodłowym funkcji

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= (\mathbf{w}^- - \mathbf{u})(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + (\mathbf{w}^+ + \mathbf{u})(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ - (-\mathbf{u}\mathbf{C})_+(\mathbf{x} - \mathbf{b}^-) + \\ &+ (\mathbf{u}\mathbf{C})_+(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}) - \mathbf{u}\mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

to znaczy, $L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \le L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \le L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0)$ dla dowolnych $\mathbf{x} \in R^n$ i $\mathbf{u} \in R^m$;

5^0 $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{u}^0$ są dopuszczalne dla odpowiednich problemów PC, a para $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ jest punktem siodłowym funkcji $\bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{u}\mathbf{C}\mathbf{x}$ na iloczynie kartezjańskim zbiorów dopuszczalnych, to znaczy, $-\mathbf{u}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \le -\mathbf{u}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \le -\mathbf{u}^0\mathbf{C}\mathbf{x}$ dla dowolnych dopuszczalnych $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{u}$.

Dowód. Warunki 1^0, 3^0 oraz 4^0 są równoważne na mocy teorii dualności programowania liniowego. Równoważność warunków 1^0 i 2^0 wynika z twierdzeń 2.4 i 2.5. Zatem wystarczy pokazać równoważność warunków 3^0 i 5^0.

Warunki (2.34) i (2.35) są równoważne warunkom

$$(-\mathbf{u}^0\mathbf{C})_+(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}) \le 0 \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{u}^0\mathbf{C})_+(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \le 0$$

dla dowolnego dopuszczalnego $\mathbf{x}$, czyli warunkowi

$$-\mathbf{u}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \le -\mathbf{u}^0\mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{dla dowolnego dopuszczalnego } \mathbf{x}$$

Analogicznie można udowodnić, że warunek

$$-\mathbf{u}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \le -\mathbf{u}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \quad \text{dla dowolnego dopuszczalnego } \mathbf{u}$$

jest równoważny warunkom (2.36) i (2.37), co kończy dowód. ■

W programowaniu liniowym rozwiązanie zadania dualnego może być wykorzystane do analizy wrażliwości zadania na zaburzenia danych. Dokładniej, znając rozwiązanie dualne, można obliczyć tak zwane wartości krańcowe (marginalne) dla różnych zaburzeń danych. Wartości krańcowe są definiowane jako pochodne kierunkowe

$$z'_{\Delta\mathbf{H}}(\mathbf{H}) = \lim_{\alpha \to 0_+} \frac{z(\mathbf{H} + \alpha\Delta\mathbf{H}) - z(\mathbf{H})}{\alpha}$$

wartości optymalnej z (rozpatrywanej jako funkcja danych $\mathbf{H}$) w kierunku zaburzeń danych $\Delta\mathbf{H}$. Wartości krańcowe można obliczać stosując wzór Millsa (patrz Mills, 1956; Williams, 1963). Najszerzej wykorzystuje się analizę zaburzeń wektora prawych stron.

W programowaniu celowym można przeprowadzać podobną analizę. Jednakże w pierwotnym problemie PC wektor prawych stron jest strukturalnie równy zeru. Bardziej interesujące jest tu badanie zaburzeń wektorów prostych ograniczeń na zmienne, jako że definiują one poziomy aspiracji dla poszczególnych funkcji oceny. Oczywiście, rozpatrujemy tylko zaburzenia danych skończonych. Twierdzenie 2.7 określa efekty zaburzeń prostych ograniczeń na zmienne.

Twierdzenie 2.7 *Niech J_e będzie zbiorem równościowych prostych ograniczeń na zmienne, to znaczy $J_e = \{j \in J \ : \ b_j^- = b_j^+\}$. Jeżeli pierwotny problem PC ma skończone rozwiązanie optymalne oraz wszystkie współczynniki wag w_i^- i w_i^+ są skończone, to istnieje $\alpha_0 > 0$ takie, że zaburzony problem PC*

$$\min \{\mathbf{w}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{w}^+(\mathbf{Cx})_+ \ : \ \mathbf{b}^- + \Delta\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+ + \Delta\mathbf{b}^+\}$$

ma rozwiązanie, gdy

$$|\Delta b_j^-| < \alpha_0 \quad i \quad |\Delta b_j^+| < \alpha_0 \quad dla\ j \in J \setminus J_e \quad i \quad \Delta b_j^- \leq \Delta b_j^+ \quad dla\ j \in J_e$$

Odpowiednie wartości krańcowe określa wzór

$$z'_{(\Delta\mathbf{b}^-,\Delta\mathbf{b}^+)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} [(-\mathbf{uC})_+\Delta\mathbf{b}^- - (\mathbf{uC})_+\Delta\mathbf{b}^+] \tag{2.38}$$

gdzie S^* jest zbiorem optymalnym dualnego problemu PC.

Typowa analiza postoptymalizacyjna polega na obliczaniu wartości krańcowych dla zaburzeń pojedynczych współczynników danych. W pierwotnych problemach PC można rozpatrywać trzy rodzaje zaburzeń prostego ograniczenia na zmienną:

1^0 zaburzenie dolnego ograniczenia $\widetilde{b}_j^- = b_j^- + \alpha \quad$ dla $j \in J_d$, gdzie $J_d = \{j \in J \ : \ -\infty < b_j^- < b_j^+\}$

2^0 zaburzenie górnego ograniczenia $\widetilde{b}_j^+ = b_j^+ + \alpha \quad$ dla $j \in J_g$, gdzie $J_g = \{j \in J \ : \ b_j^- < b_j^+ < +\infty\}$

3^0 zaburzenie ograniczenia równościowego ($b_j^- = b_j^+ = b_j$) $\widetilde{b}_j^- = \widetilde{b}_j^+ = b_j + \alpha$ dla $j \in J_e$

Uwzględniając we wzorze (2.38) dodatnie lub ujemne zaburzenia prostego ograniczenia na zmienną otrzymujemy następujące wartości krańcowe:

1^0 $z'_{(+b_j^-)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} (-\mathbf{uC}_j)_+, \quad z'_{(-b_j^-)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -(-\mathbf{uC}_j)_+ \quad$ dla $j \in J_d$;

2^0 $z'_{(+b_j^+)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -(\mathbf{uC}_j)_+, \quad z'_{(-b_j^+)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} (\mathbf{uC}_j)_+ \quad$ dla $j \in J_g$;

3^0 $z'_{(+b_j)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -\mathbf{uC}_j, \qquad z'_{(-b_j)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} \mathbf{uC}_j \quad$ dla $j \in J_e$

gdzie $\mathbf{C}_j$ oznacza j–tą kolumnę macierzy $\mathbf{C}$.

Zauważmy, że pewne współczynniki ograniczeń b_j^- i b_j^+ zwykle reprezentują poziomy aspiracji dla funkcji oceny (patrz przykład 2.1). Odpowiednia kolumna $\mathbf{C}_j$ jest wtedy równa minus wersorowi jednostkowemu $-\mathbf{e}_j$. Zatem niektóre współczynniki wektora dualnego $\mathbf{u}$ są cenami dualnymi dla odpowiednich celów.

Wniosek 2.2 *Jeżeli w pierwotnym problemie PC występuje zmienna logiczna związana z funkcją oceny f_i, to wartości krańcowe dla zaburzenia odpowiedniego celu $[a_i^-; a_i^+]$ są dane wzorami:*

1^0 $z'_{(+a_i^-)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} (u_i)_+ \quad i \quad z'_{(-a_i^-)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -(u_i)_+$, odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia dolnego poziomu aspiracji a_i^-;

2^0 $z'_{(+a_i^+)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -(-u_i)_+ \quad i \quad z'_{(-a_i^+)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} (-u_i)_+$, odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia górnego poziomu aspiracji a_i^+;

3^0 $z'_{(+a_i)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} u_i \quad i \quad z'_{(-a_i)} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} -u_i$, odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia poziomu aspiracji $a_i = a_i^- = a_i^+$.

Można również badać zaburzenia współczynników funkcji oceny c_{ij}. W rozwiniętej postaci problemu PC macierz $\mathbf{C}$ stanowi część macierzy ograniczeń. Dlatego też, na mocy teorii stabilności programowania liniowego (Williams, 1963), wymagana jest regularność problemu (ograniczoność zbioru rozwiązań dopuszczalnych). Z drugiej strony, ze specyfiki sformułowania problemu PC wynika, że nie potrzeba żadnych założeń dodatkowych, gdy wszystkie współczynniki danych mają wartości skończone. Twierdzenie 2.8 określa efekty zaburzeń danych pierwotnego problemu PC.

Twierdzenie 2.8 *Jeżeli wszystkie współczynniki danych mają wartości skończone, to zaburzony problem PC*

$$\min \{\mathbf{w}^-[-(\mathbf{C}+\Gamma)\mathbf{x}]_+ + \mathbf{w}^+[(\mathbf{C}+\Gamma)\mathbf{x}]_+ \ : \ \mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+\}$$

ma rozwiązanie dla dowolnej macierzy zaburzeń Γ *wymiaru* $m \times n$*, a odpowiednią wartość krańcową określa wzór*

$$z'_\Gamma = \max_{\mathbf{u}\in S^*} \min_{\mathbf{x}\in S} -\mathbf{u}\Gamma\mathbf{x} \tag{2.39}$$

gdzie S *i* S^* *są zbiorami optymalnymi problemów PC odpowiednio pierwotnego i dualnego.*

Obliczając wartość krańcową dla zaburzenia pojedynczego współczynnika c_{ij} otrzymujemy

$$z'_{(+c_{ij})} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} \min_{\mathbf{x}\in S} -u_i x_j \quad \text{oraz} \quad z'_{(-c_{ij})} = \max_{\mathbf{u}\in S^*} \min_{\mathbf{x}\in S} u_i x_j$$

odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia.

Wyniki rozważań dla przypadku skalarnego mogą być rozszerzone na ogólne leksykograficzne liniowe problemy PC poprzez wykorzystanie koncepcji wielowymiarowego problemu dualnego (Ignizio, 1976, 1984; Isermann, 1982). Wielowymiarowy problem dualny otrzymuje się zastępując w problemie skalarnym zmienne u_i p–wymiarowymi wektorami (kolumnami) $\mathbf{U}_i$. Wszystkie nierówności skalarne są wtedy zastępowane nierównościami leksykograficznymi.

Dla danego leksykograficznego problemu PC (patrz (2.27))

$$\text{PPC} \ : \quad \text{lexmin} \, \{\mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ \ : \ \mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+\}$$

problem dualny można zapisać w postaci wielowymiarowego problemu PC

$$\text{DPC} \ : \quad \text{lexmax} \, \{(-\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^+ \ : \ -\mathbf{W}^+ \leq_{lex} \mathbf{U} \leq_{lex} \mathbf{W}^-\} \tag{2.40}$$

gdzie $\mathbf{U}$ jest macierzą zmiennych dualnych, wymiaru $p \times m$, a każdy jej wiersz $\mathbf{u}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$) jest związany z priorytetem k. Operator $(.)_L$ oznacza leksykograficznie nieujemną część wektora kolumny. Zastosowany do macierzy (lub wektora wiersza) odnosi się do poszczególnych kolumn macierzy. Postać rozwiniętą problemu DPC zapisuje się jako

wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ maksymalizujący

$$\mathbf{V}^-\mathbf{b}^- - \mathbf{V}^+\mathbf{b}^+ \tag{2.41}$$

pod warunkiem, że

$$\mathbf{UC} + \mathbf{V}^- - \mathbf{V}^+ = \mathbf{0} \tag{2.42}$$

$$-\mathbf{W}^+ \leq_{lex} \mathbf{U} \leq_{lex} \mathbf{W}^- \tag{2.43}$$

$$\mathbf{V}^- \geq_{lex} \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}^+ \geq_{lex} \mathbf{0} \tag{2.44}$$

gdzie

- $\mathbf{U}$ macierz wymiaru $(p \times m)$ jest macierzą dualnych zmiennych strukturalnych,
- $\mathbf{V}^-$ macierz wymiaru $(p \times m)$ jest macierzą dualnych zmiennych odchyleń w dół,
- $\mathbf{V}^+$ macierz wymiaru $(p \times m)$ jest macierzą dualnych zmiennych odchyleń w górę.

Podobnie jak w przypadku skalarnym, leksykograficzny problem dualny PC jest (wielowymiarowym) dobrze postawionym problemem PC, jeśli są spełnione warunki (2.15) i (2.26).

Twierdzenie 2.9 *Wektorowa funkcja osiągnięcia w wielowymiarowym dualnym problemie PC jest leksykograficznie wypukła, to znaczy*

$$\mathbf{h}^*(\alpha_1\mathbf{U}' + \alpha_2\mathbf{U}'') \geq_{lex} \alpha_1\mathbf{h}^*(\mathbf{U}') + \alpha_2\mathbf{h}^*(\mathbf{U}'') \tag{2.45}$$

dla dowolnych $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$ *oraz* α_1, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Dowód. Dualną funkcję osiągnięcia można zapisać jako

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^*(\mathbf{U}) &= (-\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^+ = \\ &= \frac{1}{2}[(-\mathbf{UC})_L + (\mathbf{UC})_L](\mathbf{b}^- - \mathbf{b}^+) - \frac{1}{2}\mathbf{UC}(\mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-)\end{aligned}$$

Z (2.27) wynika nierówność

$$\{[-(\alpha_1\mathbf{U}' + \alpha_2\mathbf{U}'')\mathbf{C}]_L + [(\alpha_1\mathbf{U}' + \alpha_2\mathbf{U}'')\mathbf{C}]_L\}(\mathbf{b}^- - \mathbf{b}^+) \geq_{lex}$$

$$\geq_{lex} \alpha_1[(-\mathbf{U}'\mathbf{C})_L + (\mathbf{U}'\mathbf{C})_L](\mathbf{b}^- - \mathbf{b}^+) + \alpha_2[(-\mathbf{U}''\mathbf{C})_L + (\mathbf{U}''\mathbf{C})_L](\mathbf{b}^- - \mathbf{b}^+)$$

dla dowolnych $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$ oraz α_1, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Stąd wynika nierówność (2.45). ■

Wniosek 2.3 *Zbiór optymalny wielowymiarowego dualnego problemu PC jest wypukły.*

Pierwotny leksykograficzny problem PC i wielowymiarowy dualny problem PC spełniają wszystkie typowe zależności dualności. Dokładniej, istnieją leksykograficzne odpowiedniki podstawowych zależności teorii dualności programowania liniowego.

Twierdzenie 2.10 *Jeżeli* $\mathbf{x}$ *jest dopuszczalny dla pierwotnego leksykograficznego problemu PC, a* $\mathbf{U}$ *jest dopuszczalny dla wielowymiarowego dualnego problemu PC, to jest spełniona następująca nierówność*

$$\mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+ \geq_{lex} -\mathbf{UCx} \geq_{lex} (-\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^+$$

Dowód.
$\mathbf{W}^{-}(-\mathbf{Cx})_{+} + \mathbf{W}^{+}(\mathbf{Cx})_{+} \geq_{lex} \ \mathbf{U}(-\mathbf{Cx})_{+} - \mathbf{U}(\mathbf{Cx})_{+} =$
$= \mathbf{U}[(-\mathbf{Cx})_{+} - (\mathbf{Cx})_{+}] = -\mathbf{UCx} = [(-\mathbf{UC})_L - (\mathbf{UC})_L]\mathbf{x} =$
$= (-\mathbf{UC})_L\mathbf{x} - (\mathbf{UC})_L\mathbf{x} \geq_{lex} \ (-\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^{-} - (\mathbf{UC})_L\mathbf{b}^{+}$ ■

Następne twierdzenie rozszerza warunki komplementarności (2.34)–(2.37) na leksykograficzny problem dualny i jednocześnie objaśnia wielowymiarową strukturę tego problemu.

Twierdzenie 2.11 *Jeżeli* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym pierwotnego leksykograficznego problemu PC, a* $\mathbf{U}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym wielowymiarowego dualnego problemu PC, to*

$$(\mathbf{U}^0 + \mathbf{W}^{+})(\mathbf{Cx}^0)_{+} = \mathbf{0} \tag{2.46}$$
$$(\mathbf{W}^{-} - \mathbf{U}^0)(-\mathbf{Cx}^0)_{+} = \mathbf{0} \tag{2.47}$$
$$(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}^{-}) = \mathbf{0} \tag{2.48}$$
$$(\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^{+} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \tag{2.49}$$

i k*–ty wiersz* $\mathbf{U}^0$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *jest rozwiązaniem dualnym dla podproblemu pierwotnego problemu PC rozwiązywanego dla priorytetu* k

$$\mathrm{P}_k \ : \quad \min\ \{\mathbf{w}_k^{-}(-\mathbf{Cx})_{+} + \mathbf{w}_k^{+}(\mathbf{Cx})_{+} \ : \ \mathbf{b}^{-} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^{+}, \quad \mathbf{x} \in S_{k-1}\} \tag{2.50}$$

gdzie S_{k-1} *jest zbiorem optymalnym problemu* P_{k-1}.

Dowód. Indukcyjny ze względu na p. Zauważmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla skalarnych problemów PC ($p = 1$). Załóżmy, że jest prawdziwe dla $p = r$.

Dla $k = r + 1$ problem (2.50) ma postać

$$\mathrm{P}_{r+1} \ : \quad \min\ \{\mathbf{w}_{r+1}^{-}(-\mathbf{Cx})_{+} + \mathbf{w}_{r+1}^{+}(\mathbf{Cx})_{+} \ : \ \mathbf{b}^{-} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^{+}, \quad \mathbf{x} \in S_r\}$$

Podobnie, $(r+1)$–wymiarowy problem dualny PC można wyrazić w postaci problemu jednokryterialnego

wyznaczyć wektor $\mathbf{u}_{r+1}$ i macierz $\mathbf{U}^{(r)}$ minimalizujące
$$\mathbf{e}_{r+1}^T \left[\begin{pmatrix} -\mathbf{U}^{(r)} \\ -\mathbf{u}_{r+1} \end{pmatrix} \mathbf{C} \right]_L \mathbf{b}^{-} - \mathbf{e}_{r+1}^T \left[\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(r)} \\ \mathbf{u}_{r+1} \end{pmatrix} \mathbf{C} \right]_L \mathbf{b}^{+}$$
pod warunkiem, że
$$-\begin{pmatrix} (\mathbf{W}^{+})^{(r)} \\ \mathbf{w}_{r+1}^{+} \end{pmatrix} \leq_{lex} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(r)} \\ \mathbf{u}_{r+1} \end{pmatrix} \leq_{lex} \begin{pmatrix} (\mathbf{W}^{-})^{(r)} \\ \mathbf{w}_{r+1}^{-} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(r)} \in S_r^*$$

gdzie $\mathbf{e}_{r+1}$ oznacza $(r+1)$–szy wersor, S_r^* zbiór optymalny r–wymiarowego dualnego problemu PC, $(\mathbf{W}^{+})^{(r)}$, $\mathbf{U}^{(r)}$, $(\mathbf{W}^{-})^{(r)}$ są r–wierszowymi częściami odpowiednich macierzy. Ten problem można rozwiązać w dwóch etapach:

1^0 wyznaczyć wektor $\bar{\mathbf{u}}_{r+1}$ będący rozwiązaniem optymalnym skalarnego problemu

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{r+1}\ :\quad \max\{ & \sum_{j\in J_r^0\cup J_r}(-\mathbf{u}_{r+1}\mathbf{C}_j)_+ b_j^- + \sum_{j\in J_r}(-\mathbf{u}_{r+1}\mathbf{C}_j)_+ b_j^+ + \\ & + \sum_{j\in J_r^0\cup J_r}(\mathbf{u}_{r+1}\mathbf{C}_j)_+ b_j^+ - \sum_{j\in J_r}(\mathbf{u}_{r+1}\mathbf{C}_j)_+ b_j^- \ : \\ & u_{r+1,i} \geq -w_{r+1,i}^+ \quad \text{dla } i\in I_d^r, \\ & u_{r+1,i} \leq w_{r+1,i}^- \quad \text{dla } i\in I_g^r\}\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{array}{lcl} J_0^r & = & \{j\in J\ :\ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j=\mathbf{0}\quad \text{dla wszystkich}\quad \mathbf{U}^{(r)}\in S_r^*\} \\ J_+^r & = & \{j\in J\ :\ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j\ >_{lex}\ \mathbf{0}\quad \text{dla pewnego}\quad \mathbf{U}^{(r)}\in S_r^*\} \\ J_-^r & = & \{j\in J\ :\ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j\ <_{lex}\ \mathbf{0}\quad \text{dla pewnego}\quad \mathbf{U}^{(r)}\in S_r^*\} \\ I_d^r & = & \{i\in I\ :\ \mathbf{U}_i^{(r)}=-(\mathbf{W}_i^+)^{(r)}\quad \text{dla wszystkich}\quad \mathbf{U}^{(r)}\in S_r^*\} \\ I_g^r & = & \{i\in I\ :\ \mathbf{U}_i^{(r)}=(\mathbf{W}_i^-)^{(r)}\quad \text{dla wszystkich}\quad \mathbf{U}^{(r)}\in S_r^*\} \end{array}$$

2^0 wybrać $\bar{\mathbf{U}}^{(r)}\in S_r^*$ taki, że

$$-(\mathbf{W}_i^+)^{(r)}\ <_{lex}\ \bar{\mathbf{U}}_i^{(r)}\quad \text{gdy}\quad \bar{u}_{r+1,i}<-w_{r+1,i}^+$$

$$\bar{\mathbf{U}}_i^{(r)}\ <_{lex}\ (\mathbf{W}_i^-)^{(r)}\quad \text{gdy}\quad \bar{u}_{r+1,i}>w_{r+1,i}^-$$

(taki $\bar{\mathbf{U}}^{(r)}$ zawsze istnieje ponieważ zbiór S_r^* jest wypukły).

Z założenia indukcyjnego wynika, że problem P_{k+1} można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\min\{\bar{\mathbf{w}}_{r+1}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \bar{\mathbf{w}}_{r+1}^+(\mathbf{Cx})_+\quad :\quad & b_j^-\leq x_j\leq b_j^+\quad \text{dla } j\in J_0^r, \\ & b_j^-\leq x_j\leq b_j^-\quad \text{dla } j\in J_-^r, \\ & b_j^+\leq x_j\leq b_j^+\quad \text{dla } j\in J_+^r\}\end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{w}_{r+1,i}^- = \begin{cases} w_{r+1,i}^- & \text{dla } i\in I_g^r \\ +\infty & \text{dla } i\notin I_g^r \end{cases},\qquad \bar{w}_{r+1,i}^+ = \begin{cases} w_{r+1,i}^+ & \text{dla } i\in I_d^r \\ +\infty & \text{dla } i\notin I_d^r \end{cases}$$

Teraz już łatwo sprawdzić, że problemy P_{r+1} i D_{r+1} są problemami PC odpowiednio pierwotnym i dualnym. Tak więc, zgodnie z teorią dualności dla skalarnych problemów PC, $\bar{\mathbf{u}}_{r+1}$ jest rozwiązaniem dualnym pierwotnego podproblemu PC dla priorytetu $r+1$, a co za tym idzie, twierdzenie jest prawdziwe dla $p=r+1$. ■

Wniosek 2.4 *Jeżeli jeden z problemów PC, leksykograficzny pierwotny lub wielowymiarowy dualny, ma skończone rozwiązanie optymalne, to drugi problem również ma skończone rozwiązanie optymalne.*

Wniosek 2.5 *Jeżeli wszystkie współczynniki danych są skończone, to zarówno leksykograficzny pierwotny problem PC, jak i wielowymiarowy dualny problem PC mają skończone rozwiązania optymalne oraz odpowiednie wektory wartości funkcji osiągnięcia są sobie równe.*

Następne twierdzenie jest posumowaniem warunków optymalności. Wszystkie typowe warunki optymalności dla problemów programowania liniowego mają tu swoje odpowiedniki, włącznie z własnością punktu siodłowego.

Twierdzenie 2.12 *Następujące warunki są równoważne:*

1^0 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym leksykograficznego pierwotnego problemu PC oraz $\mathbf{U}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym wielowymiarowego dualnego problemu PC;

2^0 $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{U}^0$ są dopuszczalne, a odpowiednie wektory wartości funkcji osiągnięcia są skończone i równe $-\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0$, to znaczy

$$\mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ = (-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^+ = -\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0$$

3^0 $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{U}^0$ są dopuszczalne oraz spełnione są warunki komplementarności (2.46)–(2.49);

4^0 para $(\mathbf{x}^0, \mathbf{U}^0)$ jest leksykograficznym punktem siodłowym funkcji wektorowej

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{U}) &= (\mathbf{W}^- - \mathbf{U})(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + (\mathbf{U}+\mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ - (-\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{x}-\mathbf{b}^-) + \\ &+ (\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}) - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

to znaczy

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}) \leq_{lex} \mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}^0) \leq_{lex} \mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{U}^0) \tag{2.51}$$

dla dowolnych $\mathbf{x} \in R^n$ i $\mathbf{U} \in R^p \times R^m$;

5^0 $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{U}^0$ są dopuszczalne oraz para $(\mathbf{x}^0, \mathbf{U}^0)$ jest leksykograficznym punktem siodłowym funkcji wektorowej $\bar{L}(\mathbf{x},\mathbf{U}) = -\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}$, to znaczy

$$-\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \leq_{lex} -\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \leq_{lex} -\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{2.52}$$

dla dowolnych dopuszczalnych $\mathbf{x}$ i $\mathbf{U}$.

Dowód. Twierdzenie zostanie udowodnione poprzez wykazanie implikacji $2^0 \Rightarrow 1^0 \Rightarrow 3^0 \Rightarrow 4^0 \Rightarrow 2^0$ i równoważności $3^0 \Leftrightarrow 5^0$.

$2^0 \Rightarrow 1^0$: Z twierdzenia 2.10 ta implikacja jest oczywista.

$1^0 \Rightarrow 3^0$: Ta implikacja wynika z twierdzenia 2.11.

$3^0 \Rightarrow 4^0$: Z warunków (2.46) i (2.47) wynika

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}^0) = -(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}^-) - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}^0) - \mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0$$

Zatem dla dowolnego $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}^0) &= (-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^+ = \\ &= -(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}^-) - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}^0) - \mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0) \leq_{lex} \\ &\leq_{lex} (\mathbf{W}^- - \mathbf{U}^0)(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + (\mathbf{U}^0 + \mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + \\ &\quad -(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x} - \mathbf{b}^-) - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+ - \mathbf{x}) - \mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{U}^0)\end{aligned}$$

Podobnie, z warunków (2.48) i (2.49) wynika

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}^0) = (\mathbf{W}^- - \mathbf{U}^0)(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + (\mathbf{U}^0 + \mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ - \mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}$$

Zatem dla dowolnego $\mathbf{U}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U}^0) &= \mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ = \\
&= (\mathbf{W}^- - \mathbf{U})(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + (\mathbf{U}+\mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \geq_{lex} \\
&\geq_{lex} (\mathbf{W}^- - \mathbf{U})(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + (\mathbf{U}+\mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \\
&\quad -(-\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0-\mathbf{b}^-) - (\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+-\mathbf{x}^0) - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 = \mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{U})
\end{aligned}$$

$4^0 \Rightarrow 2^0$: Prawą nierówność warunku (2.51) można zapisać jako

$$\begin{aligned}
(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^+ &\leq_{lex} (\mathbf{W}^- - \mathbf{U}^0)(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + (\mathbf{U}^0+\mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ + \\
&\quad +(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^+
\end{aligned}$$

Tak więc, dla dowolnego wektora $\mathbf{x}$ są spełnione następujące nierówności

$$(\mathbf{W}^- - \mathbf{U}^0)(-\mathbf{C}\mathbf{x})_+ \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{U}^0+\mathbf{W}^+)(\mathbf{C}\mathbf{x})_+ \geq_{lex} \mathbf{0}$$

Zatem $-\mathbf{W}^+ \leq_{lex} \mathbf{U}^0 \leq_{lex} \mathbf{W}^-$, czyli $\mathbf{U}^0$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla problemu dualnego.

Rozpatrzmy teraz lewą nierówność w warunku (2.51). Można ją zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ - (-\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0-\mathbf{b}^-) - (\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+-\mathbf{x}^0) \leq_{lex} \\
\leq_{lex} \mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+
\end{aligned}$$

Stąd, dla dowolnej macierzy $\mathbf{U}$ są prawdziwe następujące nierówności

$$(-\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0-\mathbf{b}^-) \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{U}\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+-\mathbf{x}^0) \geq_{lex} \mathbf{0}$$

Zatem $\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x}^0 \leqq \mathbf{b}^+$, czyli $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla problemu pierwotnego.
Co więcej, z nierówności (2.51) wynika

$$(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^- - (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L\mathbf{b}^+ = \mathbf{L}(\mathbf{0},\mathbf{U}^0) \geq_{lex} \mathbf{L}(\mathbf{x}^0,\mathbf{0}) = \mathbf{W}^-(-\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{C}\mathbf{x}^0)_+$$

co zgodnie z twierdzeniem 2.10 daje 2^0.

$3^0 \Leftrightarrow 5^0$: Warunki (2.46) i (2.47) są równoważne następującym

$$(-\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x}^0-\mathbf{x}) \leq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{i} \quad (\mathbf{U}^0\mathbf{C})_L(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \leq_{lex} \mathbf{0}$$

dla dowolnego dopuszczalnego $\mathbf{x}$. Te warunki są zaś równoważne warunkowi

$$-\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \leq_{lex} -\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{dla dowolnego dopuszczalnego } \mathbf{x}.$$

Analogicznie można pokazać, że warunki (2.46) i (2.47) są równoważne nierówności

$$-\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \leq_{lex} -\mathbf{U}^0\mathbf{C}\mathbf{x}^0 \quad \text{dla dowolnego dopuszczalnego } \mathbf{U}.$$ ■

Warunki komplementarności w programowaniu liniowym interpretuje się zwykle jako implikacje: "jeżeli zmienna w jednym problemie przyjmuje wartość dodatnią, to odpowiadające jej ograniczenie w drugim problemie jest aktywne" oraz "jeżeli ograniczenie w jednym problemie nie jest aktywne, to odpowiadająca mu zmienna w drugim problemie przyjmuje wartość zero". Wniosek 2.6 formułuje warunki komplementarności (2.46)–(2.49) w postaci tego typu implikacji.

Wniosek 2.6 *Jeżeli* $\mathbf{x}^0$ *i* $\mathbf{U}^0$ *są rozwiązaniami optymalnymi problemów PC, odpowiednio leksykograficznego pierwotnego i wielowymiarowego dualnego, to prawdziwe są następujące implikacje:*

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{U}_i^0 \ >_{lex} \ -\mathbf{W}_i^+ & \Rightarrow & \mathbf{c}_i\mathbf{x}^0 \le 0 \\
\mathbf{c}_i\mathbf{x}^0 > 0 & \Rightarrow & \mathbf{U}_i^0 = -\mathbf{W}_i^+ \\
\mathbf{U}_i^0 \ <_{lex} \ \mathbf{W}_i^- & \Rightarrow & \mathbf{c}_i\mathbf{x}^0 \ge 0 \\
\mathbf{c}_i\mathbf{x}^0 < 0 & \Rightarrow & \mathbf{U}_i^0 = \mathbf{W}_i^- \\
x_i^0 > b_j^- & \Rightarrow & \mathbf{U}^0\mathbf{C}_j \ \ge_{lex} \ \mathbf{0} \\
\mathbf{U}^0\mathbf{C}_j \ <_{lex} \ \mathbf{0} & \Rightarrow & x_j^0 = b_j^- \\
x_j^0 < b_j^+ & \Rightarrow & \mathbf{U}^0\mathbf{C}_j \ \le_{lex} \ \mathbf{0} \\
\mathbf{U}^0\mathbf{C}_j \ >_{lex} \ \mathbf{0} & \Rightarrow & x_j^0 = b_j^+
\end{array}$$

gdzie $\mathbf{c}_i$ *oznacza i–ty wiersz macierzy* $\mathbf{C}$.

Leksykograficzny pierwotny problem PC zwykle rozwiązuje się jako ciąg problemów skalarnych (2.50). Z twierdzenia 2.11 nie wynika jasno, czy podobną procedurę można zastosować do rozwiązywania wielowymiarowego dualnego problemu PC. Precyzuje to następne twierdzenie.

Twierdzenie 2.13 *Jeżeli* $\mathbf{U}^{(r)}$ *jest rozwiązaniem optymalnym dla r–wymiarowego dualnego problemu PC, a* $\bar{\mathbf{u}}$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathbf{U}^{(r)}): \ \max \{ \quad & \sum_{j \in J_0(\mathbf{U}^{(r)}) \cup J_-(\mathbf{U}^{(r)})} (-\mathbf{u}\mathbf{C}_j)_+ b_j^- + \sum_{j \in J_+(\mathbf{U}^{(r)})} (-\mathbf{u}\mathbf{C}_j)_+ b_j^+ + \\
& + \sum_{j \in J_0(\mathbf{U}^{(r)}) \cup J_+(\mathbf{U}^{(r)})} (\mathbf{u}\mathbf{C}_j)_+ b_j^+ - \sum_{j \in J_-(\mathbf{U}^{(r)})} (\mathbf{u}\mathbf{C}_j)_+ b_j^+ \ : \\
& u_i \ge -w_{r+1,i}^+ \quad \text{dla } i \in I_d(\mathbf{U}^{(r)}) \\
& u_i \le w_{r+1,i}^- \quad \text{dla } i \in I_g(\mathbf{U}^{(r)}) \} \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
J_0(\mathbf{U}^{(r)}) &= \{ j \in J \ : \ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j = \mathbf{0} \} \\
J_-(\mathbf{U}^{(r)}) &= \{ j \in J \ : \ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j \ <_{lex} \ \mathbf{0} \} \\
J_+(\mathbf{U}^{(r)}) &= \{ j \in J \ : \ \mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C}_j \ >_{lex} \ \mathbf{0} \} \\
I_d(\mathbf{U}^{(r)}) &= \{ i \in I \ : \ \mathbf{U}_i^{(r)} = -(\mathbf{W}_i^+)^{(r)} \} \\
I_g(\mathbf{U}^{(r)}) &= \{ i \in I \ : \ \mathbf{U}_i^{(r)} = (\mathbf{W}_i^-)^{(r)} \}
\end{aligned}$$

to $\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(r)} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$ *jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego* $(r+1)$*–wymiarowego dualnego problemu PC.*

Dowód. Ponieważ $\bar{\mathbf{u}}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.53), to istnieje rozwiązanie optymalne $\bar{\mathbf{x}}$ odpowiedniego pierwotnego problemu PC

$$\begin{array}{llll} \mathrm{P}(\mathbf{U}^{(r)}) : \min\{\bar{\mathbf{w}}^-_{r+1}(-\mathbf{Cx})_+ + \bar{\mathbf{w}}^+_{r+1}(\mathbf{Cx})_+ & : & b_j^- \le x_j \le b_j^+ & \text{dla } j \in J_0(\mathbf{U}^{(r)}), \\ & & b_j^- \le x_j \le b_j^- & \text{dla } j \in J_-(\mathbf{U}^{(r)}), \\ & & b_j^+ \le x_j \le b_j^+ & \text{dla } j \in J_+(\mathbf{U}^{(r)})\} \end{array}$$

gdzie

$$\bar{w}^-_{r+1,i} = \begin{cases} w^-_{r+1,i} & \text{dla} i \in I_g(\mathbf{U}^{(r)}) \\ +\infty & \text{dla} i \notin I_g(\mathbf{U}^{(r)}) \end{cases}, \quad \bar{w}^+_{r+1,i} = \begin{cases} w^+_{r+1,i} & \text{dla} i \in I_d(\mathbf{U}^{(r)}) \\ +\infty & \text{dla} i \notin I_d(\mathbf{U}^{(r)}) \end{cases}$$

Rozwiązanie $\bar{\mathbf{x}}$ spełnia oczywiście warunki komplementarności

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^{(r)} + (\mathbf{W}^+)^{(r)})(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})_+ &= \mathbf{0} \\ ((\mathbf{W}^-)^{(r)} - \mathbf{U}^{(r)})(-\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})_+ &= \mathbf{0} \\ (-\mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C})_L(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^-) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{U}^{(r)}\mathbf{C})_L(\mathbf{b}^+ - \bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ponadto, zgodnie z twierdzeniem 2.6 są spełnione warunki komplementarności

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{w}}^+_{r+1})(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})_+ &= 0 \\ (\bar{\mathbf{w}}^-_{r+1} - \bar{\mathbf{u}})(-\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})_+ &= 0 \\ (-\bar{\mathbf{u}}\mathbf{C})_+(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^-) &= 0 \\ (\bar{\mathbf{u}}\mathbf{C})_+(\mathbf{b}^+ - \bar{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned}$$

Tak więc są spełnione wszystkie warunki punktu 3^0 w twierdzeniu 2.12 i, co za tym idzie, $\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(r)} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego $(r+1)$–wymiarowego dualnego problemu PC. ■

W przypadku skalarnym wyprowadziliśmy wzory na wartości krańcowe dla małych zaburzeń danych. Podobnie można rozpatrywać wektory krańcowe optymalnego wektora osiągnięcia w leksykograficznym problemie PC

$$\mathbf{z}'_{\Delta\mathbf{H}}(\mathbf{H}) = \lim_{\alpha\to 0_+} \frac{1}{\alpha}[\mathbf{z}(\mathbf{H} + \alpha\Delta\mathbf{H}) - \mathbf{z}(\mathbf{H})]$$

gdzie $\mathbf{H}$ i $\Delta\mathbf{H}$ oznaczają odpowiednio dane i zaburzenia. Jednakże leksykograficzna optymalizacja jest w ogólnym przypadku niestabilna (Klepikowa, 1985) i dlatego pewne wartości krańcowe mogą być nieokreślone (przyjmować wartości nieskończone). Niestabilność zadania optymalizacji leksykograficznej jest konsekwencją własności relacji nierówności leksykograficznej. W szczególności dualny zbiór dopuszczalny, określony za pomocą nierówności leksykograficznych nie jest zbiorem domkniętym.

Twierdzenie 2.14 *Jeżeli* $-\mathbf{w}_r^+ < \mathbf{w}_r^-$ *dla pewnego* $r < p$, *to zbiór dopuszczalny wielowymiarowego dualnego problemu PC nie jest domknięty.*

Dowód. Rozpatrzmy ciąg rozwiązań dualnych $\mathbf{U}^\alpha$ zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^\alpha &= -\mathbf{w}_k^+ \quad \text{dla } k \neq r, r+1 \\ \mathbf{u}_r^\alpha &= -\mathbf{w}_r^+ + \alpha(\mathbf{w}_r^- + \mathbf{w}_r^+) \\ \mathbf{u}_{r+1}^\alpha &= -\mathbf{w}_{r+1}^+ - \varepsilon(\mathbf{w}_r^- + \mathbf{w}_r^+) \end{aligned}$$

gdzie ε jest dodatnią stałą, a α jest nieujemnym parametrem. $\mathbf{U}^\alpha$ jest dopuszczalne dla dowolnego dodatniego α, to znaczy $-\mathbf{W}^+ \leq_{lex} \mathbf{U}^\alpha \leq_{lex} \mathbf{W}^-$ dla $\alpha > 0$. Gdy α zbiega do zera, $\mathbf{U}^\alpha$ dąży do $\mathbf{U}^0$ spełniającego

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^0 &= -\mathbf{w}_k^+ \quad \text{dla } k \neq r+1 \\ \mathbf{u}_{r+1}^0 &= -\mathbf{w}_{r+1}^+ - \varepsilon(\mathbf{w}_r^- + \mathbf{w}_r^+) \end{aligned}$$

i tym samym niedopuszczalnego. ■

Leksykograficzny problem PC jest stabilny dla małych zaburzeń współczynników prostych ograniczeń na zmienne, czyli gdy są dozwolone tylko zaburzenia tych współczynników. Zatem można przeprowadzić analizę wrażliwości leksykograficznego PC ze względu na zmiany tych współczynników i podać wzory na odpowiednie wektory krańcowe.

Twierdzenie 2.15 *Jeżeli leksykograficzny pierwotny problem PC ma skończone rozwiązanie optymalne i wszystkie współczynniki wag w_{ki}^+ i w_{ki}^- są skończone, to istnieje $\alpha_0 > 0$ takie, że zaburzony problem PC*

$$\operatorname{lexmin} \{\mathbf{W}^-(-\mathbf{Cx})_+ + \mathbf{W}^+(\mathbf{Cx})_+ \;:\; \mathbf{b}^- + \Delta\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}^+ + \Delta\mathbf{b}^+\}$$

ma rozwiązanie optymalne, o ile tylko

$$|\Delta b_j^-| < \alpha_0 \quad i \quad |\Delta b_j^+| < \alpha_0 \quad dla\ j \in J \setminus J_e \quad i \quad \Delta b_j^- \leq \Delta b_j^+ \quad dla\ j \in J_e$$

gdzie $J_e = \{j \in J \;:\; b_j^- = b_j^+\}$ jest zbiorem ograniczeń równościowych. Odpowiedni wektor krańcowy jest wtedy dany wzorem

$$\mathbf{z}'_{(\Delta\mathbf{b}^-, \Delta\mathbf{b}^+)} = \operatorname{lex}\max_{\mathbf{U} \in S^*} \; [(-\mathbf{UC})_L \Delta\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L \Delta\mathbf{b}^+] \tag{2.54}$$

gdzie S^* jest zbiorem optymalnym wielowymiarowego dualnego problemu PC.

Dowód. Rozpatrzmy wielowymiarowy dualny problem PC (2.40). Ponieważ wszystkie współczynniki w_{ki}^+ i w_{ki}^- są skończone, zaburzony problem dualny

$$\begin{aligned} \mathrm{DPC}_{(\Delta\mathbf{b}^-, \Delta\mathbf{b}^+)} : \quad \operatorname{lexmax} \quad & \{(-\mathbf{UC})_L(\mathbf{b}^- + \Delta\mathbf{b}^-) - (\mathbf{UC})_L(\mathbf{b}^+ + \Delta\mathbf{b}^-) \;: \\ & -\mathbf{W}^+ \leq_{lex} \mathbf{U} \leq_{lex} \mathbf{W}^-\} \end{aligned}$$

ma skończone rozwiązanie optymalne, gdy $\mathbf{b}^- + \Delta\mathbf{b}^- \leqq \mathbf{b}^+ + \Delta\mathbf{b}^+$. Na mocy wniosku 2.4 zaburzony pierwotny problem PC ma wtedy również skończone rozwiązanie optymalne. Można więc przyjąć

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \min_{j \notin J_e} (b_j^+ - b_j^-)$$

Przy dostatecznie małych zaburzeniach zbiór optymalny zaburzonego problemu dualnego S^*_β jest podzbiorem zbioru optymalnego problemu niezaburzonego S^*. Zatem dla dostatecznie małych zaburzeń problem $\mathrm{DPC}_{(\Delta\mathbf{b}^-,\Delta\mathbf{b}^+)}$ przyjmuje postać

$$\mathrm{lexmax}\ \{\mathbf{z}^*(\mathbf{b}^-,\mathbf{b}^+) + (-\mathbf{UC})_L\Delta\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L\Delta\mathbf{b}^+\ :\ \mathbf{U}\in S^*\}$$

gdzie $\mathbf{z}^*(\mathbf{b}^-,\mathbf{b}^+)$ oznacza optymalny wektor osiągnięcia niezaburzonego problemu dualnego.
Optymalne wektory osiągnięcia problemu pierwotnego i problemu dualnego są równe na mocy twierdzenia 2.12. Stąd

$$\begin{aligned}\mathbf{z}'_{(\Delta\mathbf{b}^-,\Delta\mathbf{b}^+)} &= \lim_{\alpha\leftarrow 0_+}\frac{1}{\alpha}\cdot\mathrm{lexmax}\ \{\alpha(-\mathbf{UC})_L\Delta\mathbf{b}^- - \alpha(\mathbf{UC})_L\Delta\mathbf{b}^+\ :\ \mathbf{U}\in S^*\} = \\ &= \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ [(-\mathbf{UC}_L\Delta\mathbf{b}^- - (\mathbf{UC})_L\Delta\mathbf{b}^+]\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

W leksykograficznych problemach PC, podobnie jak w przypadku skalarnym, rozpatruje się trzy typy zaburzeń współczynników prostych ograniczeń na zmienne:

1^0 zaburzenie dolnego ograniczenia $\widetilde{b}_j^- = b_j^- + \alpha \quad$ dla $j\in J_d$,
gdzie $J_d = \{j\in J\ :\ -\infty < b_j^- < b_j^+\}$

2^0 zaburzenie górnego ograniczenia $\widetilde{b}_j^+ = b_j^+ + \alpha \quad$ dla $j\in J_g$,
gdzie $J_g = \{j\in J\ :\ b_j^- < b_j^+ < +\infty\}$

3^0 zaburzenie ograniczenia równościowego ($b_j^- = b_j^+ = b_j$) $\widetilde{b}_j^- = \widetilde{b}_j^+ = b_j + \alpha$ dla $j\in J_e$

Stosując wzór (2.54) dla dodatnich lub ujemnych zaburzeń prostego ograniczenia na zmienną otrzymujemy następujące wektory krańcowe:

1^0 $\mathbf{z}'_{(+b_j^-)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ (-\mathbf{UC}_j)_L,\quad \mathbf{z}'_{(-b_j^-)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ -(-\mathbf{UC}_j)_L\quad$ dla $j\in J_d$;

2^0 $\mathbf{z}'_{(+b_j^+)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ -(\mathbf{UC}_j)_L,\quad \mathbf{z}'_{(-b_j^+)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ (\mathbf{UC}_j)_L\quad$ dla $j\in J_g$;

3^0 $\mathbf{z}'_{(+b_j)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ -\mathbf{UC}_j,\quad \mathbf{z}'_{(-b_j)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ \mathbf{UC}_j\quad$ dla $j\in J_e$

Zauważmy, że pewne współczynniki ograniczeń b_j^- i b_j^+ zwykle reprezentują poziomy aspiracji dla funkcji oceny (patrz przykład 2.1). Odpowiednia kolumna $\mathbf{C}_j$ jest wtedy równa minus wersorowi jednostkowemu $-\mathbf{e}_j$. Stąd niektóre kolumny $\mathbf{U}_i$ macierzy zmiennych dualnych są wielowymiarowymi cenami dualnymi odpowiednich celów.

Wniosek 2.7 *Jeżeli w pierwotnym problemie PC występuje zmienna logiczna związana z funkcją oceny f_i, to wektory krańcowe dla zaburzenia odpowiedniego celu $[a_i^-;a_i^+]$ są dane wzorami:*

1^0 $\mathbf{z}'_{(+a_i^-)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ (\mathbf{U}_i)_L$ *i* $\mathbf{z}'_{(-a_i^-)} = \operatorname*{lex\,max}_{\mathbf{U}\in S^*}\ -(\mathbf{U}_i)_L$, *odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia dolnego poziomu aspiracji a_i^-;*

2⁰ $\mathbf{z}'_{(+a_i^+)} = \operatorname{lex}\max_{\mathbf{U}\in S^*} -(-\mathbf{U}_i)_L$ *i* $\mathbf{z}'_{(-a_i^+)} = \operatorname{lex}\max_{\mathbf{U}\in S^*} (-\mathbf{U}_i)_L$*, odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia górnego poziomu aspiracji* a_i^+*;*

3⁰ $\mathbf{z}'_{(+a_i)} = \operatorname{lex}\max_{\mathbf{U}\in S^*} \mathbf{U}_i$ *i* $\mathbf{z}'_{(-a_i)} = \operatorname{lex}\max_{\mathbf{U}\in S^*} -\mathbf{U}_i$*, odpowiednio dla dodatniego i ujemnego zaburzenia poziomu aspiracji* $a_i = a_i^- = a_i^+$*.*

Przykład 2.2. Dla zilustrowania dualności w programowaniu celowym rozpatrzmy model z dwiema funkcjami oceny: $f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ z celem przedziałowym $[a_1^-; a_1^+] = [10, +\infty]$ oraz $f_2(\mathbf{x}) = 3x_1 + 2x_2$ z celem punktowym $a_2 = 5$. Należy zminimalizować po pierwsze (dla priorytetu 1) odchylenie w dół funkcji f_1 i po drugie (dla priorytetu 2) oba odchylenia funkcji f_2. Zmienne decyzyjne x_1 i x_2 są nieujemne i ograniczone z góry przez 100.

Problem można sformułować jako

$$\begin{array}{l}
\operatorname{lexmin}\ (d_1^-, d_2^- + d_2^+)^T \\
\text{pod warunkiem, że} \\
\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & +\ x_2 & -x_3 & & +d_1^- & -d_1^+ & = 0, \\
3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +d_2^- & -d_2^+ & = 0,
\end{array} \\
0 \le x_1 \le 100, \quad 0 \le x_2 \le 100, \quad 10 \le x_3, \quad x_4 = 5, \\
\mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0}
\end{array}$$

Mamy więc pierwotny problem PC

$$\operatorname{lexmin} \left\{ \begin{pmatrix} (-x_1 - x_2 + x_3)_+ \\ (-3x_1 - 2x_2 + x_4)_+ + (3x_1 + 2x_2 - x_4)_+ \end{pmatrix} : \ 0 \le x_1 \le 100, \right.$$
$$\left. 0 \le x_2 \le 100, \quad 10 \le x_3, \quad x_4 = 5 \right\} \tag{2.55}$$

Problem dualny ma postać

$$\operatorname{lexmax} \{10(\mathbf{U}_1)_L + 5(\mathbf{U}_2)_L - 100(\mathbf{U}_1 + 3\mathbf{U}_2)_L - 100(\mathbf{U}_1 + 2\mathbf{U}_2)_L +$$
$$-\infty(-\mathbf{U}_1)_L - 5(-\mathbf{U}_2)_L \ :$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \le_{lex} \mathbf{U}_1 \le_{lex} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \le_{lex} \mathbf{U}_2 \le_{lex} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.56}$$

gdzie $\mathbf{U}_1$ i $\mathbf{U}_2$ są dwuwymiarowymi zmiennymi dualnymi

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

a nieskończony współczynnik wagi w funkcji osiągnięcia jest interpretowany jako nierówność leksykograficzna $\mathbf{U}_1 \ge_{lex} \mathbf{0}$.

Problem dualny (2.56) można zapisać w postaci rozszerzonej

$$\begin{array}{l}
\operatorname{lexmax}\ 10\mathbf{V}_3^- + 5\mathbf{V}_4^- - 100\mathbf{V}_1^+ - 100\mathbf{V}_2^+ - 5\mathbf{V}_4^+ \\
\text{pod warunkiem, że}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} \mathbf{U}_1 & +3\mathbf{U}_2 & +\mathbf{V}_1^- & -\mathbf{V}_1^+ & = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}_1 & +2\mathbf{U}_2 & +\mathbf{V}_2^- & -\mathbf{V}_2^+ & = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{U}_1 & & +\mathbf{V}_3^- & & = \mathbf{0}, \\ & -\ \mathbf{U}_2 & +\mathbf{V}_4^- & -\mathbf{V}_4^+ & = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_1 \leq_{lex} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_2 \leq_{lex} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_j^- \geq_{lex} \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_j^+ \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, 4$$

gdzie wszystkie zmienne $\mathbf{U}_i$, $\mathbf{V}_j^-$ i $\mathbf{V}_j^+$ są dwuwymiarowe.

Zajmiemy się teraz analizą wzajemnych zależności pomiędzy rozwiązaniem optymalnym problemu pierwotnego i dualnego. Rozwiązując problem pierwotny otrzymujemy:

1^0 problem dla pierwszego poziomu priorytetu (PPC$_1$)

$$\min \{(-x_1 - x_2 + x_3)_+ \ : \ 0 \leq x_1 \leq 100, \quad 0 \leq x_2 \leq 100, 10 \leq x_3, \quad x_4 = 5\}$$

ze zbiorem optymalnym

$$S_1 = \{\mathbf{x} \ : \ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0,\ 0 \leq x_1 \leq 100,\ 0 \leq x_2 \leq 100,\ 10 \leq x_3,\ x_4 = 5\};$$

2^0 problem dla drugiego poziomu priorytetu (PPC$_2$)

$$\min \{(-3x_1 - 2x_2 + x_4)_+ + (3x_1 + 2x_2 - x_4)_+ \ : \ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 100,\ 0 \leq x_2 \leq 100,\ 10 \leq x_3,\ x_4 = 5\}$$

z jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 10$, $x_4 = 5$

Zatem problem pierwotny (2.55) ma jednoznaczne rozwiązanie optymalne $\bar{\mathbf{x}} = (0, 10, 10, 5)^T$ i optymalny wektor osiągnięcia $\bar{\mathbf{z}} = (0, 15)^T$.

Rozwiązując problem dualny (2.56) otrzymujemy:

1^0 problem dla pierwszego poziomu priorytetu (DPC$_1$)

$$\max\{10(u_{11})_+ + 5(u_{12})_+ - 100(u_{11} + 3u_{12})_+ - 100(u_{11} + 2u_{12})_+ - 5(-u_{12})_+ : \\ 0 \leq u_{11} \leq 1,\ 0 \leq u_{12} \leq 0,\ u_{11} \geq 0\}$$

z jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym $\bar{u}_{11} = 0$ i $\bar{u}_{12} = 0$

2^0 problem dla drugiego poziomu priorytetu (DPC$_2$)

$$\max\{10(u_{21})_+ + 5(u_{22})_+ - 100(u_{21} + 3u_{22})_+ - 100(u_{21} + 2u_{22})_+ - 5(-u_{22})_+ : \\ 0 \leq u_{21},\ -1 \leq u_{22} \leq 1,\ u_{21} \geq 0\}$$

z jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym $\bar{u}_{21} = 2$ i $\bar{u}_{22} = -1$

Problem dualny (2.56) ma jednoznaczne rozwiązanie optymalne $\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i optymalny wektor osiągnięcia $\bar{\mathbf{z}} = (0, 15)^T$. Zauważmy, że optymalne wektory osiągnięcia dla problemu pierwotnego i problemu dualnego są równe oraz że spełnione są warunki komplementarności (2.46)–(2.49).

Zajmijmy się teraz zaburzeniami danych. Efekty niewielkich zaburzeń danych można policzyć bezpośrednio, ponieważ problem pierwotny ma jednoznaczne rozwiązanie optymalne. Na przykład:

1^0 jeżeli cel dla funkcji f_1 jest zaburzony o małą dodatnią liczbę α ($a_1^- = 10+\alpha$), to rozwiązanie optymalne przyjmuje postać $\bar{\mathbf{x}}_\alpha = (0, 10+\alpha, 10+\alpha, 5)^T$, a wektor osiągnięcia $\bar{\mathbf{z}}_\alpha = (0, 15+2\alpha)^T$;

2^0 jeżeli cel dla funkcji f_2 jest zaburzony o małą dodatnią liczbę α ($a_2 = 5+\alpha$), to rozwiązanie optymalne przyjmuje postać $\bar{\mathbf{x}}_\alpha = (0, 10, 10, 5+\alpha)^T$, a wektor osiągnięcia $\bar{\mathbf{z}}_\alpha = (0, 15-\alpha)^T$.

Stąd odpowiednie wektory krańcowe: $\mathbf{z}'_{(+a_1)^-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{z}'_{(+a_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Identyczne wyniki osiągniemy korzystając z teorii dualności programowania celowego. Z wniosku 2.7 otrzymujemy

$$\mathbf{z}'_{(+a_1)^-} = (\bar{\mathbf{U}}_1)_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{z}'_{(+a_2)} = (\bar{\mathbf{U}}_2)_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

2.3 Techniki obliczeniowe

Modele programowania celowego wprowadzają do oryginalnych modeli decyzyjnych dodatkowe zmienne odchyleń. Jednakże dzięki temu, że warunek komplementarności odpowiednich odchyleń w górę i w dół (2.5) nie występuje w modelu PC, nie ulega istotnej zmianie struktura modelu decyzyjnego. W szczególności stosując programowanie celowe do problemu WPL otrzymujemy w wyniku model PC należący do klasy zadań programowania liniowego. Oznacza to, że problemy PC mogą być rozwiązywane ogólnymi algorytmami optymalizacji dla odpowiednich klas zadań. Pewną komplikację struktury zadania wprowadza jedynie leksykograficzne programowanie celowe (2.13), jako że mamy wtedy do czynienia z optymalizacją leksykograficzną wektorowej funkcji osiągnięcia.

Minimalizacja leksykograficzna wektorowej funkcji osiągnięcia $\mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ w zadaniu (2.13) określa następujący ciąg zadań (skalarnych):

1. Wyznaczamy zbiór S_1 rozwiązań optymalnych zadania

$$\text{PC}_1 \ : \ \min \{g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \ : \ \mathbf{x} \in Q \text{ oraz (2.3) i (2.4)}\}$$

2. Dla $k = 2, 3, \ldots, p$ wyznaczamy zbiór S_k rozwiązań optymalnych zadania

$$\text{PC}_k \ : \ \min \{g_k(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \ : \ \mathbf{x} \in Q, \ (\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \in S_{k-1} \text{ oraz (2.3) i (2.4)}\}$$

3. Dowolny element zbioru S_p jest rozwiązaniem optymalnym leksykograficznego zadania PC (2.13).

Najprostszą techniką definiowania zbiorów S_k jest zapisywanie ich za pomocą warunków

$$g_t(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \bar{z}_t \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, k \tag{2.57}$$

gdzie $\bar{z}_t$ jest wartością optymalną zadania P_t. Prowadzi ona do tzw. *podejścia sekwencyjnego*, czyli rozwiązywania ciągu zadań o rosnącej liczbie ograniczeń. Podejście sekwencyjne może być łatwo stosowane do dowolnych typów problemów (zarówno liniowych, jak i nieliniowych) i implementowane z wykorzystaniem standardowych procedur optymalizacji jednokryterialnej odpowiedniego typu. Podejście sekwencyjne do leksykograficznych zadań PC ma pewne wady w przypadku zadań programowania liniowego. W przypadku modeli liniowych ważną zaletą leksykograficznego programowania celowego jest związana z nim teoria dualności i możliwość wykorzystania rozwiązania dualnego do analizy wrażliwości zadania (por. podrozdział 2.2). W podejściu sekwencyjnym równania (2.57) dodawane do kolejnych zadań zmieniają macierz współczynników zadania i uniemożliwiają wyznaczenie rozwiązania dualnego leksykograficznego zadania PC.

Dla uzyskania możliwości wyznaczenia rozwiązania dualnego leksykograficznego problemu PC trzeba stosować inną technikę reprezentacji zbiorów S_k. Przy rozwiązywaniu zadania programowania liniowego metodą sympleks cały zbiór rozwiązań optymalnych może być wyznaczony na podstawie wskaźników optymalności (zredukowanych kosztów) dla poszczególnych zmiennych. Zmienne niebazowe z niezerowymi wskaźnikami optymalności w optymalnej tablicy sympleksowej zachowują swoje wartości (na poziomie odpowiednich ograniczeń) we wszystkich rozwiązaniach optymalnych. Tym samym, warunek $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \in S_{k-1}$ może być zaimplementowany w zadaniu P_k przez ustalenie wartości wszystkich zmiennych niebazowych o niezerowych wskaźnikach optymalności w optymalnej tablicy sympleksowej problemu P_{k-1} i ograniczenie zadania jedynie do zmiennych o zerowych wskaźnikach optymalności dla wszystkich wcześniejszych funkcji celu $(1, 2, \ldots, k-1)$. Takie podejście jest zwane *wielofazowym* (przez analogię do dwufazowego algorytmu sympleks używanego przy braku startowej bazy dopuszczalnej) lub leksykograficzną metodą sympleks (Isermann, 1982).

Podejście wielofazowe wymaga odpowiedniej modyfikacji metody sympleks i dlatego do jego implementacji nie można wykorzystać standardowych (zamkniętych) pakietów programowania liniowego. Oba podejścia — sekwencyjne i wielofazowe — wyznaczają rozwiązania optymalne leksykograficznego zadania PC. Dodatkowe równania (2.57) używane w podejściu sekwencyjnym zwiększają rozmiar bazy w odpowiednich zadaniach programowania liniowego, co uniemożliwia wyznaczenie odpowiedniej bazy dla oryginalnego zadania leksykograficznego (otrzymywanej w podejściu wielofazowym). Markowski i Ignizio (1983) zaproponowali technikę przekształcania bazy optymalnej z podejścia sekwencyjnego do bazy dla leksykograficznej metody sympleks. Polega ona na wprowadzeniu do bazy zmiennych logicznych odpowiadających równaniom (2.57), z jednoczesnym zachowaniem optymalności bazy dla podejścia sekwencyjnego. Tak otrzymana baza zawiera odpowiednią liczbę oryginalnych zmiennych leksykograficznego zadania PC (x_j, d_i^- i d_i^+), które tworzą bazę dla leksykograficznej metody sympleks. Poniższy przykład (por. Ogryczak, 1988a) pokazuje jednak, że — w przypadku zadań zdegenerowanych — tak otrzymana baza może nie spełniać warunków optymalności leksykograficznej (dopuszczalności dualnej), pomimo że jest bazą rozwiązania optymalnego.

Przykład 2.3. Rozpatrzmy następujący leksykograficzny problem PC

$$\text{lexmin}\ (d_1^- + d_2^-, d_2^- + d_2^+ + d_3^+)^T \quad \text{pod warunkiem, że}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & d_1^- & - & d_1^+ & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & d_2^- & - & d_2^+ & = & 2 \\ & & x_2 & + & d_3^- & + & d_3^+ & = & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0}$$

Rozwiążmy ten problem stosując podejście sekwencyjne. Jako pierwszy jest rozwiązywany problem P_1, czyli minimalizowana jest funkcja osiągnięcia $z_1 = d_1^- + d_2^-$. Początkowa tablica sympleksowa ma postać

	x_1	x_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
d_1^-	1	0	-1	0	0	1
d_2^-	1	1	0	-1	0	2
d_3^-	0	1	0	0	-1	1
	2	1	-1	-1	0	3

Wprowadzając zmienna x_1 do bazy na miejsce d_1^- otrzymujemy tablicę sympleksową

	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
x_1	0	1	-1	0	0	1
d_2^-	1	-1	0	-1	0	1
d_3^-	1	0	0	0	-1	1
	1	-2	1	-1	0	1

Teraz wchodzi do bazy x_2, a d_2^- opuszcza bazę. Otrzymana po tej iteracji tablica

	d_1^-	d_2^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
x_1	1	0	-1	0	0	1
x_2	-1	1	1	-1	0	1
d_3^-	1	-1	-1	1	-1	0
	-1	-1	0	0	0	0

jest tablicą optymalną dla problemu P_1 (poziom priorytetu 1). Rozwiązaniem jest: $\mathbf{x} = (1,1)^T$, $\mathbf{d}^- = (0,0,0)^T$, $\mathbf{d}^+ = (0,0,0)^T$ i $z_1 = 0$.

Następnie rozwiązujemy problem P_2. Analogicznie jak Markowski i Ignizio (1983), dla zachowania optymalnej wartości $z_1 = 0$ wprowadzamy dwa dodatkowe równania celowe

$$\begin{array}{cccccccc} - & d_1^- & - & d_2^- & + & s_- & = & 0 \\ & d_1^- & + & d_2^- & + & s_+ & = & 0 \end{array}$$

i obliczamy zredukowane koszty dla funkcji osiągnięcia $z_2 = d_2^- + d_2^+ + d_3^-$. Początkowa tablica dla problemu P_2 przyjmuje postać

	d_1^-	d_2^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
x_1	1	0	-1	0	0	1
x_2	-1	1	1	-1	0	1
d_3^-	1	-1	-1	1	-1	0
s_-	-1	-1	0	0	0	0
s_+	1	1	0	0	0	0
	1	-2	-1	0	-1	0

Zmienna d_1^- wchodzi do bazy zastępując d_3^- i w efekcie otrzymujemy

	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
x_1	1	-1	0	-1	1	1
x_2	0	1	0	0	-1	1
d_1^-	-1	1	-1	1	-1	0
s_-	-2	1	-1	1	-1	0
s_+	2	-1	1	-1	1	0
	-1	-1	0	-1	0	0

która okazuje się być tablicą optymalną dla problemu P_2. Jest to zatem końcowa tablica sympleksowa dla podejścia sekwencyjnego. Rozwiązaniem optymalnym oryginalnego leksykograficznego problemu PC jest: $\bar{\mathbf{x}} = (1,1)^T$, $\bar{\mathbf{d}}^- = (0,0,0)^T$, $\bar{\mathbf{d}}^+ = (0,0,0)^T$ i $\bar{\mathbf{z}} = (0,0)^T$.

Przekształćmy teraz tablicę końcową do postaci odpowiedniej tablicy dla leksykograficznej (wielofazowej) metody sympleks korzystając z algorytmu opracowanego przez Markowski i Ignizio (1983). Główna operacja w tym algorytmie polega na wymuszeniu wejścia do bazy zmiennych s_- i s_+. W naszym przypadku s_- i s_+ są już w bazie. Zatem algorytm zmienia tylko postać tablicy, nie zmieniając struktury bazy. W efekcie otrzymujemy tablicę

	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
x_1	1	-1	0	-1	1	1
x_2	0	1	0	0	-1	1
d_1^-	-1	1	-1	1	-1	0
P_1	-2	1	-1	1	-1	0
P_2	-1	-1	0	-1	0	0

Jest ona ewidentnie nieoptymalna, ponieważ zawiera dodatnie elementy w wierszu indeksów optymalności dla P_1.

Innymi słowy, otrzymaliśmy tablicę generującą rozwiązanie optymalne leksykograficznego problemu PC, ale rozwiązanie dualne generowane przez tę tablicę jest niedopuszczalne i nie może być użyte do analizy wrażliwości. Gdy występuje degeneracja zadania, istnieją bazy rozwiązania optymalnego nie spełniające warunku optymalności (dopuszczalności dualnej). Korzyści z przekształcenia zaproponowanego przez Markowski i Ignizio (1983) wydają się więc być ograniczone do raczej teoretycznej klasy problemów niezdegenerowanych, podczas gdy problemy rzeczywiste są zazwyczaj silnie zdegenerowane.

Pokazaliśmy, że baza zawierająca zmienne x_1, x_2 i d_1^- jest optymalna w sensie podejścia sekwencyjnego i jednocześnie nie jest optymalna dla podejścia wielofazowego. Łatwo sprawdzić, że przedostatnia baza w podejściu sekwencyjnym zawierająca zmienne x_1, x_2 i d_3^- (nieoptymalna w tym podejściu) byłaby przekształcona w bazę optymalną dla podejścia wielofazowego. Wynika stąd, że baza optymalna dla jednego podejścia może być nieoptymalna dla drugiego podejścia i odwrotnie. Zatem w przypadku degeneracji (gdy nie ma zagwarantowanej jednoznaczości baz) nie jest możliwe bezpośrednie wyznaczenie bazy optymalnej dla podejścia wielofazowego na podstawie podejścia sekwencyjnego i odwrotnie. Co za tym idzie, nie jest możliwe wyznaczenie optymalnego rozwiązania dualnego przy użyciu podejścia sekwencyjnego bez użycia wielofazowego algorytmu sympleksowego. □

Twierdzenie 2.13 pokazuje, że wielowymiarowy dualny problem PC może być rozwiązywany jako odpowiedni ciąg skalarnych zadań dualnych. Kolejne zadania skalarne różnią się od siebie jedynie prostymi ograniczeniami na zmienne. Tym samym, tak jak w podejściu sekwencyjnym, odpowiednie zadania mogą być rozwiązywane przy użyciu standardowych procedur optymalizacyjnych. W wyniku otrzymujemy rozwiązanie dualne, a rozwiązanie pierwotne oryginalnego leksykograficznego problemu PC może być wyznaczone na podstawie warunków komplementarności (twierdzenie 2.11). Tego typu podejście zaproponował Ignizio (1985), ale było ono oparte jedynie na intuicyjnych przesłankach (bez formalnego dowodu) i zawierało szereg nieścisłości (por. Crowder i Sposito, 1987). Poniżej przedstawiamy oparty na twierdzeniu 2.13 dualny algorytm sekwencyjny realizujący koncepcję Ignizio (1985) dla liniowych leksykograficznych zadań PC w postaci (2.22)–(2.25).

Algorytm DAS
Krok 0^0 Wyznaczamy zbiory indeksów

$$\begin{array}{rl} I_d = \{i \in I \ : \ w_{1i}^+ < +\infty\}, & I_g = \{i \in I \ : \ w_{1i}^- < +\infty\} \\ J_0^- = \{j \in J \ : \ b_j^- = -\infty\}, & J_0^+ = \{j \in J \ : \ b_j^+ = +\infty\} \\ J^- = J - J_0^-, & J^+ = J - J_0^+ \end{array}$$

Ustalamy bieżący poziom priorytetu $r = 1$.
Krok 1^0 Dla bieżącego r rozwiązujemy zadanie:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{D}_r \ : \ \max \{ & \mathbf{v}^-\mathbf{b}^- - \mathbf{v}^+\mathbf{b}^+ \ : \ \mathbf{uC} + \mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+ = \mathbf{0}, \\ & u_i \geq -w_{ri}^+ \quad \text{dla } i \in I_d, \quad u_i \leq w_{ri}^- \quad \text{dla } i \in I_g \\ & v_j^- = 0 \quad \text{dla } j \in J_0^-, \quad v_j^- \geq 0 \quad \text{dla } j \in J^- \\ & v_j^+ = 0 \quad \text{dla } j \in J_0^+, \quad v_j^+ \geq 0 \quad \text{dla } j \in J^+ \} \end{array}$$

Niech $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}^-, \bar{\mathbf{v}}^+)$ oznacza rozwiązanie optymalne, a $\bar{z}$ wartość optymalną. Określamy r–te wiersze macierzy rozwiązania dualnego $\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}_r^- = \bar{\mathbf{v}}^-$, $\mathbf{v}_r^+ = \bar{\mathbf{v}}^+$ oraz r–tą współrzędną wektora osiągnięcia $z_r = \bar{z}$
Krok 2^0 Jeżeli $r = p$, to wyznaczone jest rozwiązanie optymalne problemu dualnego (STOP).
W przeciwnym przypadku wyznaczamy zbiory indeksów

$$\begin{array}{rl} \bar{I}_d = \{i \in I_d \ : \ \bar{u}_i > -w_{ri}^+\}, & \bar{I}_g = \{i \in I_g \ : \ \bar{u}_i < -w_{ri}^-\} \\ \bar{J}^- = \{j \in J^- \ : \ \bar{v}_i^- > 0\}, & \bar{J}^+ = \{j \in J^+ \ : \ \bar{v}_i^+ > 0\} \end{array}$$

i modyfikujemy zbiory indeksów

$$I_d := I_d - \bar{I}_d, \quad I_g := I_g - \bar{I}_g, \quad J^- := J^- - \bar{J}^-, \quad J^+ := J^+ - \bar{J}^+$$

Zwiększamy r o jeden i powracamy do kroku 1^0. □

Algorytm DAS wyznacza rozwiązanie optymalne dualnego problemu celowego. Rozwiązanie optymalne odpowiedniego problemu pierwotnego $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ można wtedy wyznaczyć na podstawie warunków komplementarności (por. wniosek 2.6).

Faktycznie odpowiednie współrzędne niebazowe rozwiązania mogą być określane w trakcie realizacji algorytmu DAS na podstawie generowanych w każdej iteracji zbiorów indeksów $\bar{I}_d$, $\bar{I}_g$, $\bar{J}^-$ oraz $\bar{J}^+$ według następujących reguł

$$
\begin{aligned}
x_j = b_j^- &\quad \text{dla} \quad j \in \bar{J}^- \\
x_j = b_j^+ &\quad \text{dla} \quad j \in \bar{J}^+ \\
d_i^- = 0 &\quad \text{dla} \quad i \in \bar{I}_g \\
d_i^+ = 0 &\quad \text{dla} \quad i \in \bar{I}_d
\end{aligned}
$$

Wartości zmiennych bazowych są wtedy określone jako rozwiązania układu równań

$$\mathbf{Cx} + \mathbf{d}^- - \mathbf{d}^+ = \mathbf{0}$$

i mogą być wyznaczone jako odpowiednie ceny dualne w rozwiązywanym w ostatniej iteracji ($r = p$) zadaniu programowania liniowego D_p.

Do rozwiązywania kolejnych problemów D_r w kroku 1^0 algorytmu DAS najwygodniej jest stosować dualny algorytm sympleksowy, wykorzystujący technikę dwustronnych ograniczeń na zmienne (por. Zorychta i Ogryczak, 1981). Baza optymalna wyznaczona dla danego problemu D_r jest bowiem jednocześnie bazą dualnie dopuszczalną dla kolejnego problemu D_{r+1}.

Przykład 2.4. Przebieg algorytmu DAS przedstawimy dla zadania PC postaci

$$\text{lexmin } (2d_1^+ + 3d_2^+, d_3^-, d_4^+)^T$$

pod warunkiem, że

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +\ x_2 & -x_3 & +d_1^- & -d_1^+ & = 0 \\
x_1 & & -x_4 & +d_2^- & -d_2^+ & = 0 \\
5x_1 & +3x_2 & -x_5 & +d_3^- & -d_3^+ & = 0 \\
x_1 & +\ x_2 & -x_6 & +d_4^- & -d_4^+ & = 0
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 = 10, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 56, \quad x_6 = 12$$

$$d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0 \quad \text{dla } i = 1,2,3,4$$

Dualne zadanie PC w rozwiniętej formie (2.41)–(2.44) można zapisać jako

$$\text{lexmax } 10\mathbf{V}_3^- - 10\mathbf{V}_3^+ + 4\mathbf{V}_4^- - 4\mathbf{V}_4^+ + 56\mathbf{V}_5^- - 56\mathbf{V}_5^+ + 12\mathbf{V}_6^- - 12\mathbf{V}_6^+$$

pod warunkiem, że

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\mathbf{U}_1 & +\mathbf{U}_2 & +5\mathbf{U}_3 & +\mathbf{U}_4 & +\mathbf{V}_1^- & & = \mathbf{0} \\
\mathbf{U}_1 & & +3\mathbf{U}_3 & +\mathbf{U}_4 & +\mathbf{V}_2^- & & = \mathbf{0} \\
-\mathbf{U}_1 & & & & +\mathbf{V}_3^- & -\mathbf{V}_3^+ & = \mathbf{0} \\
& -\mathbf{U}_2 & & & +\mathbf{V}_4^- & -\mathbf{V}_4^+ & = \mathbf{0} \\
& & -\ \mathbf{U}_3 & & +\mathbf{V}_5^- & -\mathbf{V}_5^+ & = \mathbf{0} \\
& & & -\mathbf{U}_4 & +\mathbf{V}_6^- & -\mathbf{V}_6^+ & = \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$\mathbf{V}_1^+ = \mathbf{V}_2^+ = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_j^+ \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{dla } j = 3, \ldots, 6$$

$$\mathbf{V}_j^- \geq_{lex} \mathbf{0} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_1 \leq_{lex} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_2 \leq_{lex} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_3 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_4 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gdzie zmienne $\mathbf{V}_1^+$, $\mathbf{V}_2^+$ odpowiadające nieskończonym współczynnikom b_1^+ i b_2^+ zostały pominięte jako równe $\mathbf{0}$. Korzystając ze specyficznej struktury zadania ($b_j^- = b_j^+$ dla $j = 3, 4, 5, 6$) zmienne $\mathbf{V}_j^-$, $\mathbf{V}_j^+$ dla $j = 3, 4, 5, 6$ można wyeliminować z rozważań na podstawie odpowiednich równań celowych. Pozwala to zmniejszyć wymiar zadania dualnego sprowadzając je do postaci

$$\begin{array}{l}
\text{lexmax } 10\mathbf{U}_1 + 4\mathbf{U}_2 + 56\mathbf{U}_3 + 12\mathbf{U}_4 \\
\text{pod warunkiem, że} \\
\begin{array}{llllll}
\mathbf{U}_1 & +\mathbf{U}_2 & +5\mathbf{U}_3 & +\mathbf{U}_4 & +\mathbf{V}_1^- & = \mathbf{0} \\
\mathbf{U}_1 & & +3\mathbf{U}_3 & +\mathbf{U}_4 & +\mathbf{V}_2^- & = \mathbf{0}
\end{array} \\
\mathbf{V}_1^- \geq_{lex} \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_2^- \geq_{lex} \mathbf{0} \\
\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_1 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_2 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_3 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \leq_{lex} \mathbf{U}_4 \leq_{lex} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
\end{array}$$

Zastosujmy do tego zadania algorytm DAS.
Krok 0^0: $r := 1$, $I_d = \{1, 2, 3, 4\}$, $I_g = \{1, 2, 3, 4\}$, $J_0^- = \emptyset$, $J^- = \{1, 2\}$, $J^+ = \emptyset$.
Krok 1^0: Rozwiązujemy zadanie D_1

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{D}_1 \ : \ \max \{ & 10u_1 + 4u_2 + 56u_3 + 12u_4 \ : \\
& \begin{array}{llllll}
u_1 & +u_2 & +5u_3 & +u_4 & +v_1^- & = 0 \\
u_1 & & +3u_3 & +u_4 & +v_2^- & = 0
\end{array} \\
& v_1^- \geq 0, \quad v_2^- \geq 0 \\
& -2 \leq u_1 \leq 0, \quad -3 \leq u_2 \leq 0, \quad 0 \leq u_3 \leq 0, \quad 0 \leq u_4 \leq 0\}
\end{array}$$

Zestawiamy tablicę sympleksową w bazie złożonej ze zmiennych v_1^- i v_2^- ($J_B = \{v_1^-, v_2^-\}$) przyjmując, że wszystkie zmienne niebazowe znajdują się na górnych ograniczeniach ($J_G = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$), czyli nie ma żadnej zmiennej na dolnym ograniczeniu ($J_D = \emptyset$).

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1^-	v_2^+	
v_1^-	1	1	5	1	1	0	0
v_2^-	1	0	3	1	0	1	0
	-10	-4	-56	-12	0	0	0

W tablicy tej kolejne kolumny odpowiadają zmiennym: u_1, u_2, u_3, u_4, v_1^-, v_2^-, przy czym ostatni wiersz zawiera tzw. koszty zredukowane dla poszczególnych zmiennych. Ostatnia kolumna zawiera wartość funkcji celu i współrzędne bazowe bieżącego rozwiązania. Startowe rozwiązanie bazowe $\bar{\mathbf{u}} = (0, 0, 0, 0)$, $\bar{\mathbf{v}}^- = (0, 0)$ spełnia warunki optymalności, przy czym $\bar{z} = 0$. Zatem określamy $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 0)$, $v_{11}^- = v_{12}^- = 0$, $z_1 = 0$ i przechodzimy do kroku 2^0.

Krok 2^0: Wyznaczamy zbiory ograniczeń spełnionych jako nierówności ostre: $\bar{J}^- := \emptyset$, $\bar{I}_d := \{1,2\}$, $\bar{I}_d := \emptyset$ i określamy nowe zbiory $J^- := \{1,2\}$, $I_d := \{3,4\}$, $I_g := \{1,2,3,4\}$. Można już określić odpowiednie współrzędne rozwiązania zadania pierwotnego $d_1^+ = 0$, $d_2^+ = 0$. Zwiększamy r ($r := 2$) i powracamy do kroku 1^0.
Krok 1^0: Określamy zadanie D_2. W stosunku do zadania D_1 zmieniają się tylko proste ograniczenia na zmienne, które przyjmują teraz postać

$$u_1 \le 0, \quad u_2 \le 0, \quad 0 \le u_3 \le 1, \quad 0 \le u_4 \le 0, \quad v_1^- \ge 0, \quad v_2^- \ge 0$$

Tablica sympleksowa zasadniczo nie zmienia się. Nowe ograniczenia na zmienne powodują jedynie zmianę ostatniej kolumny tablicy. Przyjmuje ona teraz postać $(56,-5,-3)^T$. Tym razem jednak baza określona zbiorami indeksów $J_B = \{v_1^-, v_2^-\}$, $J_D = \emptyset$, $J_G = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ nie spełnia warunków dopuszczalności ($v_1^- = -5$, $v_2^- = -3$). Wykonując dualną iterację sympleksową otrzymujemy bazę: $J_B = \{u_2, v_2^-\}$, $J_D = \{v_1^-\}$, $J_G = \{u_1,u_3,u_4\}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1^-	v_2^+	
u_2	1	1	5	1	1	0	-5
v_2^-	1	0	3	1	0	1	-3
	-6	0	-36	-8	4	0	36

Po kolejnej iteracji otrzymujemy bazę: $J_B = \{u_2, u_1\}$, $J_D = \{v_1^-, v_2^-\}$, $J_G = \{u_3, u_4\}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1^-	v_2^+	
u_2	0	1	2	0	1	-1	-2
u_1	1	0	3	1	0	1	-3
	0	0	-18	-2	4	6	18

Ostatnia baza generuje rozwiązanie optymalne $\bar{\mathbf{u}} = (-3,-2,1,0)$, $\bar{\mathbf{v}}^- = (0,0)$, przy czym $\bar{z} = 18$. Zatem określamy $\mathbf{u}_2 = (-3,-2,1,0)$, $v_{21}^- = v_{22}^- = 0$ oraz $z_2 = 18$ i przechodzimy do kroku 2^0.
Krok 2^0: Wyznaczamy zbiory ograniczeń spełnionych jako nierówności ostre: $\bar{J}^- := \emptyset$, $\bar{I}_d := \{3\}$, $\bar{I}_d := \{1,2\}$ i określamy nowe zbiory $J^- := \{1,2\}$, $I_d := \{4\}$, $I_g := \{3,4\}$. Możemy już określić odpowiednie współrzędne rozwiązania zadania pierwotnego $d_3^+ = 0$, $d_1^+ = 0$, $d_2^+ = 0$. Zwiększamy r ($r := 3$) i powracamy do kroku 1^0.
Krok 1^0: Określamy zadanie D_3. W stosunku do zadania D_2 zmieniają się tylko proste ograniczenia na zmienne, które przyjmują teraz postać

$$u_3 \le 0, \quad -1 \le u_4 \le 0, \quad v_1^- \ge 0, \quad v_2^- \ge 0$$

Tablica sympleksowa zasadniczo nie zmienia się. Nowe ograniczenia na zmienne powodują jedynie zmianę ostatniej kolumny tablicy. Przyjmuje ona teraz postać $(0,0,0)^T$. Generowane przez tę tablicę rozwiązanie bazowe $\bar{\mathbf{u}} = (0,0,0,0)$, $\bar{\mathbf{v}}^- = (0,0)$ spełnia warunki optymalności, przy czym $\bar{z} = 0$. Zatem określamy $\mathbf{u}_3 = (0,0,0,0)$, $v_{31}^- = v_{32}^- = 0$ oraz $z_3 = 0$ i przechodzimy do kroku 2^0.
Krok 2^0: $r = 3$, więc proces rozwiązywania zadania jest zakończony. Rozwiązaniem optymalnym dualnego zadania PC są macierze

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a pozostałe elementy rozwiązania pełnej rozwiniętej postaci zadania są określone następująco

$$\mathbf{V}_1^+ = \mathbf{V}_2^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_3^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_3^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_4^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_4^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_5^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_5^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_6^- = \mathbf{V}_6^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Optymalny wektor osiągnięcia $\mathbf{z} = (0, 18, 0)^T$. Korzystając z ustalonych w trakcie przebiegu algorytmu współrzędnych rozwiązania pierwotnego oraz z rozwiązania dualnego odczytanego z ostatniej tablicy sympleksowej, możemy wyznaczyć rozwiązanie problemu pierwotnego jako $\mathbf{x} = (4, 6, 10, 4, 56, 12)^T$, $\mathbf{d}^- = (10, 0, 18, 2)^T$ i $\mathbf{d}^+ = (10, 0, 0, 0)^T$ □

2.4 Model preferencji programowania celowego

Programowanie celowe opiera się na tzw. *zadowalającym modelu* procesu decyzyjnego (Simon, 1957). W modelu tym przyjmuje się, że decydent rozwiązując problem decyzyjny określa poziomy aspiracji jako pożądane wartości poszczególnych ocen. Jeżeli wartości ocen nie osiągają poziomów aspiracji, decydent stara się znaleźć lepsze rozwiązanie. Jeżeli jednak wartości pewnych ocen osiągnęły odpowiednie poziomy aspiracji, to decydent nie interesuje się ich dalszą poprawą, koncentrując uwagę jedynie na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji. W terminach relacji preferencji klasyczny model zadowalający oznacza, że żaden wektor ocen nie jest ściśle preferowany w stosunku do wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}$, czyli

$$\mathbf{a} \preceq \mathbf{y} \quad \text{dla każdego } \mathbf{y} \in Y \tag{2.58}$$

Łatwo zauważyć, że warunek (2.58) jest w ogólnym przypadku sprzeczny z warunkiem ścisłej monotoniczności (1.5). Dokładniej, jeżeli istnieje wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in Y$ taki, że $\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{a}$, to warunek (2.58) jest sprzeczny z warunkiem ścisłej monotoniczności (1.5). Oznacza to, że w przypadku rozważanej przez nas przestrzeni ocen $Y = R^m$, relacje preferencji zgodne z modelem zadowalającym nie mogą spełniać warunku ścisłej monotoniczności na całej przestrzeni Y, a tylko na pewnych jej podzbiorach.

Modele programowania celowego spełniają warunek (2.58). Dlatego techniki programowania celowego nie zawsze wyznaczają rozwiązania efektywne oryginalnych problemów wielokryterialnych (1.7). Techniki ważonego i leksykograficznego PC z dodatnimi współczynnikami wagowymi generują rozwiązania efektywne, jeżeli wektor poziomów aspiracji spełnia warunek

$$\mathbf{a} \overset{\leq}{=} \mathbf{y} \quad \text{dla każdego } \mathbf{y} \in A \tag{2.59}$$

Twierdzenie 2.16 *Jeżeli wektor poziomów aspiracji* $\mathbf{a}$ *spełnia warunek (2.59), to rozwiązanie optymalne problemu PC (2.7) z ważoną funkcją osiągnięcia (2.2) o współczynnikach wagowych* $w_i^+ > w_i^- \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Ponieważ $A \subset Y(\mathbf{a}) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{a}\}$, to wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\min \{\sum_{i \in I} w_i^+ (f_i(\mathbf{x}) - a_i) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Problem ten generuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunki zwrotności, przechodniości i ścisłej monotoniczności. Zatem, na mocy twierdzenia 1.7 wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania (1.7). ■

Twierdzenie 2.17 *Jeżeli wektor poziomów aspiracji* $\mathbf{a}$ *spełnia warunek (2.59), to rozwiązanie optymalne leksykograficznego problemu PC (2.13) z wektorową funkcją osiągnięcia (2.11)–(2.12) o współczynnikach wagowych spełniających warunek* $\mathbf{W}^+ >_{lex} \mathbf{W}^- \geq_{lex} \mathbf{0}$ *jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Ponieważ $A \subset Y(\mathbf{a}) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \mathbf{y} \geqq \mathbf{a}\}$, to wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (2.13) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\operatorname{lexmin} \{(\sum_{i \in I} w_{1i}^+ (f_i(\mathbf{x}) - a_i), \sum_{i \in I} w_{2i}^+ (f_i(\mathbf{x}) - a_i), \dots, \sum_{i \in I} w_{pi}^+ (f_i(\mathbf{x}) - a_i)) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Problem ten generuje relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunki zwrotności, przechodniości i ścisłej monotoniczności. Zatem, na mocy twierdzenia 1.7 wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania (1.7). ■

Zauważmy, że analogicznego twierdzenia nie można udowodnić dla minimaksowego modelu PC (2.10), ponieważ minimaksowa funkcja skalaryzująca nie spełnia warunku ścisłej monotoniczności (por. podrozdział 1.3). Ponadto, dla spełnienia warunku (2.59), nie wystarcza, że wektor poziomów aspiracji jest nieosiągalny ($\mathbf{a} \notin A$). Poniższy przykład ilustruje, że naruszenie warunku (2.59) może spowodować generowanie przez techniki PC rozwiązań nieefektywnych.

Przykład 2.5. Rozpatrzmy problem liniowy z dwiema funkcjami oceny

$$\begin{aligned} &\text{zminimalizować } (x_1, x_2) \\ &\text{pod warunkiem, że} \\ &x_1 + x_2 \geq 3, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Zbiór rozwiązań efektywnych dla tego problemu ma postać

$$\{(x_1, x_2) \ : \ x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1\}$$

czyli jest to odcinek łączący wierzchołki (1,2) i (2,1) wraz z tymi wierzchołkami.

Przekształćmy ten problem w zadanie programowania celowego wprowadzając (nieosiągalny) wektor poziomów aspiracji $a_1 = 0$ i $a_2 = 3$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & + & d_1^- & - & d_1^+ & = 0 \\
& x_2 & + & d_2^- & - & d_2^+ & = 3 \\
x_1 & + x_2 & \geq & 3 & & & \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad d_1^- \geq 0, \quad d_1^+ \geq 0, \quad d_2^- \geq 0, \quad d_2^+ \geq 0$$

Łatwo sprawdzić, że punkt $\mathbf{x} = (1,3)$ jest rozwiązaniem optymalnym tego zadania programowania celowego dla dowolnej funkcji osiągnięcia o postaci (2.2), (2.10) lub (2.11) z nieujemnymi wagami. Punkt (1,3) jest rozwiązaniem dopuszczalnym, ale nie jest rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego. $\square$

Żeby zagwarantować spełnienie warunku (2.59), wektor poziomów aspiracji powinien spełniać nierówność $\mathbf{a} \leqq \mathbf{y}^u$ (gdzie $\mathbf{y}^u$ jest wektorem utopii). Zostało to wykorzystywane przez Zeleny'ego (1974) w metodzie przesuniętego ideału. Warunek $\mathbf{a} \leqq \mathbf{y}^u$ i, co za tym idzie, warunek (2.59) istotnie ogranicza możliwości wyboru poziomów aspiracji i jest sprzeczny z przyjętą w programowaniu celowym zasadą, że poziomy aspiracji są głównymi parametrami sterującymi, podczas gdy współczynniki wagowe spełniają rolę pomocniczą. Dlatego też w praktycznych zastosowaniach programowania celowego warunek (2.59) nie jest przestrzegany, co prowadzi do wyznaczania rozwiązań nieefektywnych. Poniższy przykład zawiera zaczerpnięty z literatury rzeczywisty problem decyzyjny, dla którego zastosowany model PC wygenerował rozwiązanie ewidentnie nieefektywne.

Przykład 2.6. Parker (1985) prezentuje leksykograficzny model PC dla projektowania i oceny systemu informatycznego w jednostce służby zdrowia. Model zawiera cztery zmienne decyzyjne z dwustronnymi ograniczeniami i cztery funkcje oceny. Pierwsza z nich f_1 jest minimalizowana, przy czym jako poziom aspiracji przyjęto $a_1 = 82$. Dalsze dwie (f_2 i f_3) powinny osiągać wartości jak najbliższe poziomów aspiracji $a_2 = 125$ i $a_3 = 53$. Natomiast f_4 jest maksymalizowana, przy czym jako odpowiedni poziom aspiracji przyjęto $a_4 = 80$. Uwzględniając zadaną hierarchię priorytetów otrzymujemy leksykograficzny model PC postaci

$$
\begin{array}{l}
\text{lexmin } (d_1^+, d_2^- + d_2^+, d_3^- + d_3^+, d_4^-) \\
\text{pod warunkiem, że} \\
\begin{array}{rcrcrcrcccccr}
15.0x_1 & + & 17.5x_2 & - & 8.7x_3 & - & 1.3x_4 & + & d_1^- & - & d_1^+ & = & 82 \\
30.7x_1 & + & 16.2x_2 & - & 10.2x_3 & + & 2.6x_4 & + & d_2^- & - & d_2^+ & = & 125 \\
10.3x_1 & - & 2.1x_2 & + & 15.5x_3 & - & 5.6x_4 & + & d_3^- & - & d_3^+ & = & 53 \\
7.4x_1 & + & 5.6x_2 & + & 4.1x_3 & + & 2.3x_4 & + & d_4^- & - & d_4^+ & = & 80
\end{array} \\
1 \leq x_1 \leq 7, \quad 1 \leq x_2 \leq 7, \quad 1 \leq x_3 \leq 7, \quad 1 \leq x_4 \leq 7 \\
\mathbf{d}^- \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^+ \geqq \mathbf{0}
\end{array}
$$

Stosując do tego modelu podejście sekwencyjne, Parker (1985) wyznaczył rozwiązanie optymalne: $\mathbf{x} = (2.24, 5.54, 4.37, 5.77)$, $\mathbf{d}^- = \mathbf{d}^+ = \mathbf{0}$ z ocenami $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (82, 125, 53, 80)$. Zauważmy, że zachowując pożądane wartości f_2 i f_3 można uzyskać mniejszą wartość minimalizowanej funkcji oceny f_1 i większą wartość maksymalizowanej funkcji f_4. W szczególności dopuszczalne są rozwiązania wierzchołkowe: $\mathbf{x} = (2.76, 4.32, 4.70, 7)$ z wektorem ocen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (67, 125, 53, 80)$ oraz $\mathbf{x} = (2.03, 6.17, 5.44, 7)$ z wektorem ocen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (82, 125, 53, 87.94)$. □

Fakt, że model preferencji programowania celowego nie spełnia warunku ścisłej monotoniczności, może prowadzić do poważnych trudności z użyciem modelu PC nawet w przypadku, gdy model preferencji decydenta nie wymaga spełnienia tego warunku. W twierdzeniach 2.1–2.3 dowodziliśmy, że rozwiązania optymalne odpowiednich problemów PC są rozwiązaniami dopuszczalnymi oryginalnego zadania wielokryterialnego, minimalizującymi odpowiednie funkcje osiągnięcia. Szereg modeli programowania liniowego kryje w sobie pewne zależności nieliniowe wykorzystując fakt, że odpowiednie funkcje oceny są minimalizowane (lub maksymalizowane). Dotyczy to w szczególności modeli, w których minimalizuje się funkcje oceny typu $\max_{j \in J} x_j$. Zwykle przekształca się je w zadania programowania liniowego przez wprowadzenie zmiennej z, reprezentującej wartość funkcji celu, i dodatkowych nierówności $x_j \leq z$ dla $j \in J$ (Williams, 1993). Nierówności te gwarantują, że z nie jest mniejsze od żadnego x_j ($j \in J$), a minimalizacja z doprowadza jego wartość do maksimum x_j. Zastosowanie do takiego modelu podejścia PC nie spełniającego warunku ścisłej monotoniczności niszczy relacje pomiędzy zmiennymi oparte na założeniu minimalizacji odpowiedniej funkcji. Może to spowodować, że z nie będzie równe $\max_{j \in J} x_j$. Zatem standardowe podejście PC nie może być stosowane do wielokryterialnego problemu optymalizacji (1.7) bez głębokiej analizy i ewentualnej przebudowy oryginalnego modelu.

Przykład 2.7. Rozpatrzmy prosty problem o dwóch zmiennych decyzyjnych x_1 i x_2 spełniających równanie $x_1 + x_2 = 1$ z funkcją oceny $f(x_1, x_2) = \max\ \{x_1, x_2\}$. Zadanie minimalizacji funkcji f jest zwykle formułowane w postaci

$$\min\ \{z\ :\ x_1 \leq z, \quad x_2 \leq z, \quad x_1 + x_2 = 1\} \tag{2.60}$$

Przypuśćmy, że 0.7 jest najbardziej preferowaną wartością oceny f. Jest to model preferencji w pełni zgodny z koncepcją programowania celowego. Przyjmując 0.7 jako poziom aspiracji a i stosując technikę ważonego PC do problemu (2.60) otrzymujemy zadanie

$$\begin{aligned} \min\ \{w^- d^- + w^+ d^+ \quad : \quad & z + d^- - d^+ = 0.7,\ x_1 \leq z,\ x_2 \leq z, \\ & x_1 + x_2 = 1,\ d^-,\ d^+ \geq 0\} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Zauważmy, że problem (2.61) ma wiele rozwiązań optymalnych. W szczególności, dla dowolnych nieujemnych wag w^- i w^+, wartości $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6$ i $z = 0.7$ definiują rozwiązanie optymalne problemu PC (2.61), przy czym $d^- = d^+ = 0$ sugeruje, że funkcja oceny f osiągnęła zadany poziom aspiracji. W rzeczywistości $\max\ \{x_1, x_2\} = 0.6$, a tylko zmienna z osiągnęła wartość 0.7. W tym przypadku ani z nie wyraża wartości $\max\ \{x_1, x_2\}$, ani d^- nie wyraża wartości odpowiedniego odchylenia w dół. □

Rozdział 3

Metody punktu referencyjnego

3.1 Metoda punktu referencyjnego

Programowanie celowe nie spełnia postulatu parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych i w pewnych przypadkach może generować rozwiązania, które nie są efektywne (Hallefjord i Jörnsten, 1988). Wady tej pozbawione są *metody punktu referencyjnego*. Metoda punktu referencyjnego została wprowadzona przez Wierzbickiego (1977, 1982). Połączyła ona prostotę i otwartość sterowania procesem analizy interaktywnej programowania celowego ze ścisłym przestrzeganiem zasady efektywności generowanych rozwiązań i zupełnej parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych (Wierzbicki, 1986). Rozwinięte zostały liczne warianty metody punktu referencyjnego i metod opartych na podobnych zasadach (Steuer i Choo, 1983; Nakayama i Sawaragi, 1984; Korhonen i Laakso, 1986; Lewandowski i Wierzbicki, 1988; Nakayama, 1992; Ogryczak i Lahoda, 1992; Michalowski i Szapiro, 1992; Steuer, 1993). Metody punktu referencyjnego zostały zaimplementowane dla wielokryterialnych zadań programowania liniowego (Grauer i inni, 1984; Rogowski i inni, 1988), programowania nieliniowego (Kręglewski i inni, 1988; Jaszkiewicz i Słowiński, 1992) oraz programowania dyskretnego (Ogryczak i inni, 1989; 1992). Pozwoliło to na budowę szeregu systemów wspomagania decyzji opartych na metodach punktu referencyjnego (por. Lewandowski i Wierzbicki, 1989a; Lewandowski i inni, 1989; Wierzbicki, 1993) i ich wykorzystanie do rozwiązywania różnych problemów praktycznych (Lewandowski i Wierzbicki, 1989; Malczewski i Ogryczak, 1990; Wessels i Wierzbicki, 1993).

Metody punktu referencyjnego, tak jak techniki PC, używają poziomów aspiracji jako głównych parametrów sterujących, ale dzięki odmiennemu modelowi preferencji generują zawsze rozwiązania efektywne. Model preferencji użyty w metodach punktu referencyjnego spełnia następujące dwa postulaty:

P1. Relacja preferencji jest racjonalną relacją preferencji, czyli spełnia warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5).

P2. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami $f_i(\mathbf{x})$ równymi odpowiadającym im poziomom aspiracji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną większą od odpowiadającego jej poziomu aspiracji.

Postulat **P1** oznacza, że rozwiązania efektywne dominują rozwiązania nieefektywne, czyli że preferencje decydenta są zgodne z zasadą wyboru rozwiązań efektywnych. Postulat **P2** wyraża, że decydent woli oceny osiągające wszystkie poziomy aspiracji od tych, które nie osiągają jednego lub więcej poziomów aspiracji. Zauważmy, że postulat ten nie pokrywa się z leżącym u podstaw podejścia zadowalającego i programowania celowego założeniem (2.58), że wektor poziomów aspiracji jest najbardziej preferowanym wektorem ocen. Postulat **P2** może być zapisany w postaci warunku

$$(\mathbf{y} \neq \mathbf{a} \quad \text{i} \quad \mathbf{y} \not\leqq \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y} \tag{3.1}$$

co oznacza, że wektor aspiracji $\mathbf{a}$ jest ściśle preferowany w stosunku do każdego wektora ocen $\mathbf{y} \in Y$, który nie dominuje słabo wektora $\mathbf{a}$

$$\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y} \tag{3.2}$$

Modele preferencji oparte na warunku (3.1) nazywane są *quasi–zadowalającymi* (Wierzbicki, 1986). W modelach tych przyjmuje się, podobnie jak w modelu zadowalającym (por. podrozdział 2.4), że decydent rozwiązując problem decyzyjny określa poziomy aspiracji jako pożądane wartości poszczególnych ocen. Jeżeli wartości ocen nie osiągają poziomów aspiracji, to decydent stara się znaleźć lepsze rozwiązanie. Jeżeli wartości pewnych ocen osiągnęły odpowiednie poziomy aspiracji, to decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji. Jednak gdy wszystkie oceny osiągną założone poziomy aspiracji, to decydent jest zainteresowany dalszą poprawą ocen, o ile jest to możliwe .

Warunek (3.1), niezależnie od wyboru wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}$, nie jest sprzeczny z warunkiem ścisłej monotoniczności (1.5). Dlatego istnieje możliwość konstrukcji takich skalaryzacji zadań wielokryterialnych, że definiowane przez nie relacje preferencji spełniają postulaty **P1** i **P2**. Co więcej, brak ograniczeń na wybór poziomów aspiracji pozwala wykorzystywać poziomy aspiracji jako główne parametry sterujące w procesie analizy interaktywnej. Zauważmy, że postulaty **P1** i **P2** są spełnione przez model PC (2.7) z ważoną funkcją osiągnięcia (2.2), gdy współczynniki wagowe spełniają nienaturalny dla metodologii PC warunek $w_i^+ > -w_i^- > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Warunek ten zakłada w szczególności, że wagi w_i^- odpowiadające odchyleniom w dół przyjmują wartości ujemne. Jest to oczywiście niezgodne z ideą programowania celowego i koncepcją ścisłego podejścia zadowalającego (2.58).

Metody punktu referencyjnego polegają na minimalizacji odpowiednio zdefiniowanej *skalaryzującej funkcji osiągnięcia*, generującej relację preferencji spełniającą postulaty **P1** i **P2**. Dzięki temu wyznaczają one zawsze rozwiązania efektywne. Ponadto wymaga się, żeby skalaryzująca funkcja osiągnięcia zapewniała zupełność parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych przez poziomy aspiracji. Wymaganie to oznacza, że dla każdego osiągalnego wektora ocen ($\mathbf{y} \in A$) powinny istnieć poziomy aspiracji pozwalające wyznaczyć rozwiązanie efektywne, generujące ten wektor ocen (nawet w przypadku dyskretnych lub niewypukłych zbiorów dopuszczalnych). Tej ostatniej własności nie posiada przytoczony wcześniej uogólniony model ważonego programowania celowego z ujemnymi wagami dla odchyleń w dół.

Jedna z najprostszych skalaryzujących funkcji osiągnięcia dla zadania (1.7) przyjmuje następującą postać (por. Steuer, 1986)

$$s(\mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,m} \{\lambda_i(y_i - a_i)\} + \rho \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(y_i - a_i) \tag{3.3}$$

gdzie

a_i oznaczają poziomy aspiracji (współrzędne wektora aspiracji $\mathbf{a}$),

λ_i są dodatnimi czynnikami skalującymi,

ρ oznacza arbitralnie mały, dodatni parametr regularyzacyjny.

Minimalizacja funkcji (3.3) ze względu na $\mathbf{y} \in A$ wyznacza niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}$ i generujące go rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}$. Wyznaczone rozwiązanie efektywne zależy od wartości dwóch grup parametrów: poziomów aspiracji a_i i czynników skalujących λ_i. W implemetacjach metody wartości czynników skalujących λ_i ustala się zazwyczaj automatycznie na podstawie wstępnej analizy problemu, natomiast poziomy aspiracji a_i pozostawia się jako parametry sterujące procesem analizy interaktywnej (por. Grauer i inni, 1984). Parametr ρ służy jedynie do wprowadzenia składnika regularyzacyjnego gwarantującego efektywność rozwiązania w przypadku niejednoznaczności minimum pierwszego składnika funkcji $s(\mathbf{y})$.

Minimalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia (3.3) ze względu na $\mathbf{y} \in A$ może być rozpatrywana jako implementacja dwupoziomowego leksykograficznego zadania parametrycznego

$$\text{lexmin } \{(\max_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, f_i(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}, \qquad \mathbf{a} \in Y \tag{3.4}$$

gdzie

$$s_i(a_i, y_i) = \lambda_i(y_i - a_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.5}$$

Zauważmy, że parametryczne funkcje $s_i(a_i, y_i)$ postaci (3.5) są liniowymi funkcjami skalującymi indywidualne oceny y_i. Co więcej, w przypadku dodatnich wartości λ_i są to funkcje ściśle rosnące, czyli spełnione są założenia wniosku 1.22. Ogólnie z wniosku 1.22 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.1 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$, ściśle rosnących względem y_i, rozwiązanie optymalne zadania (3.4) jest rozwiązaniem efektywnym wielokryterialnego zadania (1.7).*

Dla zagwarantowania spełnienia przez parametryzację (3.4) obu postulatów **P1** i **P2** quasi–zadowalającego modelu preferencji będziemy zakładać, że funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i oraz spełniają warunek

$$s_1(a_1, a_1) = s_2(a_2, a_2) = \cdots = s_m(a_m, a_m) \tag{3.6}$$

Twierdzenie 3.1 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (3.6), relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną minimalizację (3.4) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna oraz spełnia warunek (3.1).*

Dowód. Zwrotność, przechodniość i ścisła monotoniczność relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (3.4) wynika bezpośrednio ze ścisłej monotoniczności funkcji $s_i(a_i, y_i)$ względem y_i (por. wniosek 1.21). Dalej, zauważmy, że na mocy twierdzenia 1.11 prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{y} \not\geqq \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y}$$

co oznacza spełnienie warunku (3.1). ∎

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a} \in Y$ funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to każde rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^0$ wielokryterialnego zadania (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.4) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0$ będzie rozwiązaniem efektywnym zadania (1.7). Przypuśćmy, że $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.4) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Istnieje wtedy wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$\max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x})) \leq \max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x}^0))$$

i jednocześnie w przypadku równości spełniona jest dodatkowo nierówność ostra

$$\sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x})) < \sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x}^0))$$

Zauważmy, że na mocy warunku (3.6)

$$s_1(f_1(\mathbf{x}^0), f_1(\mathbf{x}^0)) = \cdots = s_m(f_m(\mathbf{x}^0), f_m(\mathbf{x}^0)) = \max_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x}^0))$$

Zatem

$$s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x})) \leq s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x}^0)) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

i istnieje indeks i_0 taki, że

$$s_{i_0}(f_{i_0}(\mathbf{x}^0), f_{i_0}(\mathbf{x})) < s_{i_0}(f_{i_0}(\mathbf{x}^0), f_{i_0}(\mathbf{x}^0))$$

Funkcje $s_i(f_i(\mathbf{x}^0), y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i, tak więc

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^0) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

przy czym dla indeksu i_0 zachodzi nierówność ostra. Przeczy to efektywności wektora $\mathbf{x}^0$ dla problemu (1.7). Zatem wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.4) dla wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. ∎

Wniosek 3.2 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a} \in Y$ funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to dla dowolnego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^0$ wielokryterialnego zadania (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji $\mathbf{a}^0 \in Y$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (3.4).*

Funkcje (3.5) spełniają założenia wniosku 3.1 oraz twierdzeń 3.1 i 3.2. Dlatego najprostsza skalaryzująca funkcja osiągnięcia (3.3) dostarcza zupełnej parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych zgodnej z quasi–zadowalającym modelem preferencji określonym przez postulaty **P1** i **P2**. Podobnie, założenia powyższych twierdzeń spełniają używane w praktycznych implementacjach metody punktu referencyjnego (Grauer i inni, 1984) funkcje postaci

$$s_i(a_i, y_i) = \begin{cases} -\beta\lambda_i(y_i - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i \leq a_i \\ \lambda_i(y_i - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i > a_i \end{cases} \tag{3.7}$$

gdzie parametr β spełnia zależność $0 < \beta < 1$.

Lewandowski i Wierzbicki (1988) zaproponowali *przedziałową metodę punktu referencyjnego*, używającą jako parametrów sterujących oprócz poziomów aspiracji także *poziomów rezerwacji* r_i ($r_i > a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$), wyrażających "miękkie" ograniczenia na poszczególne oceny. Odpowiada to wprowadzeniu do modelu preferencji dodatkowego postulatu

P2a. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami $f_i(\mathbf{x})$ równymi odpowiadającym im poziomom rezerwacji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną większą od odpowiadającego jej poziomu rezerwacji.

Postulat **P2a** wyraża, że decydent woli oceny osiągające wszystkie poziomy rezerwacji od tych, które nie osiągają jednego lub więcej poziomów rezerwacji. Postulat ten, analogicznie jak postulat **P2**, może być zapisany w postaci warunku

$$\mathbf{y} \not\leqq \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \prec \mathbf{y} \tag{3.8}$$

lub

$$\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \prec \mathbf{y} \tag{3.9}$$

Skalaryzująca funkcja osiągnięcia dla przedziałowej metody punktu referencyjnego ma postać

$$s(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,m} \; s_i(a_i, r_i, y_i) + \rho \sum_{i=1}^{m} \; s_i(a_i, r_i, y_i) \tag{3.10}$$

gdzie s_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) są funkcjami mierzącymi odchylenie wartości oceny y_i od oczekiwań decydenta wyrażonych poziomem aspiracji a_i i poziomem rezerwacji r_i. Można je interpretować jako miary niezadowolenia decydenta z bieżących wartości poszczególnych ocen. Lewandowski i Wierzbicki (1988) przyjmują funkcje przedziałami liniowe

$$s_i(a_i, r_i, y_i) = \begin{cases} -\beta(y_i - a_i)/(y_i^u - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i \leq a_i \\ (y_i - a_i)/(r_i - a_i), & \text{jeśli} \quad a_i < y_i < r_i \\ \gamma(y_i - r_i)/(y_i^w - a_i) + 1, & \text{jeśli} \quad y_i \geq r_i \end{cases} \tag{3.11}$$

gdzie y_i^u i y_i^w oznaczają odpowiednio najlepszą i najgorszą możliwą wartość i–tej funkcji oceny w zbiorze Q, o których zakłada się, że są znane przed rozpoczęciem analizy, a β i γ są dodatnimi parametrami dobranymi arbitralnie. β wyraża satysfakcję decydenta z osiągnięcia lepszego niż odpowiedni poziom aspiracji, a $\gamma > 1$

wyraża niezadowolenie związane z osiągnięciem gorszym od odpowiedniego poziomu rezerwacji.

Funkcja $s_i(a_i, r_i, y_i)$ jest ściśle rosnącą funkcją y_i o wartościach $s_i(a_i, r_i, a_i) = 0$, $s_i(a_i, r_i, r_i) = 1$, $s_i(a_i, r_i, y_i^u) = -\beta$ i $s_i(a_i, r_i, y_i^w) = 1 + \gamma$. W praktycznych implementacjach zamiast najgorszych wartości y_i^w używane są odpowiednie współrzędne wektora nadiru (y_i^n). Zauważmy, że funkcje (3.11) nie zawierają parametrów λ_i, jako że poziomy rezerwacji są wykorzystane do automatycznego generowania czynników skalujących i jedynymi dodatkowymi parametrami są stałe β i γ. Odpowiada to rozmytemu podejściu (Zimmermann, 1985) do mierzenia satysfakcji decydenta z wartości poszczególnych funkcji oceny (por. Wierzbicki, 1986).

W implementacji przedziałowej metody punktu referencyjnego w systemie DINAS (Ogryczak i inni, 1989) zostały użyte prostsze funkcje s_i. Są to funkcje przedziałami liniowe, określone wzorem

$$s_i(a_i, r_i, y_i) = \begin{cases} -\beta(y_i - a_i)/(r_i - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i \le a_i \\ (y_i - a_i)/(r_i - a_i), & \text{jeśli} \quad a_i < y_i < r_i \\ \gamma(y_i - r_i)/(r_i - a_i) + 1, & \text{jeśli} \quad y_i \ge r_i \end{cases} \tag{3.12}$$

gdzie parametry β i γ spełniają zależności $0 < \beta < 1 < \gamma$.

Funkcje (3.12) przyjmują wartości $s_i(a_i, r_i, a_i) = 0$, $s_i(a_i, r_i, r_i) = 1$ i są ściśle rosnące względem y_i. Ponadto, w odróżnieniu od funkcji (3.11), są one wypukłe względem y_i. Dzięki temu funkcje (3.12) mogą być wyrażone w postaci

$$s_i(a_i, r_i, y_i) = \max\{-\beta(y_i - a_i)/(r_i - a_i), (y_i - a_i)/(r_i - a_i), \gamma(y_i - r_i)/(r_i - a_i) + 1\}$$

i cała skalaryzująca funkcja osiągnięcia (3.10) może być wprowadzona do modelu WPL bez naruszenia jego liniowej struktury.

Minimalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia (3.10) po $\mathbf{y} \in A$ może być rozpatrywana jako implementacja dwupoziomowego leksykograficznego zadania parametrycznego

$$\text{lexmin } \{(\max_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, r_i, f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, r_i, f_i(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{3.13}$$

gdzie $\mathbf{a}, \mathbf{r} \in Y$ i $\mathbf{a} < \mathbf{r}$.

Zauważmy, że zarówno funkcje (3.11), jak i funkcje (3.12) spełniają założenia twierdzeń 3.1 i 3.2 oraz wniosku 3.1. Zatem otrzymujemy zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych zgodną z modelem preferencji określonym postulatami **P1** i **P2**. Ponadto, dzięki temu, że $s_i(a_i, r_i, r_i) = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, spełniony jest również postulat **P2a**. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, r_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek*

$$s_1(a_1, r_1, r_1) = s_2(a_2, r_2, r_2) = \cdots = s_m(a_m, r_m, r_m) \tag{3.14}$$

relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną minimalizację (3.13) spełnia warunek (3.8).

Dowód. Zauważmy, że na mocy twierdzenia 1.11 dla relacji preferencji $\preceq$ definiowanej przez minimalizację (3.13) prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{y} \not\geqq \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \prec \mathbf{y}$$

co oznacza spełnienie warunku (3.8). ■

Zauważmy, że funkcje $s_i(a_i, r_i, y_i)$ zdefiniowane wzorem (3.11) lub (3.12) spełniają warunek

$$\begin{aligned} s_1(a_1, r_1, a_1 + t(r_1 - a_1)) &= s_2(a_2, r_2, a_2 + t(r_2 - a_2)) = \dots \\ &= s_m(a_m, r_m, a_m + t(r_m - a_m)) \quad \text{dla} \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

Wynika z tego, że przedziałowe metody punktu referencyjnego oparte na funkcjach (3.11) i (3.12) implementują model preferencji spełniający warunek

$$\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a} + t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \prec \mathbf{y} \quad \text{dla} \quad 0 \le t \le 1 \tag{3.15}$$

Różnica pomiędzy użyciem funkcji (3.12) a (3.11) polega na tym, że pierwsze z nich rozszerzają ten model preferencji na całą prostą wyznaczoną przez $\mathbf{a}$ i $\mathbf{r}$, a drugie na łamaną określoną przez $\mathbf{y}^u$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{y}^w$. To znaczy, przedziałowa metoda punktu referencyjnego z funkcjami s_i typu (3.12) implementuje model preferencji spełniający zależność

$$\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a} + t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \prec \mathbf{y} \quad \text{dla} \quad t \in R$$

a w przypadku funkcji s_i typu (3.11) model preferencji spełniający zależność

$$\begin{array}{llllllllll} \mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a} & + & t(\mathbf{a} - \mathbf{y}^u) & \Rightarrow & \mathbf{a} & + & t(\mathbf{a} - \mathbf{y}^u) & \prec & \mathbf{y} & \text{dla} \quad t \le 0 \\ \mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a} & + & t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) & \Rightarrow & \mathbf{a} & + & t(\mathbf{r} - \mathbf{a}) & \prec & \mathbf{y} & \text{dla} \quad 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{r} & + & t(\mathbf{y}^w - \mathbf{r}) & \Rightarrow & \mathbf{r} & + & t(\mathbf{y}^w - \mathbf{r}) & \prec & \mathbf{y} & \text{dla} \quad t \ge 0 \end{array}$$

Rozwiązywane w metodach punktu referencyjnego zadania optymalizacyjne typu (3.4) nie wprowadzają istotnych komplikacji do struktury oryginalnego zadania. W szczególności, w przypadku zadania WPL, odpowiedni problem (3.4) może być rozwiązywany technikami programowania liniowego i istnieje nawet możliwość implementacji metody sympleks z niejawną reprezentacją minimaksowej funkcji celu bez wprowadzania dodatkowych zależności do oryginalnej struktury zbioru dopuszczalnego Q (Ogryczak i Zorychta, 1994).

Proces analizy interaktywnej metod punktu referencyjnego jest w pełni zgodny z przedstawioną w podrozdziale 1.4 koncepcją systemów wspomagania decyzji. Realizują one otwarty proces poszukiwania zadowalającego rozwiązania efektywnego na podstawie bieżących preferencji określanych poziomami aspiracji (i dodatkowo poziomami rezerwacji lub współczynnikami skalującymi). Zastosowania opartych na metodach punktu referencyjnego systemów wspomagania decyzji do analizy rzeczywistych problemów decyzyjnych (por. np. Malczewski i Ogryczak, 1990) oraz specjalnie przeprowadzane eksperymenty (Korhonen i Wallenius, 1989; Steuer, 1993) pokazują, że do wyznaczenia zadowalającego rozwiązania efektywnego wielokryterialnego problemu decyzyjnego wystarcza zazwyczaj niewielka liczba kroków analizy interaktywnej. Jednocześnie wyrażanie bieżących preferencji w terminach poziomów aspiracji (i ewentualnie rezerwacji) jest łatwo rozumiane i chętnie akceptowane przez decydentów.

3.2 System DINAS

Przedziałowa metoda punktu referencyjnego została zaimplemetowana w systemie DINAS dla wielokryterialnych zagadnień transportowo–lokalizacyjnych na sieciach (Ogryczak i inni, 1988; 1991). Jest to często pojawiająca się w zastosowaniach szczególna klasa mieszanych zagadnień programowania liniowego dyskretnego. W systemie DINAS został przyjęty następujący sieciowy model problemu transportowo–lokalizacyjnego. Zbiór węzłów sieci dzieli się na dwa podzbiory: zbiór węzłów stałych i zbiór węzłów potencjalnych. Węzły stałe reprezentują istniejące (stałe) punkty sieci transportowej. Węzły potencjalne są wprowadzone dla reprezentacji możliwych lokalizacji nowych punktów sieci. Pewne grupy węzłów potencjanych mogą reprezentować różne warianty tego samego obiektu. Dlatego węzły potencjalne są pogrupowane w tzw. selekcje (tzn. zbiory z ograniczeniami wyboru). Każda selekcja jest określona przez listę zawartych w niej węzłów potencjalnych oraz dolne i górne ograniczenie na liczbę węzłów, które mogą być wybrane z tej listy. Rozpatruje się dystrybucję jednorodnego dobra zgodnie z topologią sieci transportowej. Każdy węzeł stały jest scharakteryzowany przez podaż i popyt na rozważane dobro. Każdy węzeł potencjalny ma określoną przepustowość, która ogranicza maksymalny przepływ dobra przez węzeł. Przepustowości są także określone dla wszystkich łuków sieci. Dane są liniowe funkcje celu określone przez współczynniki kosztu odpowiadające poszczególnym łukom i węzłom potencjalnym. Współczynnik kosztu związany z łukiem wyraża koszt przepływu jednostki dobra wzdłuż łuku. Współczynnik kosztu dla węzła potencjalnego wyraża koszt stały związany z wyborem danego węzła.

Dla uproszczenia reprezentacji modelu i procedur obliczeniowych system DINAS dokonuje transformacji modelu transportowo–lokalizacyjnego przekształcając wszystkie funkcje oceny na minimalizowane i zastępując węzły potencjalne łukami sztucznymi. Każdy węzeł potencjalny jest zastępowany parą węzłów (stałych) i łączącym je łukiem (sztucznym). Dzięki tej transformacji otrzymujemy sieć o stałej strukturze (wszystkie węzły są stałe). Potencjalność łuków sztucznych nie komplikuje stałej struktury sieci, ponieważ wszystkie łuki reprezentują potencjalne możliwości przepływów. Co więcej, po transformacji wszystkie przepustowości dotyczą jedynie łuków. Podobnie współczynniki kosztu są związane tylko z łukami. Współczynniki kosztu odpowiadające łukom sztucznym mają jednak inny charakter niż te odpowiadające oryginalnym łukom. Matematyczny model przekształconego zadania przyjmuje następującą postać

zminimalizować

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{(l,j)\in E\setminus E_a} c^i_{lj} x_{lj} + \sum_{(l,j)\in E_a} c^i_{lj} x'_{lj}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.16}$$

pod warunkiem, że

$$\sum_{(l,j)\in E} x_{lj} - \sum_{(j,l)\in E} x_{jl} = b_l \quad \text{dla} \quad l \in W \tag{3.17}$$

$$0 \le x_{lj} \le p_{lj} \qquad \text{dla} \quad (l,j) \in E \setminus E_a, \tag{3.18}$$

$$0 \le x_{lj} \le p_{lj} x'_{lj} \qquad \text{dla} \quad (l,j) \in E_a \tag{3.19}$$

$$g_k \le \sum_{(l,j)\in S_k} x'_{lj} \le h_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n_s, \tag{3.20}$$

$$x'_{lj} \in \{0, 1\} \qquad \text{dla} \quad (l,j) \in E_a \tag{3.21}$$

gdzie

m	liczba funkcji oceny,
W	zbiór węzłów,
n_s	liczba selekcji,
E	zbiór łuków (łącznie ze sztucznymi),
E_a	zbiór łuków sztucznych,
c^i_{lj}	współczynnik kosztu w i-tej funkcji oceny związany z łukiem (l, j),
b_l	bilans podaży i popytu dla węzła l,
p_{lj}	przepustowość łuku (l, j),
g_k, h_k	dolna i górna liczba łuków (sztucznych) do wybrania w k-tej selekcji,
S_k	zbiór łuków (sztucznych) należących do k-tej selekcji,
x_{lj}	zmienna decyzyjna reprezentująca przepływ wzdłuż łuku (l, j),
x'_{lj}	binarna zmienna decyzyjna reprezentująca aktywność łuku (l, j).

DINAS pozwala rozwiązywać problem (3.16)–(3.21) na komputerach IBM–PC lub kompatybilnych. Podstawowa wersja systemu DINAS może być używana do rozwiązywania problemów składających sie z co najwyżej siedmiu funkcji oceny i sieci transportowej zawierającej do 300 łuków, 100 węzłów stałych i 15 potencjalnych.

Pracą systemu DINAS steruje się za pomocą menu zawierającego szereg prostych komend do wyboru. Operacje dostępne podczas interaktywnej analizy są podzielone na trzy grupy i trzy odpowiadające im opcje głównego menu (por. tablica 3.1): Process, Solution i Analysis.

Tablica 3.1

Główne menu systemu DINAS

Tablica 3.1:

Process	Solution	Analysis
PROBLEM	SUMMARY	COMPARE
CONVERT	BROWSE	PREVIOUS
PAY–OFF	SAVE	NEXT
EFFICIENT	DELETE	LAST
QUIT		RESTORE

Opcja Process zawiera podstawowe operacje związane z przetwarzaniem problemu wielokryterialnego i generowaniem rozwiązań efektywnych. Są wśród nich operacje definiowania problemu, takie jak wywołanie edytora danych sieciowych przeznaczone do wprowadzania lub modyfikowania danych problemu (komenda PROBLEM), a także konwersji danych z jednoczesną kontrolą ich poprawności dla już zdefiniowanego problemu (komenda CONVERT). Ponadto są dostępne komendy optymalizacji PAY–OFF i EFFICIENT oraz komenda QUIT, pozwalająca na zakończenie pracy i wyjście z systemu.

Pierwszym krokiem analizy wielokryterialnej powinno być wywołanie komendy PAY–OFF. Komenda ta uruchamia proces optymalizacji każdej funkcji oceny z osobna, a dokładniej, rozwiązywanie zadań jednokryterialnych postaci

$$\min \{f_k(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3.22}$$

gdzie ρ jest arbitralnie małą liczbą dodatnią. To znaczy, do optymalizowanej funkcji oceny jest dodawany niewielki składnik regularyzujący dla zapewnienia efektywności wszystkich wyznaczonych rozwiązań optymalnych (por. twierdzenie 1.17). W wyniku tych obliczeń powstaje macierz realizacji celów (por. podrozdział 1.4). Jest ona tablicą zawierającą wartości wszystkich funkcji (kolumny) otrzymywane podczas rozwiązywania poszczególnych problemów jednokryterialnych (wiersze). Podczas wykonywania komendy PAY–OFF wyznaczane są także wektory utopii i nadiru. Dzięki technice regularyzacyjnej (3.22) każde wygenerowane podczas obliczania tablicy realizacji celów rozwiązanie optymalne zadania jednokryterialnego jest jednocześnie rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego. Tak więc po obliczeniu tablicy realizacji celów wygenerowany jest pewien zbiór rozwiązań efektywnych związanych z poszczególnymi wierszami tablicy. Obliczanie tablicy realizacji celów jest zazwyczaj najbardziej czasochłonną operacją analizy wielokryterialnej. Dlatego też w systemie DINAS jest ona automatycznie zapamiętywana.

Mając wyznaczoną tablicę realizacji celów można rozpocząć interaktywne poszukiwanie zadowalającego rozwiązania efektywnego. Jako parametry sterujące analizą interaktywną w systemie DINAS używane są poziomy aspiracji i rezerwacji. Dokładniej, dla każdej funkcji oceny użytkownik określa jako poziom aspiracji wartość, którą pragnąłby, aby ta funkcja osiągnęła, a jako poziom rezerwacji jej najgorszą akceptowalną wartość. Wszystkie operacje związane z edycją poziomów aspiracji i rezerwacji, a także obliczanie nowego rozwiązania efektywnego wykonuje się za pomocą komendy EFFICIENT. System poszukuje zadowalającego rozwiązania efektywnego, używając skalaryzującej funkcji osiągnięcia (3.10) i (3.12) jako kryterium w optymalizacji jednokryterialnej. Wygenerowane rozwiązanie optymalne jest zawsze rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego (nawet, gdy zadane poziomy aspiracji są osiągalne).

System DINAS przechowuje rozwiązania efektywne w specjalnej bazie. Wszystkie wygenerowane podczas sesji (lub wprowadzone z pliku wejściowego) rozwiązania efektywne są umieszczane w tej bazie. Jednakże można tam przechowywać co najwyżej dziewięć rozwiązań, więc gdy dziesiąte rozwiązanie jest umieszczane w bazie, wtedy najstarsze ze znajdujących się tam rozwiązań jest z bazy automatycznie usuwane. Z drugiej strony, dowolne rozwiązanie można zachować w osobnym pliku i wprowadzić z pliku podczas tej samej bądź następnych sesji. System DINAS jest wyposażony w komendy pomocne przy operacjach na bazie rozwiązań.

Są dwa rodzaje tych operacji: operacje na pojedynczym rozwiązaniu efektywnym i operacje na całej bazie rozwiązań. Operacje na pojedynczym rozwiązaniu dotyczą tylko rozwiązania bieżącego. Najnowsze wygenerowane rozwiązanie jest uważane za rozwiązanie bieżące, ale dowolne rozwiązanie znajdujące się w bazie można ręcznie przypisać jako rozwiązanie bieżące.

Opcja SOLUTION w głównym menu systemu (por. tablica 3.1) zawiera komendy odpowiadające operacjom na rozwiązaniu bieżącym. Możliwe jest szczegółowe badanie rozwiązania bieżącego z użyciem edytora sieciowego (komenda BROWSE) albo analizowanie skróconych charakterystyk, takich jak wartości funkcji oceny i wybrane lokalizacje (komenda SUMMARY). Wartości funkcji są prezentowane na trzy sposoby: jako standardowa tablica, w postaci wykresów słupkowych w skali aspiracji/rezerwacji ($|r_i - a_i|$ przyjmowane jako 100%) oraz jako wykresy słupkowe w skali utopia/nadir ($|y_i^n - y_i^u|$ przyjmowane jako 100%). Słupki pokazują poziom procentowy wartości każdej funkcji oceny w odniesieniu do skali, w której są prezentowane. Bieżące rozwiązanie można zapamiętać w osobnym pliku (komenda SAVE). Możliwe jest także usunięcie bieżącego rozwiązania z bazy rozwiązań (komenda DELETE).

Opcja ANALYSIS w głównym menu systemu (por. tablica 3.1) grupuje komendy związane z operacjami na bazie rozwiązań. Główna komenda COMPARE umożliwia porównywanie rozwiązań efektywnych znajdujących się w bazie. W porównaniu występują tylko skrócone charakterystyki rozwiązań, czyli wartości funkcji oceny w formie tablic lub wykresów słupkowych, a także tablice wybranych lokalizacji. Ponadto pewne komendy w tej grupie (PREVIOUS, NEXT i LAST) służą do wybierania dowolnego rozwiązania efektywnego znajdującego się w bazie jako rozwiązanie bieżące. Możliwe jest także wprowadzenie do bazy rozwiązania zapamiętanego uprzednio w osobnym pliku (komenda RESTORE).

Najważniejszą częścią systemu DINAS jest ukryty przed użytkownikiem moduł optymalizacyjny dostarczający rozwiązania problemów jednokryterialnych. Stanowi on jądro numeryczne systemu, które generuje rozwiązania efektywne. Zaprojektowanie efektywnego modułu optymalizacyjnego, pracującego przy ograniczonych zasobach mikrokomputera klasy IBM-PC, wymagało złożonych technik algorytmicznych i implementacyjnych wykorzystujących specyfikę zadania w ogólnych metodach programowania liniowego dyskretnego (por. Ogryczak i inni, 1989). W szczególności rozwinięte zostały techniki implemetacji metody sympleks z reprezentacją zmiennych górnych ograniczeń poza strukturą bazy (Ogryczak, 1992). Oznacza to, że liczne w modelu nierówności zawierające tylko dwie zmienne, podobnie jak proste górne ograniczenia w standardowych implementacjach metody sympleks, nie zwiększają roboczych struktur danych przechowujących faktoryzację bieżącej bazy, a jedynie komplikują kroki algorytmu metody sympleks.

System DINAS jest wyposażony w specjalny pełnoekranowy edytor sieciowy (Ogryczak i inni, 1992a) zaprojektowany do wprowadzania i modyfikacji danych problemów sieciowych. Dane modelu dzielą się na dwie zasadnicze grupy: dane logiczne określające topologię sieci transportowej (węzły, łuki, selekcje) i dane numeryczne opisujące węzły i łuki sieci (wielkości popytu i podaży, przepustowości, współczynniki funkcji celu). Główna koncepcja edytora polega na tym, że dane numeryczne są aktualizowane w trakcie definiowania lub sprawdzania logicznej struktury sieci. Dokładniej, edytor pozwala na przechodzenie z bieżącego węzła (wzdłuż łuków) do węzłów sąsiednich i aktualizację w specjalnych okienkach danych numerycznych dla bieżącego elementu sieci.

Przykład 3.1. Podstawowe elementy analizy wielokryterialnej wykonywanej przy użyciu systemu DINAS ilustrujemy na małym sztucznym problemie reorganizacji rejonów służby zdrowia. Rzeczywisty problem tego typu związany z reorganizacją przychodni rejonowych w regionie Warszawy został rozwiązany przy użyciu pakietu MPSX/370 przez Ogryczaka i Malczewskiego (1987). Problem testowy ilustrujący działanie procedury interaktywnej oraz możliwości systemu DINAS jest małym wycinkiem modelu rzeczywistego.

Problem reorganizacji rejonów służby zdrowia związany z lokalizacją nowych ośrodków można sformułować następująco. Zakłada się, że rozpatrywany region składa się z pewnej liczby okręgów o znanej dystrybucji populacji. W regionie tym znajduje się pewna liczba ośrodków zdrowia, ale ich możliwości obsługi medycznej są niewystarczające i dlatego należy stworzyć nowe ośrodki. Problem polega na określeniu lokalizacji nowych ośrodków i ich wielkości (możliwości obsługi), a także na przypisaniu mieszkańców regionu do poszczególnych ośrodków (starych i nowych). Proponowane rozwiązanie powinno być optymalne ze względu na kilka kryteriów.

Rozpatrywany region jest częścią miasta podzieloną przez pięć głównych ulic na 12 obszarów. Potrzeby obsługi medycznej w każdym z obszarów są określone w tysiącach porad na rok. W regionie istnieją już dwa ośrodki zdrowia Pond i Hill. Ich możliwości obsługi wynoszą odpowiednio 100 i 90 tysięcy porad na rok. Zatem możliwości obsługi medycznej w całym regionie wynoszą 190, podczas gdy potrzeby obliczono na 240. Powinny więc powstać w tym regionie nowe ośrodki zdrowia.

Nowe ośrodki mogą być tworzone w czterech potencjalnych lokalizacjach: Ice, Fiord, Bush i Oasis. Lokalizacje te są podzielone na dwa podzbiory odpowiadające dwóm subregionom:

North = {Ice, Fiord} i South = {Bush, Oasis}.

Odległości między dwiema potencjalnymi lokalizacjami w tym samym subregionie są relatywnie małe, a każda lokalizacja ma możliwość zapokojenia potrzeb obsługi medycznej. Lokalizacje w tym samym subregionie są rozpatrywane jako wzajemnie wykluczające się, to znaczy w danym subregionie można wybrać tylko jedną lokalizację. Z każdą potencjalną lokalizacją związane są różne możliwości obsługi.

Należy zdecydować, które z potencjalnych ośrodków zdrowia należy zbudować tak by były zaspokojone potrzeby w całym regionie. Decyzja powinna być optymalna ze względu na następujące kryteria:

- minimalizacja średniej odległości dla porady,
- maksymalizacja ogólnej dostępności ośrodków,
- minimalizacja kosztów inwestycji,
- maksymalizacja satysfakcji mieszkańców.

Pierwsze dwa kryteria są związane z odległościami między ośrodkami zdrowia a obszarami przez nie obsługiwanymi. Biorąc pod uwagę morfologię miasta oraz sieć transportową jako najlepsze przybliżenie odległości rzeczywistych przyjęto normę l_1. Niektóre połączenia między obszarami a ośrodkami zostały wyeliminowane (uznane za niedopuszczalne) z powodu utrudnień transportowych.

Ogólna dostępność ośrodków jest zdefiniowana jako suma współczynników dostępu dla poszczególnych obszarów. Przyjmuje się, że dostęp danego obszaru jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości obszaru od ośrodka zdrowia. Dokładniej, współczynnik dostępu obszaru do ośrodka jest definiowany zgodnie ze wzorem (por. Abernathy i Hershey, 1972)

$$c_{lj} = 1/(d_{lj} + \varepsilon)^2 \tag{3.23}$$

gdzie d_{lj} oznacza odległość pomiędzy ośrodkiem zdrowia l i obszarem j, a ε jest arbitralnie małą liczbą dodatnią.

Jako koszt inwestycyjny i poziom satysfakcji mieszkańców przyjmuje się odpowiednio sumę stałych kosztów i sumę stałych poziomów satysfakcji związanych z poszczególnymi lokalizacjami ośrodków.

Zdefiniowany tutaj problem reorganizacji rejonizacji służby zdrowia połączony z lokalizacją nowych ośrodków zdrowia łatwo sformułować jako wielokryterialny problem transportowo–lokalizacyjny. Obszary i istniejące ośrodki zdrowia stanowią stałe węzły rozpatrywanej sieci, a wszystkie lokalizacje nowych ośrodków można traktować jako węzły potencjalne. Łuki reprezentują wszystkie możliwe przypisania obszarów do ośrodków zdrowia. Przepływ wzdłuż łuku z ośrodka l do obszaru j wyraża liczbę porad w obszarze j udzielanych przez ośrodek l. Dla zbilansowania problemu wprowadzamy sztuczny węzeł Tie z możliwością obsługi równą całkowitym potrzebom regionu. Ponadto definiujemy dodatkowe łuki łączące sztuczny węzeł Tie z wszystkimi ośrodkami (istniejącymi i potencjalnymi). Możliwości obsługi istniejących ośrodków (Pond i Hill) są pojemnościami łuków łączących węzeł Tie z odpowiadającymi im węzłami.

W problemach transportowo–lokalizacyjnych jako funkcje oceny rozpatruje się sumy funkcji liniowych, zależnych od przepływów wzdłuż poszczególnych łuków i kosztów stałych związanych z wybranymi lokalizacjami. W naszym modelu funkcje oceny są podzielone na dwie grupy. Funkcje reprezentujące koszt inwestycji (Invest) i poziom satysfakcji (Satisf) są niezależne od decyzji rejonizacji i w związku z tym nie mają współczynników związanych z przepływami wzdłuż łuków (czyli współczynniki te są równe 0). Z drugiej strony funkcje reprezentujące średnią odległość (Dist) i ogólną dostępność (Prox) zależą tylko od decyzji rejonizacji i dlatego nie mają składników stałych związanych z decyzjami lokalizacji. Stałe współczynniki funkcji Invest i Satisf mogą być brane bezbośrednio z danych wejściowych. Liniowe współczynniki funkcji Prox są wyliczane ze współczynników odległości zgodnie ze wzorem (3.23), zaś liniowe współczynniki funkcji Dist są definiowane jako odpowiednie odległości dzielone przez sumę wszystkich potrzeb (240).

Cztery węzły potencjalne reprezentują cztery potencjalne lokalizacje ośrodków zdrowia: Ice, Fiord, Bush i Oasis. Jak już wspominaliśmy, lokalizacje należące do tego samego subregionu wykluczają się wzajemnie, czyli z jednego subregionu może być wybrana co najwyżej jedna lokalizacja. Aby uwzględnić wymaganie tego typu, wykorzystujemy selekcje. W naszym modelu są dwie selekcje związane z subregionami: North i South. Obie mają ograniczenia dolne równe 0 i górne równe 1.

Gwarantuje to, że w każdej selekcji jest aktywny co najwyżej jeden węzeł potencjalny.

Ostatnia grupa danych jest związana z łukami. Łuki są charakteryzowane przez przepustowości i współczynniki funkcji. Współczynniki kosztu zostały omówione przy okazji omawiania współczynników funkcji. Przepustowości łuków łączących sztuczny węzeł Tie z ośrodkami (Pond, Hill, Ice, Fiord, Bush i Oasis) wyrażają możliwości obługi tych ośrodków. Łuki łączące ośrodki z obszarami mają zasadniczo nieograniczone przepustowości. Jednakże w praktyce przepływy wzdłuż tych łuków są ograniczone możliwościami obsługi odpowiednich ośrodków i możemy ich użyć jako przepustowości łuków.

Po zdefiniowaniu problemu i konwersji jego danych można rozpocząć analizę wielokryterialną. Jako pierwszy krok tej analizy należy wykonać komendę PAY–OFF. W efekcie otrzymujemy tablicę realizacji celów (tablica 3.2). Są w niej wartości wszystkich funkcji oceny (kolumny) uzyskane podczas rozwiązywania poszczególnych zadań jednokryterialnych (wiersze). Wykonanie komendy PAY–OFF dostarcza także dwóch wektorów referencyjnych: wektora utopii i wektora nadiru (patrz tablica 3.2). Wektor utopii reprezentuje najlepsze wartości każdej funkcji rozpatrywanej oddzielnie, a wektor nadiru najgorsze wartości funkcji odnotowane podczas optymalizacji innych funkcji. Wektor utopii jest tutaj wektorem nieosiągalnym, to znaczy nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne z takimi wartościami funkcji oceny.

Tablica 3.2

Macierz realizacji celów dla przykladu 3.1

Tablica 3.2:

Funkcja	Optymalizowana funkcja: Invest	Satisf	Dist	Prox	Utopia	Nadir
Invest	186	401	413	398	186	413
Satisf	100	368	279	187	368	100
Dist	2.61	2.17	2.03	2.12	2.03	2.61
Prox	4976	6385	8782	8854	8854	4976

Analizując tablicę 3.2 można zauważyć, że wartości funkcji zmieniają się w zależności od wybranej optymalizacji. Tylko dla średniej odległości (Dist) występują relatywnie małe odchylenia, rzędu 30%, podczas gdy dla innych funkcji przekraczają nawet 100%. Ponadto daje się zauważyć zdecydowany konflikt pomiędzy kosztem inwestycji (Invest) a pozostałymi funkcjami oceny. Minimalizując koszt otrzymujemy najgorsze wartości wszystkich pozostałych funkcji oceny, a optymalizując inne funkcje oceny otrzymujemy podwojenie minimalnej wartości kosztu.

Współczynniki wektora nadiru nie mogą być traktowane jako najgorsze wartości funkcji oceny na całym zbiorze rozwiązań efektywnych. Zwykle przybliżają one te wartości, ale wyrażają wyłącznie najgorszą wartość każdej funkcji oceny odnotowaną podczas optymalizacji innych funkcji. W dalszym przebiegu analizy pokażemy, że te przybliżenia są czasami przekraczane.

Dzięki specjalnej technice regularyzacyjnej używanej przy obliczaniu tablicy realizacji celów (por. (3.22)), każde wygenerowane rozwiązanie zadania jednokryterialnego jest także rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego. Zatem mamy już w bazie rozwiązań efektywnych cztery rozwiązania związane z poszczególnymi wierszami tablicy realizacji celów. Posługując się komendami systemu DINAS możemy zbadać każde z tych rozwiązań, a w szczególności możemy zapoznać się ze strukturą lokalizacji w poszczególnych rozwiązaniach. W pierwszym rozwiązaniu, które minimalizuje koszt inwestycyjny, występuje tylko jeden nowy ośrodek zdrowia zlokalizowany w Bush. We wszystkich pozostałych rozwiązaniach występują dwa nowe ośrodki, co tłumaczy ich znacząco wyższy koszt inwestycyjny. Nowe ośrodki są zlokalizowane w tych rozwiązaniach następująco: Ice i Oasis, Fiord i Oasis oraz Bush i Fiord.

Mając obliczony wektor utopii możemy rozpocząć interaktywne poszukiwania satysfakcjonujących rozwiązań efektywnych. Do sterowania analizą interaktywną służą poziomy aspiracji i rezerwacji. Na początku tej analizy obliczamy tzw. rozwiązanie neutralne. W tym celu przyjmujemy wektor utopii jako wektor aspiracji, a wektor nadiru jako wektor rezerwacji. W wyniku otrzymujemy piąte rozwiązanie efektywne z dwoma nowymi ośrodkami zlokalizowanymi w Bush i Ice. Koszt inwestycyjny jest w tym przypadku dosyć wysoki (Invest=386), podczas gdy dla pozostałych funkcji otrzymujemy wartości na średnim poziomie (Satisf=276, Dist=2.26 i Prox=6457).

Poza rozwiązaniem minimalizującym koszt inwestycyjny, we wszystkich rozwiązaniach występują dwa nowe ośrodki zdrowia, co powoduje ich wysoki koszt. Dlatego próbujemy znaleźć rozwiązanie z niskim kosztem (tylko jeden nowy ośrodek) i stosunkowo dobrymi wartościami pozostałych funkcji. W tym celu przyjmujemy poziomy aspiracji i rezerwacji takie jak w tablicy 3.3. W rezultacie otrzymujemy szóste rozwiązanie efektywne z jednym nowym ośrodkiem zlokalizowanym w Oasis. Koszt inwestycyjny w tym rozwiązaniu jest niski (Invest=201), poziom satysfakcji jest umiarkowany (Satisf=192), ale średnia odległość jest bardzo duża (Dist=2.58), a ogólna dostępność nawet mniejsza niż odpowiedni współczynnik wektora nadiru (Prox=4933). System automatycznie uaktualnia odpowiedni współczynik wektora nadiru nadając mu najgorszą wartość funkcji.

Tablica 3.3

Tablica 3.3:

	Invest	Satisf	Dist	Prox
Aspiracja	186	300	2.08	8500
Rezerwacja	250	200	2.50	7000

Dla uniknięcia zbyt małych wartości ogólnej dostępności modyfikujemy odpowiedni poziom rezerwacji zwiększając jego wartość do 8000. Po powtórzeniu obliczeń uzyskujemy siódme rozwiązanie efektywne z jednym nowym ośrodkiem zdrowia w Ice. Dzięki wygodnej formie prezentacji rozwiązań w systemie DINAS możemy łatwo porównać wartości funkcji oceny w nowym rozwiązaniu z odpowiednimi wartościami w rozwiązaniu poprzednim. Ogólna dostępność, średnia odległość i koszt inwestycyjny są nieznacznie lepsze (Prox=5278, Dist=2.53 i Invest=200), podczas gdy poziom satysfakcji jest o kilka procent gorszy (Satisf=176).

Po przeanalizowaniu dwóch ostatnich rozwiązań przypuszczamy, że do znalezienia rozwiązania efektywnego z dobrymi wartościami ogólnej dostępności, średniej odległości i małym kosztem inwestycyjnym jest konieczne poluzowanie żądań dotyczących poziomu satysfakcji. Zatem zmieniamy poziom rezerwacji odpowiadający funkcji Satisf na 100. System potwierdza nasze przypuszczenie. W ósmym rozwiązaniu jest jeden nowy ośrodek zlokalizowany w Fiord. To rozwiązanie gwarantuje dosyć dużą ogólną dostępność (Prox=7691) i względnie małą średnią odległość (Dist=2.38) przy małym koszcie inwestycyjnym (Invest=212). Z drugiej strony poziom satysfakcji jest gorszy nawet od odpowiedniego współczynnika wektora nadiru (Satisf=87). Poza tym to rozwiązanie wygląda interesująco w porównaniu z innymi, w których występuje tylko jeden nowy ośrodek.

Dalsze próby znalezienia zadowalającego rozwiązania efektywnego z jednym nowym ośrodkiem zdrowia nie przynoszą sukcesu. Dla różnych wartości poziomów aspiracji i rezerwacji otrzymujemy to samo rozwiązanie. Aby analiza była kompletna, zmniejszamy wymagania dotyczące kosztu inwestycyjnego. Używając poziomów aspiracji i rezerwacji z tablicy 3.4 otrzymujemy dziewiąte rozwiązanie efektywne z dwoma nowymi ośrodkami (Fiord i Oasis). W rozwiązaniu tym występują te same lokalizacje co w rozwiązaniu trzecim. Koszt inwestycyjny i poziom satysfakcji jest więc taki sam (Invest=413 i Satisf=279). Nieco inna jest ogólna dostępność i średnia odległość (Prox=8791 i Dist=2.04), co jest efektem innego schematu przydziałów.

Tablica 3.4

Tablica 3.4:

	Invest	Satisf	Dist	Prox
Aspiracja	200	300	2.10	8800
Rezerwacja	400	200	2.50	8400

Na koniec badamy wszystkie wygenerowane rozwiązania efektywne posługując się dostępnymi w systemie narzędziami porównywania rozwiązań. Rozwiązania zostały zestawione w tablicy 3.5, a ich uważna analiza prowadzi do następującej konkluzji. Koszt inwestycyjny nie powinien być rozpatrywany jako typowa funkcja oceny, ponieważ jego wartość bardziej zależy od liczby nowych ośrodków niż od ich lokalizacji. Dzieli to wszystkie rozwiązania efektywne na dwie grupy: rozwiązania z jednym nowym ośrodkiem zdrowia i rozwiązania z dwoma nowymi ośrodkami. Z tego powodu należy poszukiwać dobrego rozwiązania z jednym nowym ośrodkiem, takiego że w przyszłości będzie je można rozszerzyć do lepszego rozwiązania przez dodanie drugiego nowego ośrodka. Naszym zdaniem pierwszy ośrodek powinien być zlokalizowany w Fiord (rozwiązanie 8). Jest to jedyne rozwiązanie efektywne z jednym nowym ośrodkiem, w którym średnia odległość i ogólna dostępność mają akceptowalne wartości (patrz tablica 3.5). To rozwiązanie ma jednocześnie najgorszy poziom satysfakcji. Jednakże późniejsze rozszerzenie tego rozwiązania przez dodanie drugiego ośrodka w Oasis (rozwiązanie 9) prowadzi do znacznego wzrostu poziomu satysfakcji i poprawia średnią odległość, a także ogólną dostępność (patrz tablica 3.5). Oba proponowane rozwiązania mają najwyższy koszt w odpowiednich grupach rozwiązań, lecz nie należy tego traktować jako poważnej wady, ponieważ różnice wartości tej funkcji pomiędzy rozwiązaniami z tej samej grupy są niewielkie.

Tablica 3.5

Rozwiązania efektywne dla przykładu 3.1

Tablica 3.5:

	Wartości funkcji oceny				Lokalizacje			
	Invest	Satisf	Dist	Prox	Bush	Fiord	Ice	Oasis
Rozwiązanie 1	186	100	2.61	4976	tak	nie	nie	nie
Rozwiązanie 2	401	368	2.17	6385	nie	nie	tak	tak
Rozwiązanie 3	413	279	2.03	8782	nie	tak	nie	tak
Rozwiązanie 4	398	187	2.12	8854	tak	tak	nie	nie
Rozwiązanie 5	386	276	2.26	6457	nie	nie	tak	nie
Rozwiązanie 6	201	192	2.58	4933	nie	nie	nie	tak
Rozwiązanie 7	200	176	2.53	5287	nie	nie	tak	nie
Rozwiązanie 8	212	87	2.38	7691	nie	tak	nie	nie
Rozwiązanie 9	413	279	2.04	8791	nie	tak	nie	tak

Dzięki łatwości modyfikowania problemu w systemie DINAS możemy przeprowadzić dodatkową analizę wyłączając pewne funkcje oceny. Powtarzając analizę wielokryterialną z pominięciem funkcji Invest uzyskujemy rozwiązanie 9 jako rozwiązanie neutralne, co potwierdza jego optymalność względem pozostałych trzech funkcji oceny.

Posługując się komendą BROWSE możemy szczegółowo obejrzeć pod edytorem sieciowym wybrane rozwiązania. Okazuje się, że w rozwiązaniu ósmym nowy ośrodek zlokalizowany w Fiord jest kompletnie wykorzystany, podczas gdy w starych ośrodkach pozostają pewne niewykorzystane możliwości. Wskazuje to na nieoptymalne ze względu na rozpatrywane funkcje oceny zlokalizowanie istniejących ośrodków. Dziewiąte rozwiązanie efektywne potwierdza tę diagnozę. Nowy dodatkowy ośrodek w Oasis obsługuje pewne obszary z rejonu Hill i pewne z rejonu Pond. W tym rozwiązaniu także oba nowe ośrodki mają w pełni wykorzystane możliwości, podczas gdy stare są wykorzystane tylko w 50–70%. □

Przyjęte w systemie DINAS zasady analizy interaktywnej i ich funkcjonalna implementacja sprawdziły się w praktyce przy rozwiązywaniu rzeczywistych problemów decyzyjnych. Z wykorzystaniem systemu DINAS została przeprowadzona między innymi analiza studialna lokalizacji i rejonizacji klinik pediatrycznych w makroregionie warszawskim (Malczewski i Ogryczak, 1990). W analizie tej rozważano pięć kryteriów:

– minimalizacja średniej odległości do kliniki,
– maksymalizacja ogólnej dostępności klinik,

– minimalizacja kosztów inwestycyjnych dla nowych klinik,
– minimalizacja kosztów operacyjnych wszystkich klinik,
– minimalizacja zanieczyszczeń środowiska w miejscach lokalizacji nowych klinik.

Tablica 3.6

Macierz realizacji celów dla problemu lokalizacji klinik

Tablica 3.6:

Optymalizowana funkcja	Wartości funkcji oceny				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	39099.0	12385.9	888.8	519.6	1141.4
f_2	40776.4	12534.6	666.0	395.8	917.3
f_3	63822.6	9812.9	443.2	270.0	447.6
f_4	62304.9	11418.0	446.3	249.6	474.8
f_5	66396.0	6104.9	443.8	260.0	444.1

Problem został sformułowany, analogicznie jak w przykładzie 3.1, w postaci zadania transportowo–lokalizacyjnego na sieci złożonej z blisko 100 węzłów (w tym 8 potencjalnych) i 300 łuków. Pomimo występowania istotnego konfliktu pomiędzy poszczególnymi kryteriami (por. macierz realizacji celów w tablicy 3.6), do wyznaczenia rozwiązania efektywnego zadowalającego ekspertów wystarczyły cztery iteracje analizy interaktywnej. Przebieg analizy interaktywnej ilustruje tablica 3.7, gdzie dla każdej iteracji podano przyjęte poziomy aspiracji i rezerwacji oraz wartości funkcji oceny wyznaczonego rozwiązania efektywnego.

Tablica 3.7

Wyniki interaktywnej analizy problemu lokalizacji klinik

Tablica 3.7:

Iteracja	Wartości funkcji oceny				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
1					
poziom aspiracji	39099.0	12534.6	443.2	249.6	444.1
poziom rezerwacji	66396.0	6104.9	888.8	519.6	1141.4
rozwiązanie efektywne	47834.7	8812.4	555.3	327.1	661.4
2					
poziom aspiracji	39099.0	12534.6	443.2	249.6	444.1
poziom rezerwacji	66396.0	6104.9	450.0	300.0	1141.4
rozwiązanie efektywne	63897.2	7304.6	444.8	260.4	497.3
3					
poziom aspiracji	39099.0	12534.6	443.2	249.6	500.0
poziom rezerwacji	66396.0	6104.9	450.0	300.0	1141.4
rozwiązanie efektywne	62408.3	7393.3	446.1	278.3	601.2
4					
poziom aspiracji	39099.0	12534.6	443.2	249.6	500.0
poziom rezerwacji	60000.0	7000.0	450.0	300.0	1141.4
rozwiązanie efektywne	59801.2	7481.3	487.4	294.3	712.2

3.3 Referencyjne programowanie celowe

3.3.1 Model ważony

Metody punktu referencyjnego używają, podobnie jak programowanie celowe, poziomów aspiracji jako głównych parametrów sterujących. Pomimo tego, w odróżnieniu od programowania celowego, metody punktu referencyjnego zawsze generują rozwiązania efektywne i wprowadzają zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych. W tym podrozdziale staramy się odpowiednio rozszerzyć możliwości modeli programowania celowego, tak aby osiągnąć zalety metod punktu referencyjnego (por. Ogryczak, 1994). To znaczy, naszym celem jest sformułowanie uogólnionego modelu programowania celowego spełniającego postulaty **P1** i **P2** oraz generującego zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych za pomocą poziomów aspiracji.

Zauważmy, że skalaryzująca funkcja osiągnięcia (3.3) może być wyrażona jako funkcja używanych w programowaniu celowym odchyleń $\mathbf{d}^- = (\mathbf{a} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+$ i $\mathbf{d}^+ = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{a})_+$

$$s(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \max_{i=1,\dots,m} \lambda_i(d_i^+ - d_i^-) + \rho \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(d_i^+ - d_i^-)$$

Ogólniej, parametryzacja (3.4) z funkcjami s_i typu (3.7) może być zapisana w postaci następującego modelu programowania celowego

$$\begin{array}{lll}
\text{RPC} : & \text{lexmin } \mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = [g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+), g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)] & (3.24) \\
& \text{pod warunkiem, że} & \\
& f_i(\mathbf{x}) + d_i^- - d_i^+ = a_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m & (3.25) \\
& d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m & (3.26) \\
& \mathbf{x} \in Q & (3.27)
\end{array}$$

gdzie

$$g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \max_{i=1,\dots,m} (-w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \qquad (3.28)$$

$$g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = \sum_{i=1}^{m} (-w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \qquad (3.29)$$

$$0 < w_i^- < w_i^+ \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \qquad (3.30)$$

Zadanie (3.24)–(3.30) jest zasadniczo leksykograficznym (dwupoziomowym) problemem PC ze standardowymi równaniami celowymi (3.25)–(3.26), funkcją osiągnięcia g_1 typu minimaksowego i ważoną funkcją osiągnięcia g_2. W zadaniu tym tym kryje się jednak pewna specyfika, odróżniająca je od standardowych problemów PC. Mianowicie, zarówno w minimaksowej funkcji osiągnięcia g_1, jak i w ważonej funkcji osiągnięcia g_2, współczynniki wagowe odpowiadające odchyleniom w dół są ujemne. Dzięki temu funkcje te definiują ściśle monotoniczne relacje preferencji.

Dla poprawności modelu RPC powinno być zagwarantowane właściwe obliczanie odchyleń d_i^- i d_i^+ z równań celowych (3.25)–(3.26), czyli spełnienie warunku

$$d_i^- d_i^+ = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.31}$$

przez rozwiązania optymalne. Poniższe twierdzenie pokazuje, że przyjęte w modelu RPC założenie o wagach (3.30) gwarantuje spełnienie warunku (3.31) przez rozwiązania optymalne zadania RPC.

Twierdzenie 3.4 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i, jeżeli wagi spełniają warunek (3.30), to rozwiązanie optymalne $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ problemu RPC spełnia warunek (3.31).*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu RPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^+ > 0$ dla pewnego indeksu $0 \le i_0 \le m$. Możemy wtedy zmniejszyć $\bar{d}_{i_0}^-$ i $\bar{d}_{i_0}^+$ o tę samą małą dodatnią liczbę. To znaczy, że dla dostatecznie małej dodatniej liczby δ wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^- - \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^+ - \delta \mathbf{e}_{i_0})$ jest dopuszczalny dla problemu RPC. Zgodnie z (3.30) jest spełniona nierówność

$$-w_{i_0}^-(\bar{d}_{i_0}^- - \delta) + w_{i_0}^+(\bar{d}_{i_0}^+ - \delta) < -w_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^- + w_{i_0}^+ \bar{d}_{i_0}^+$$

Stąd otrzymujemy

$$g_1(\bar{\mathbf{d}}^- - \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^+ - \delta \mathbf{e}_{i_0}) \le g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{i} \quad g_2(\bar{\mathbf{d}}^- - \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^+ - \delta \mathbf{e}_{i_0}) < g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$$

co przeczy optymalności rozwiązania $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu RPC. Zatem $\bar{d}_i^- \bar{d}_i^+ = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.5 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i oraz dowolnych wag w_i^- i w_i^+ spełniających warunek (3.30), jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu RPC, to $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym problemu optymalizacji wielokryterialnej (1.7).*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu RPC. Przypuśćmy, że $\bar{\mathbf{x}}$ nie jest rozwiązaniem efektywnym problemu (1.7). Czyli, że istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$f_i(\mathbf{x}) \le f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.32}$$

i $f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}})$ dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$. Innymi słowy

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) < \sum_{i=1}^{m} f_i(\bar{\mathbf{x}}) \tag{3.33}$$

Odchylenia $\bar{d}_i^-$ i $\bar{d}_i^+$ spełniają równości $\bar{d}_i^+ = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - a_i)_+$ i $\bar{d}_i^- = (a_i - f_i(\bar{\mathbf{x}}))_+$. Analogicznymi odchyleniami dla wektora $\mathbf{x}$ są

$$d_i^+ = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+, \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Trójka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu RPC i zgodnie z (3.32) i (3.33), dla dowolnych dodatnich wag w_i^- oraz w_i^+ są spełnione następujące nierówności

$$w_i^+ d_i^+ \le w_i^+ \bar{d}_i^+ \quad \text{i} \quad -w_i^- d_i^- \le -w_i^- \bar{d}_i^- \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

oraz
$$\sum_{i=1}^{m} (-w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) < \sum_{i=1}^{m} (-w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^+ \bar{d}_i^+)$$
Stąd otrzymujemy
$$g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) \leq g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{i} \quad g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) < g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$$
co przeczy optymalności rozwiązania $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu RPC. Zatem $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym wielokryterialnego problemu (1.7). ∎

Twierdzenie 3.6 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i oraz dowolnych wag w_i^- i w_i^+ spełniających warunek (3.30), jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu RPC, to odchylenie $\bar{d}_i^+$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że*
$$f_i(\mathbf{x}) \leq a_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m.$$
Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu RPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^+ > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > a_{i_0}$) dla pewnego indeksu $0 \leq i_0 \leq m$ i istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$
$$d_i^+ = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ = 0, \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$
Trójka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu RPC i dla dowolnych dodatnich wag w_i^- oraz w_i^+ jest spełniona nierówność
$$\max_{i=1,\ldots,m} (-w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \leq 0 < w_{i_0}^+ \bar{d}_{i_0}^+ \leq \max_{i=1,\ldots,m} (-w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^+ \bar{d}_i^+)$$
Stąd otrzymujemy $g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) < g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$, co przeczy optymalności rozwiązania $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu RPC. Zatem nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ∎

Zauważmy, że w terminach odchyleń (porównaj (3.25)–(3.26)) postulat **P2** oznacza, że rozwiązanie z odchyleniem w górę d_i^+ równym 0 dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, m$ jest preferowane w stosunku do rozwiązania z dodatnią wartością co najmniej jednego odchylenia d_i^+. Zatem twierdzenia 3.5 i 3.6 pokazują, że model preferencji zadania RPC realizuje leżący u podstaw metod punktu referencyjnego quasi–zadowalający model preferencji oparty na postalatach **P1** i **P2**. Model RPC realizuje również postulat zupełnej parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych za pomocą wektorów poziomów aspiracji.

Twierdzenie 3.7 *Jeżeli wektor $\bar{\mathbf{x}} \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7), to wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu RPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$ i dowolnymi wagami w_i^-, w_i^+ spełniającymi warunek (3.30).*

Dowód. Przypuśćmy, że $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ nie jest rozwiązaniem optymalnym zadania RPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$. Istnieje wtedy wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że
$$g_1((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+) < g_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

albo $g_1((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+) = 0$ i

$$g_2((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+) < g_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

Zatem na mocy (3.30)

$$(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+ \geq \mathbf{0} \quad \text{i} \quad (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+ = \mathbf{0}$$

czyli $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, co przeczy efektywności wektora $\bar{\mathbf{x}}$ dla zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Zauważmy, że żadne z twierdzeń 3.5–3.7 nie zakłada wypukłości zbioru dopuszczalnego Q. Wynika stąd, że model referencyjny PC można stosować nie tylko do problemów liniowych, ale także do problemów całkowitoliczbowych. Ponadto z twierdzenia 3.4 wynika, że referencyjne podejście PC nie wprowadza do modelu nieliniowości, co umożliwia proste implementacje metod punktu referencyjnego w standardowych systemach programowania liniowego.

Różnice między modelem referencyjnym PC i standardowym modelem PC ilustruje poniższy przykład. Porównujemy w nim wyniki analizy dla małego wielokryterialnego problemu liniowego i całkowitoliczbowego.

Przykład 3.2. Rozpatrzmy następujący problem optymalizacji z dwoma funkcjami oceny

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować } (x_1, x_2) & \\ \text{pod warunkiem, że} & 3x_1 + 4x_2 \geq 30 \\ & x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3 \end{array}$$

Zbiorem efektywnym dla tego problemu jest

$$\{(x_1, x_2) \ : \ 3x_1 + 4x_2 = 30, \quad x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 3\}$$

czyli cały odcinek pomiędzy wierzchołkami (2,6) i (6,3) łącznie z obydwoma wierzchołkami. W przypadku odpowiedniego problemu całkowitoliczbowego (x_1, x_2 — całkowite) istnieją cztery rozwiązania efektywne: (2,6), (4,5), (5,4) i (6,3).

Porównamy rozwiązania powyższego problemu rozpatrywanego jako problem liniowy i całkowitoliczbowy otrzymywane z ważonego, minimaksowego i referencyjnego PC. W tym celu wprowadzamy równania celowe

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = a_1, \quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = a_2, \quad d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2$$

We wszystkich modelach używamy tych samych wag: 1 dla odchylenia w górę i 0.9 dla odchylenia w dół. Dla ważonego PC minimalizujemy funkcję

$$d_1^+ + 0.9d_1^- + d_2^+ + 0.9d_2^-$$

W minimaksowym PC trzeba zminimalizować

$$\max\ (d_1^+ + 0.9d_1^-, d_2^+ + 0.9d_2^-)$$

a w referencyjnym PC poszukuje się leksykograficznego minimum funkcji wektorowej

$$[\max\ (d_1^+ - 0.9d_1^-, d_2^+ - 0.9d_2^-), (d_1^+ - 0.9d_1^- + d_2^+ - 0.9d_2^-)]$$

Odpowiednie liniowe i całkowitoliczbowe problemy PC zostały rozwiązane dla ośmiu wektorów aspiracji. Do obliczeń użyto pakietu STORM (Storm Software, 1992).

Tablica 3.8

Problem liniowy

Tablica 3.8:

(a_1, a_2)	Ważony PC$^{a)}$	Minimaksowy PC$^{a)}$	Referencyjny PC
(0,0)	(2,6)	(4.2857,4.2857)	(4.2857,4.2857)
(2,3)	(2,6)	(3.7143,4.7143)	(3.7143,4.7143)
(1,8)	! (2,8)	! (2,6.8889)	(2,6)
(2,5)	(2,6)	(2.5714,5.5714)	(2.5714,5.5714)
(3,4)	(3,5.25)	(3.7143,4.7143)	(3.7143,4.7143)
(5,5)	! (5,5)	! (5,5)	(4.2857,4.2857)
(5,3)	(5,3.75)	(5.4286,3.4286)	(5.4286,3.4286)
(8,2)	! (8,3)	! (6.8889,3)	(6,3)

$^{a)}$! – rozwiązanie nieefektywne

Tablica 3.8 zawiera zestawienie wyników dla problemu liniowego. Zauważmy, że zarówno ważony, jak i minimaksowy PC wygenerowały rozwiązania niefektywne dla trzech wektorów aspiracji ((1,8), (5,5) i (8,3)). Ponadto łatwo sprawdzić, że we wszystkich trzech przypadkach ważony PC generuje rozwiązania nieefektywne dla dowolnego układu dodatnich wag. To samo dotyczy minimaksowego PC dla wektora aspiracji (5,5). Ważony PC wydaje się generować gorszą dystrybucję rozwiązań niż minimaksowy PC. Może to powodować gorszą sterowalność przy analizie interaktywnej. W ważonym PC otrzymaliśmy rozwiązanie (2,6) zarówno dla wektora aspiracji (0,0), jak i (2,5), podczas gdy minimaksowy PC (jak również referencyjny PC) generuje rozwiązania odpowiednio (4.2857,4.2857) i (2.5714,2.5714). Ważony PC wygenerował "narożne" rozwiązanie (2,6) nawet dla wektora aspiracji (2,3), który jest punktem utopii, więc należało się spodziewać pewnego rozwiązania kompromisowego (Zeleny, 1974). Oba pozostałe podejścia (minimaksowy i referencyjny PC) wygenerowały wtedy kompromisowe rozwiązanie efektywne (3.7143,3.7143). W większości przebiegów ważony PC generował rozwiązania z jedną oceną tak bliską odpowiedniego poziomu aspiracji jak to tylko możliwe, a drugą stosunkowo odległą. Natomiast minimaksowy PC i referencyjny PC wydają się być nie obarczone tą wadą. Referencyjny PC generował dokładnie takie samo rozwiązanie jak i minimaksowy PC, gdy ten ostatni generował rozwiązanie efektywne. Różnica jest tylko taka, że referencyjny PC generował rozwiązania efektywne nawet wtedy, gdy minimaksowy PC tego nie osiągał.

Tablica 3.9 zawiera wyniki dla problemu całkowitoliczbowego. Zauważmy, że zarówno ważony PC, jak i minimaksowy PC generują rozwiązania nieefektywne dla tych samych wektorów aspiracji co w przypadku problemu liniowego. Jednakże tutaj wygenerowały one więcej rozwiązań nieefektywnych. Minimaksowy PC wygenerował rozwiązania efektywne tylko dla dwóch wektorów aspiracji ((2,3) i (3,4)), a ważony PC wygenerował rozwiązanie nieefektywne (3,6) dla wektora aspiracji (3,4). W każdym przypadku dodatkowego (w stosunku do problemu liniowego) rozwiązania nieefektywnego istniało alternatywne rozwiązanie efektywne. Należy

Tablica 3.9

Problem całkowitoliczbowy

Tablica 3.9:

(a_1, a_2)	Ważony PC$^{a)}$		Minimaksowy PC$^{a)}$		Referencyjny PC
(0,0)		(2,6)	!?	(5,5)	(4,5)
(2,3)		(2,6)		(4,5)	(4,5)
(1,8)	!	(2,8)	!	(2,7)	(2,6)
(2,5)		(2,6)	!?	(3,6)	(2,6)
(3,4)	!?	(3,6)		(4,5)	(4,5)
(5,5)	!	(5,5)	!	(5,5)	(4,5)
(5,3)		(5,4)	!?	(6,4)	(5,4)
(8,2)	!	(8,3)	!	(7,3)	(6,3)

$^{a)}$! – rozwiązanie nieefektywne
!? – rozwiązanie nieefektywne ale istnieje alternatywne rozwiązanie efektywne

jednak pamiętać, że standardowy moduł optymalizacyjny generuje zazwyczaj tylko jedno rozwiązanie i w tym wypadku było to rozwiązanie nieefektywne. Referencyjny PC zawsze generuje rozwiązania efektywne. Nawet gdy istnieją rozwiązania alternatywne, to są one również efektywne. Na przykład, dla wektora aspiracji (5,5) otrzymaliśmy rozwiązanie (5,4), ale istnieje rozwiązanie alternatywne (4,5), które jest również efektywne. Podobnie jak w przypadku liniowym, referencyjny PC wykazuje znacznie lepszą sterowalność przy analizie interaktywnej. □

3.3.2 Model leksykograficzny

Istotną zaletą ważonego PC jest możliwość łatwego rozwinięcia go do modelu leksykograficznego. Referencyjne PC może być również rozszerzone do modelu leksykograficznego. Włączając priorytety do modelu RPC, podobnie jak i w standardowym leksykograficznym programowaniu celowym, jesteśmy zainteresowani priorytetami dla zmiennych odchyleń a nie dla oryginalnych funkcji oceny. To znaczy, rozpatrujemy oryginalny wielokryterialny problem (1.7) bez hierarchii funkcji oceny. Priorytety służą jedynie jako dodatkowe narzędzia lepszego wyrażania preferencji decydenta podczas interaktywnego poszukiwania rozwiązań efektywnych.

Podczas interaktywnej analizy decydent określa swoje preferencje przez wektor poziomów aspiracji $\mathbf{a}$ i dwie grupy klas priorytetów P_k^+ dla $k = 1, 2, \ldots, p_+$ i P_k^- dla $k = 1, 2, \ldots, p_-$. Klasy priorytetów P_k^+ $(k = 1, 2, \ldots, p_+)$ reprezentują hierarchię poziomów aspiracji w sensie ważności osiągania ocen nie gorszych od odpowiadających im poziomów aspiracji. Analogicznie, P_k^- $(k = 1, 2, \ldots, p_-)$ reprezentują hierarchię ważności osiągania ocen lepszych od odpowiadających im poziomów aspiracji. Obie grupy klas priorytetów stanowią rozkłady całego zbioru ocen I, czyli

$$\bigcup_{k=1,2,\ldots,p_-} P_k^- = I \quad , \qquad P_{k'}^- \cap P_{k''}^- = \emptyset \quad \text{dla } k' \neq k''$$

$$\bigcup_{k=1,2,\ldots,p_+} P^+_k = I \quad , \qquad P^+_{k'} \cap P^+_{k''} = \emptyset \quad \text{dla } k' \neq k''$$

W szczególnym przypadku obie grupy klas priorytetów mogą określać identyczne rozkłady zbioru ocen. Jednakże dla lepszego modelowania rzeczywistych preferencji wydaje się nieodzowne, by mogły być one różne, jako że osiąganie poziomów aspiracji nie zawsze jest tak samo ważne jak ich przekraczanie.

Przyjmujemy, że model preferencji decydenta wyrażony w poziomach aspiracji i klasach priorytetów spełnia leżące u podstaw metod punktu referencyjnego postulaty **P1** i **P2** oraz dodatkowo następujące postulaty

P3. Minimalizacja dowolnego odchylenia w górę d^+_i jest ważniejsza od maksymalizacji każdego odchylenia w dół d^-_j.

P4. Jeżeli $k' < k''$, to minimalizacja odchyleń w górę d^+_i dla $i \in P^+_{k'}$ jest ważniejsza od minimalizacji odchyleń w górę d^+_i dla $i \in P^+_{k''}$.

P5. Jeżeli $k' < k''$, to maksymalizacja odchyleń w dół d^-_i dla $i \in P^-_{k'}$ jest ważniejsza od maksymalizacji odchyleń w dół d^-_i dla $i \in P^-_{k''}$.

Postulaty **P3**, **P4** i **P5** wyrażają hierarchię minimalizacji odchyleń zdefiniowaną za pomocą klas priorytetów. Postulaty te mogą być odpowiednio wyrażone jako następujące własności relacji preferencji

$$\begin{aligned}
y_{i'} > a_{i'} \ \text{ i } \ y_{i''} < a_{i''} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} && (3.34)\\
&\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - a_{i'}\\
&\ \ \text{i} \quad\ 0 \leq \varepsilon'' \leq a_{i''} - y_{i''}\\
y_{i'} > a_{i'}, y_{i''} \geq a_{i''} \text{ i } k^+(i') < k^+(i'') \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} && (3.35)\\
&\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - a_{i'},\ \varepsilon'' \geq 0\\
y_{i'} < a_{i'}, y_{i''} < a_{i''} \text{ i } k^-(i') < k^-(i'') \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon'\mathbf{e}_{i'} + \varepsilon''\mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} && (3.36)\\
&\text{dla} \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon'' \geq 0
\end{aligned}$$

gdzie $k^+(i)$ i $k^-(i)$ oznaczają indeksy klas priorytetów takie, że odpowiednio $i \in P^+_{k^+(i)}$ oraz $i \in P^-_{k^-(i)}$.

W celu wprowadzenia hierarchii odchyleń do modelu RPC zastąpimy funkcję osiągnięcia (3.24) przez

$$\begin{aligned}
\text{LRPC} : \qquad & \text{lexmin } \mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+) = [\mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+), \mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-)] && (3.37)\\
& \text{pod warunkiem, że (3.25), (3.26) i (3.27)}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+) &= [g^+_{11}(\mathbf{d}^+), g^+_{12}(\mathbf{d}^+), \ldots, \mathbf{g}^+_{p_+,1}(\mathbf{d}^+), \mathbf{g}^+_{p_+,2}(\mathbf{d}^+)] && (3.38)\\
\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) &= [g^-_{11}(\mathbf{d}^-), g^-_{12}(\mathbf{d}^-), \ldots, \mathbf{g}^-_{p_-,1}(\mathbf{d}^-), \mathbf{g}^-_{p_-,2}(\mathbf{d}^-)] && (3.39)\\
g^+_{k1}(\mathbf{d}^+) &= \max_{i \in P^+_k}(w^+_i d^+_i) \quad \text{dla} \ \ k = 1, 2, \ldots, p_+ && (3.40)\\
g^+_{k2}(\mathbf{d}^+) &= \sum_{i \in P^+_k} w^+_i d^+_i \quad \text{dla} \ \ k = 1, 2, \ldots, p_+ && (3.41)
\end{aligned}$$

$$g^-_{k1}(\mathbf{d}^-) = \max_{i \in P^-_k}(-w^-_i d^-_i) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, p_+ \tag{3.42}$$

$$g^-_{k2}(\mathbf{d}^-) = \sum_{i \in P^-_k} -w^-_i d^-_i \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, p_- \tag{3.43}$$

Zauważmy, że warunki problemu LRPC nie zawierają wymagań (3.30) gwarantujących właściwe obliczanie odchyleń w problemie RPC. Te wymagania można pominąć w problemie LRPC, ponieważ wszystkie odchylenia w dół d^-_i mają przypisane priorytety niższe niż dowolne odchylenie w górę d^+_i. Dzięki temu dla dowolnych dodatnich współczynników wagowych w^+_i i w^-_i rozwiązanie optymalne problemu LRPC spełnia warunek (3.31), gwarantujący poprawność obliczania odchyleń z równań celowych (3.25)–(3.26).

Twierdzenie 3.8 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i i dowolnych dodatnich wag w^-_i i w^+_i rozwiązanie optymalne $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ problemu LRPC spełnia warunki (3.31), czyli $\bar{d}^-_i \bar{d}^+_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}^-_{i_0} \bar{d}^+_{i_0} > 0$ dla pewnego indeksu i_0 $(1 \leq i_0 \leq m)$. Możemy wtedy zmniejszyć wartości obu zmiennych $\bar{d}^-_{i_0}$ i $\bar{d}^+_{i_0}$ o tę samą małą dodatnią liczbę. To znaczy, dla dostatecznie małej dodatniej liczby δ wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^- - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^+ - \delta\mathbf{e}_{i_0})$ jest dopuszczalny dla problemu LRPC. Ze względu na dodatniość wag w^-_i i w^+_i, spełnione są następujące nierówności

$$g^+_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^+ - \delta\mathbf{e}_{i_0}) \leq g^+_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{i} \quad g^+_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^+ - \delta\mathbf{e}_{i_0}) \leq g^+_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_+$$

Ponadto istnieje k_0 takie, że $i_0 \in P^+_{k_0}$. Stąd wynika, że $g^+_{k_02}(\bar{\mathbf{d}}^+ - \delta\mathbf{e}_{i_0}) < g^+_{k_02}(\bar{\mathbf{d}}^+)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu LRPC. Zatem $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ spełnia warunki (3.31). ■

Z określenia leksykograficznej funkcji celu (3.37)–(3.43) jest jasne, że problem LRPC spełnia postulaty **P3**, **P4** i **P5**. Kolejne twierdzenia pokazują, że leksykograficzny problem LRPC zawsze generuje rozwiązanie efektywne dla oryginalnego problemu wielokryterialnego (postulat **P1**) spełniając jednocześnie postulat **P2**.

Twierdzenie 3.9 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i oraz dowolnych dodatnich wag w^-_i i w^+_i, jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC, to $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym wielokryterialnego problemu (1.7).*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC. Przypuśćmy, że $\bar{\mathbf{x}}$ nie jest rozwiązaniem efektywnym problemu (1.7), czyli istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.44}$$

i dla pewnego indeksu i_0 $(1 \leq i_0 \leq m)$

$$f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) \tag{3.45}$$

Na mocy twierdzenia 3.8 odchylenia $\bar{d}^-_i$ i $\bar{d}^+_i$ spełniają równania

$$\bar{d}_i^+ = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - a_i)_+ \quad \text{i} \quad \bar{d}_i^- = (a_i - f_i(\bar{\mathbf{x}}))_+$$

Zdefiniujmy analogiczne odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$

$$d_i^+ = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ \quad \text{i} \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Trójka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu LRPC i z (3.44) wynika

$$d_i^+ \leq \bar{d}_i^+ \quad \text{i} \quad d_i^- \geq \bar{d}_i^- \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Stąd, dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^+ prawdziwe są następujące nierówności

$$g_{k1}^+(\mathbf{d}^+) \leq g_{k1}^+(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{i} \quad g_{k2}^+(\mathbf{d}^+) \leq g_{k2}^+(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_+$$

$$g_{k1}^-(\mathbf{d}^-) \leq g_{k1}^-(\bar{\mathbf{d}}^-) \quad \text{i} \quad g_{k2}^-(\mathbf{d}^-) \leq g_{k2}^-(\bar{\mathbf{d}}^-) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_-$$

Ponadto istnieje k_+ taki, że $i_0 \in P_{k_+}^+$ oraz k_- taki, że $i_0 \in P_{k_-}^-$. A więc, zgodnie z (3.45), dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^+

$$g_{k_+2}^+(\mathbf{d}^+) < g_{k_+2}^+(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{lub} \quad g_{k_-2}^-(\mathbf{d}^-) < g_{k_-2}^-(\bar{\mathbf{d}}^-)$$

co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu LRPC. Zatem $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego (1.7). ■

Twierdzenie 3.10 *Dla dowolnych poziomów aspiracji a_i oraz dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^+, jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC, to odchylenie $\bar{d}_i^+$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^+ > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > a_{i_0}$) dla pewnego indeksu i_0 $(1 \leq i_0 \leq m)$ i istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$

$$d_i^+ = (f_i(\mathbf{x}) - a_i)_+ = 0 \quad \text{i} \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Trójka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu LRPC i dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^+ prawdziwe są następujące nierówności

$$g_{k1}^+(\mathbf{d}^+) = 0 \leq g_{k1}^+(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{i} \quad g_{k2}^+(\mathbf{d}^+) = 0 \leq g_{k2}^+(\bar{\mathbf{d}}^+) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_+$$

Ponadto istnieje k_0 taki, że $i_0 \in P_{k_0}^+$. Stąd $g_{k_01}^+(\mathbf{d}^+) = 0 < w_{i_0}^+ \bar{d}_{i_0}^+ \leq g_{k_01}^+(\bar{\mathbf{d}}^+)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^+)$ dla problemu LRPC. Zatem nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.11 *Jeżeli wektor $\bar{\mathbf{x}} \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7), to wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$ i dowolnymi dodatnimi wagami w_i^-, w_i^+.*

Dowód. Zauważmy, że dla dodatnich wag $\mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+) \geqq \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) \leqq \mathbf{0}$, a jednocześnie $\mathbf{g}^+(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Zatem gdyby wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ nie był rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$, to istniałby wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$\mathbf{g}^+((\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+) = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \mathbf{g}^-((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+) <_{lex} \mathbf{0}$$

Stąd $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, co przeczy efektywności wektora $\bar{\mathbf{x}}$ dla zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Zauważmy, że żadne z twierdzeń 3.8–3.11 nie zakładało wypukłości zbioru dopuszczalnego Q. Zatem technika leksykograficznego referencyjnego PC może być stosowana nie tylko do problemów liniowych, lecz także do problemów całkowitoliczbowych, w których standardowe programowanie celowe może nie być w stanie wygenerować rozwiązania efektywnego (Hallefjord i Jörnsten, 1988).

Problem LRPC przyjmuje prostszą postać, gdy wszystkie klasy priorytetów są zbiorami jednoelementowymi ($p_+ = p_- = m$). W takim przypadku

$$\begin{aligned} g^+_{k1}(\mathbf{d}^+) = g^+_{k2}(\mathbf{d}^+) &= w^+_{\tau'(k)} d^+_{\tau'(k)} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m \\ g^-_{k1}(\mathbf{d}^-) = g^-_{k2}(\mathbf{d}^-) &= -w^-_{\tau''(k)} d^-_{\tau''(k)} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

gdzie τ' i τ'' są permutacjami zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ takimi, że $P^+_k = \{\tau'(k)\}$ i $P^-_k = \{\tau''(k)\}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$. Zatem funkcje wektorowe $\mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+)$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-)$ zdefiniowane w (3.38)–(3.43) mogą być zastąpione przez

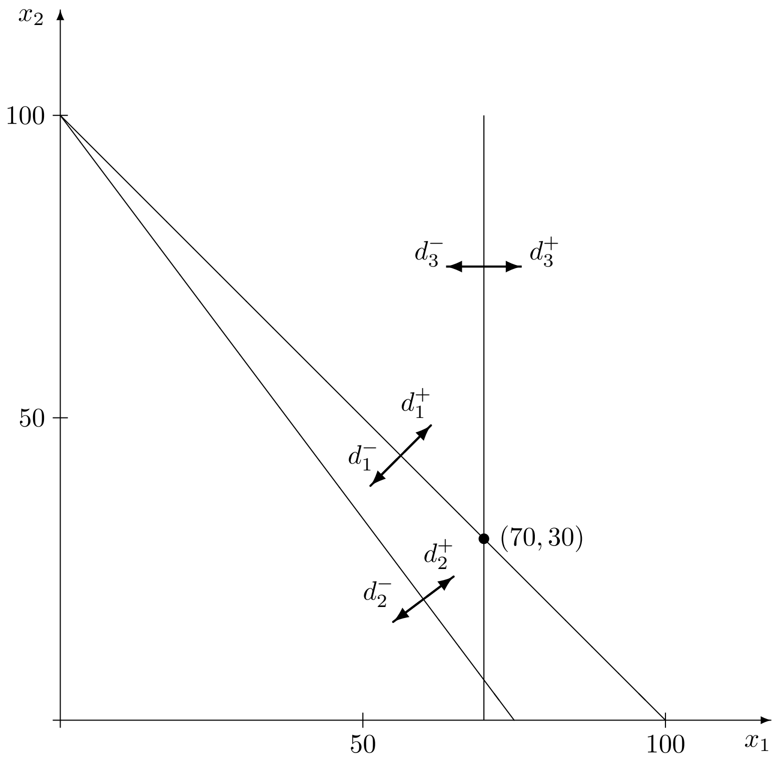
$$\begin{aligned} \mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+) &= [g^+_1(\mathbf{d}^+), g^+_2(\mathbf{d}^+), \ldots, g^+_m(\mathbf{d}^+)] \\ \mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) &= [g^-_1(\mathbf{d}^-), g^-_2(\mathbf{d}^-), \ldots, g^-_m(\mathbf{d}^-)] \end{aligned}$$

gdzie $g^+_k(\mathbf{d}^+) = d^+_{\tau'(k)}$ i $g^-_k(\mathbf{d}^-) = -d^-_{\tau''(k)}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$.

Przykład 3.3. Przedyskutujemy tutaj model LRPC dla przykładowego problemu decyzyjnego. Nasz problem jest oparty na podręcznikowym modelu wyboru mediów dla akcji reklamowej (Budnick i inni, 1988). Rozpatrzmy problem podziału budżetu na reklamę pomiędzy dwa media: telewizję i radio. Skuteczność reklamy jest mierzona liczbą odbiorców reklamy (osób, do których dana reklama dociera). Przyjmijmy, że znane są współczynniki skuteczności (stosunek liczby odbiorców reklamy do kosztów reklamy wyrażonych w tys. zł): 10 000 dla telewizji i 7 500 dla radia. Załóżmy, że należy osiągnąć następujące cele, w kolejności od najwyższego do najniższego priorytetu:

1. Uniknąć wydania więcej niż 100 000 zł;
2. Osiągnąć co najmniej 750 000 odbiorców;
3. Uniknąć wydania więcej niż 70 000 zł na reklamę w TV;
4. Maksymalizować liczbę odbiorców;
5. Minimalizować całość wydatków;
6. Minimalizować wydatki na reklamę w TV.

Łatwo zauważyć, że podstawowy problem decyzyjny jest zadaniem optymalizacji z trzema kryteriami: liczbą odbiorców (maksymalizowaną), całkowitymi wydatkami (minimalizowanymi) i wydatkami na reklamę w TV (minimalizowanymi). Jednakże preferencje zostały wyspecyfikowane za pomocą poziomów aspiracji i priorytetów.



Rysunek 3.1:
Rys. 3.1. Analiza graficzna problemu wyboru mediów

Wprowadzając dwie zmienne decyzyjne x_1 i x_2, wyrażające odpowiednio wydatki na reklamę w TV i w radiu (w tysiącach złotych), otrzymujemy następujące równania celowe

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & d_1^- & - & d_1^+ & = & 100 \\
10\,000x_1 & + & 7\,500x_2 & + & d_2^- & - & d_2^+ & = & 750\,000 \\
x_1 & + & & & d_3^- & - & d_3^+ & = & 70 \\
\multicolumn{7}{r}{x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+} & \geq & 0
\end{array}
$$

Preferencje można wyrazić przez następującą funkcję osiągnięcia LRPC

$$\text{lexmin } \left[d_1^+, d_2^-, d_3^+, -d_2^+, -d_1^-, -d_3^-\right]$$

Zauważmy, że d_2^- ma wyższy priorytet niż $-d_2^+$, ponieważ odpowiadająca jej ocena jest maksymalizowana, podczas gdy do rozważań teoretycznych zakładaliśmy, że wszystki funkcje oceny są minimalizowane.

Przeprowadzając analizę graficzną, łatwo sprawdzić (por. rys. 3.1), że powyższy problem LRPC ma jednoznaczne rozwiązanie optymalne $\mathbf{x} = (70, 30)$ z ocenami: 100 000 zł całkowitych wydatków, w tym 70 000 zł na reklamę w TV, i 925 000 odbiorców. Analiza graficzna problemu wskazuje, że to rozwiązanie nie jest optymalne dla żadnej funkcji osiągnięcia używającej tylko dodatnich wag. Rzeczywiście, rozwiązując problem

$$\text{lexmin} \quad [w_1^+ d_1^+, w_2^- d_2^-, w_3^+ d_3^+, w_2^+ d_2^+, w_1^- d_1^-, w_3^- d_3^-]$$

dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^+ otrzymuje się jednoznaczne rozwiązanie optymalne $\mathbf{x} = (0, 100)$ z ocenami: 100 000 zł całkowitych wydatków wyłącznie na reklamę w radiu i 750 000 odbiorców. To rozwiązanie zdecydowanie nie jest zgodne z hierarchią celów 1–6. Zatem okazuje się, że użycie ujemnych wag było w tym przykładzie istotne. □

Szczególnym przypadkiem modelu LRPC jest problem ze wszystkimi odchyleniami w górę d_i^+ należącymi do jednej klasy priorytetów $P_1^+ = I$ i wszystkimi odchyleniami w dół należącymi do jednej klasy priorytetów $P_1^- = I$. Funkcje osiągnięcia dla takiego problemu możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{g}^+(\mathbf{d}^+) = [g_1^+(\mathbf{d}^+), g_2^+(\mathbf{d}^+)] = \left[\max_{i=1,\dots,m} (w_i^+ d_i^+), \sum_{i=1}^m w_i^+ d_i^+ \right] \quad (3.46)$$

$$\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) = [g_1^-(\mathbf{d}^-), g_2^-(\mathbf{d}^-)] = \left[\max_{i=1,\dots,m} (-w_i^- d_i^-), \sum_{i=1}^m -w_i^- d_i^- \right] \quad (3.47)$$

Zadanie LRPC (3.37) z funkcjami osiągnięcia (3.46)–(3.47) definiuje model referencyjnego programowania celowego bez priorytetów minimalizacji odchyleń. Różni się on od wprowadzonego wcześniej modelu RPC (3.24)–(3.29) nie tylko formą, lecz również własnościami. O ile w modelu RPC współczynniki wagowe muszą spełniać warunek (3.30), to model LRPC bez klas priorytetów wymaga jedynie dodatniości wag (por. twierdzenia 3.8–3.11). Wynika to z przyjętego w modelu preferencji dla LRPC dodatkowego postulatu **P3**. Własność relacji preferencji (3.34) równoważna temu postulatowi nie wynika z postulatu **P2**. Wręcz przeciwnie, w przypadku racjonalnych relacji preferencji z własności (3.34) wynika spełnienie warunku (3.1). Własności (3.34) nie posiada ani model preferencji zadania RPC, ani model preferencji standardowych metod punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4). Dokładniej, metody punktu referencyjnego oparte na parametryzacji (3.4) spełniają warunek (3.34) zawsze w przypadku dwóch funkcji oceny ($m = 2$), ale mogą go nie spełniać przy większej liczbie funkcji.

Zauważmy, że postulat **P2** nie precyzuje reguł preferencji dla różnych wektorów ocen $\mathbf{y}' \not\leq_r \mathbf{a}$ i $\mathbf{y}'' \not\leq_r \mathbf{a}$, a określa jedynie, że wektor aspiracji $\mathbf{a}$ jest preferowany w stosunku do wszystkich wektorów ocen $\mathbf{y} \not\leq_r \mathbf{a}$ (por. (3.1)), Na przykład, w standardowych metodach punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4) z liniowymi funkcjami skalującymi (3.5) o jednostkowych współczynnikach λ_i, jak również w przypadku przedziałami liniowych funkcji skalujących (3.7) o jednostkowych współczynnikach λ_i i $\beta > 0.1$, wektor ocen $(a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 - 10)$ jest preferowany w stosunku do wektora $(a_1 + 1, a_2, a_3)$. Preferowanie w takim wypadku wektora ocen $(a_1 + 1, a_2, a_3)$ wydaje się być zgodne z intuicyjnym pojęciem poziomów aspiracji i z leżącą u podstaw podejścia quasi–zadowalającego zasadą, że decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji. Odpowiada to przyjęciu założenia, że wektor aspiracji $\mathbf{a}$ definiuje model preferencji spełniający warunki (3.2) oraz (3.34). Taki właśnie model preferencji realizuje LRPC niezależnie od wartości współczynników wagowych, podczas gdy w standardowych metodach punktu referencyjnego, opartych na parametryzacji (3.4), wymaga to stosowania funkcji skalujących typu (3.7) z arbitralnie małym parametrem $\beta > 0$. Zatem, nawet w przypadku braku priorytetów, LRPC nie jest modelem standardowych metod punktu referencyjnego zapisanym w terminach programowania celowego, lecz jakościowo inną metodą, ściślej realizującą quasi–zadowalający model preferencji decydenta.

3.4 Przedziałowe referencyjne programowanie celowe

3.4.1 Model ważony

Przy analizie praktycznych wielokryterialnych problemów decyzyjnych najwygodniejszą formą metody punktu referencyjnego jest przedziałowa metoda punktu referencyjnego (por. podrozdziały 3.1 i 3.2), gdzie używa się dodatkowego wektora referencyjnego, wyrażającego poziomy rezerwacji, a współczynniki skalujące (wagi) są automatycznie wyznaczane na podstawie poziomów aspiracji i rezerwacji. W tym podrozdziale pokazujemy, że przedziałowa metoda punktu referencyjnego może być wyrażona za pomocą technik programowania celowego (por. Ogryczak i Lahoda, 1992). To znaczy, naszym celem jest sformułowanie modelu PC zgodnego z postulatami **P1**, **P2** i **P2a** oraz spełniającego wymaganie zupełności parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych.

Przedziałowa metoda punktu referencyjnego używa wektora poziomów rezerwacji jako drugiego wektora parametrów sterujących. Poziomy rezerwacji można wprowadzić do modelu programowania celowego zgodnie z tzw. techniką funkcji kary (Romero, 1991). Najprostszą drogą jest zdefiniowanie dwóch równań celowych: jednego związanego z odchyleniami od poziomu aspiracji i drugiego związanego z odchyleniami od poziomu rezerwacji. Można jednak uniknąć zwiększania wymiarów problemu, korzystając z techniki modelowania podobnej do przedziałowego PC (Ignizio, 1982; Ogryczak, 1988). W tym celu wprowadzamy równania celowe postaci

$$f_i(\mathbf{x}) + d_i^- - d_i^a - d_i^r = a_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.48}$$

$$d_i^- \geq 0, \quad 0 \leq d_i^a \leq r_i - a_i, \quad d_i^r \geq 0 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.49}$$

gdzie a_i i r_i oznaczają odpowiednio poziom aspiracji i rezerwacji dla i–tej funkcji oceny, a d_i^-, d_i^a i d_i^r są nieujemnymi zmiennymi stanu mierzącymi odchylenia wartości i–tej funkcji oceny od odpowiednich poziomów aspiracji i rezerwacji: d_i^- jest odchyleniem w dół od poziomu aspiracji, d_i^a jest odchyleniem w górę od poziomu aspiracji, wewnątrz przedziału między poziomem aspiracji i rezerwacji, a d_i^r jest odchyleniem w górę od poziomu rezerwacji.

Równania celowe (3.48)–(3.49) różnią się od typowych (3.25)–(3.26) tylko tym, że odchylenie w górę d_i^+ jest sumą dwóch odchyleń d_i^a i d_i^r, z których pierwsze jest ograniczone do przedziału między poziomami aspiracji i rezerwacji, a drugie jest dodatnie tylko wtedy, gdy $d_i^a = r_i - a_i$. Zmienne d_i^-, d_i^a i d_i^r wyrażają odpowiednie odchylenia wartości funkcji oceny $f_i(\mathbf{x})$ od poziomów aspiracji i rezerwacji ($d_i^r = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+$, $d_i^a = (f_i(\mathbf{x}) - \bar{d}_i^r - a_i)_+$ i $d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+$), o ile spełnione są warunki

$$d_i^- d_i^a = 0, \quad (r_i - a_i - d_i^a) d_i^r = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.50}$$

stanowiące odpowiednie rozszerzenie warunków komplementarności odchyleń w górę i w dół (3.31).

Używając trzech typów odchyleń, zdefiniowanych przez równania celowe (3.48)–(3.49), możemy zapisać obie formuły (3.11) i (3.12) jako

$$s_i(d_i^-, d_i^a, d_i^r) = \begin{cases} -w_i^- d_i^- & \text{gdy} \quad y_i \le a_i \\ w_i^a d_i^a & \text{gdy} \quad a_i < y_i < r_i \\ w_i^r d_i^r + 1 & \text{gdy} \quad y_i \ge r_i \end{cases} \tag{3.51}$$

gdzie w_i^-, w_i^a i w_i^r są wagami dodatnimi, zdefiniowanymi w zależności od odpowiednich poziomów aspiracji i rezerwacji. Zakładając, że $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$ jak w formułach (3.11) i (3.12), możemy zapisać funkcję (3.51) w postaci sumy ważonej odchyleń

$$s_i(d_i^-, d_i^a, d_i^r) = -w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r \tag{3.52}$$

Jednakże, podobnie jak w przypadku referencyjnego PC, w tej formule kryje się pewna specyfika. Jest nią ujemny współczynnik wagi $-w_i^-$ występujący przy odchyleniu w dół d_i^-.

Jako odpowiednik leżącej u podstaw przedziałowej metody punktu referencyjnego parametryzacji (3.13) możemy sformułować następujący leksykograficzny problem PC

$$\begin{aligned} \text{PRPC :} \quad & \operatorname{lexmin} \ \mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = [g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r), g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)] \\ & \text{pod warunkiem, że (3.48)–(3.49)} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{x} \in Q \end{aligned} \tag{3.53}$$

gdzie

$$g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r\} \tag{3.54}$$

$$g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \sum_{i=1}^{m} (-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r) \tag{3.55}$$

Występujące w funkcjach osiągnięcia g_1 i g_2 wagi w_i^-, w_i^a i w_i^r są parametrami dodatnimi, które mogą zależeć od poziomów aspiracji i rezerwacji. Na przykład, kładąc $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$, $w_i^- = \beta/(r_i - a_i)$ i $w_i^r = \gamma/(r_i - a_i)$ z dodatnimi wartościami β i γ, otrzymujemy zadanie równoważne problemowi (3.13) z funkcjami s_i określonymi wzorem (3.12).

Dla zapewnienia właściwego obliczania odchyleń w zadaniu PRPC, optymalne wartości zmiennych reprezentujących odchylenia powinny spełniać warunki (3.50). Pierwsze wymaganie $d_i^- d_i^a = 0$ można względnie łatwo zaimplementować w programowaniu liniowym. Drugie natomiast wymaga specjalnych technik, nawet w przypadku programowania liniowego. Jednakże okazuje się, że warunki (3.50) są spełnione przez rozwiązania optymalne problemu PRPC, jeżeli wagi spełniają warunki naturalne dla przedziałowej metody punktu referencyjnego

$$w_i^a = 1/(r_i - a_i), \quad 0 < w_i^- < w_i^a < w_i^r \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \tag{3.56}$$

Twierdzenie 3.12 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$, jeżeli wagi spełniają warunki (3.56), to rozwiązanie optymalne $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ problemu PRPC spełnia warunki (3.50), czyli $\bar{d}_i^- \bar{d}_i^a = 0$ oraz $(r_i - a_i - \bar{d}_i^a)\bar{d}_i^r = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^a > 0$ dla pewnego indeksu $1 \le i_0 \le m$. Możemy wtedy zmniejszyć $\bar{d}_{i_0}^-$ i $\bar{d}_{i_0}^a$ o taką samą małą liczbę. To znaczy, dla dostatecznie małej dodatniej liczby δ wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^- - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^a - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest dopuszczalny dla problemu PRPC. Dzięki temu, że $0 < w_i^- < w_i^a$, spełniona jest następująca nierówność

$$-w_{i_0}^-(\bar{d}_{i_0}^- - \delta) + w_{i_0}^a(\bar{d}_{i_0}^a - \delta) + w_{i_0}^r \bar{d}_{i_0}^r < -w_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^- + w_{i_0}^a \bar{d}_{i_0}^a + w_{i_0}^r \bar{d}_{i_0}^r$$

Stąd wynika

$$\begin{array}{rcl} g_1(\bar{\mathbf{d}}^- - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^a - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r) & \le & g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r) \\ g_2(\bar{\mathbf{d}}^- - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^a - \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r) & < & g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r) \end{array}$$

co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu PRPC.

Dalej przypuśćmy, że $(r_{i_0} - a_{i_0} - \bar{d}_{i_0}^a)\bar{d}_{i_0}^r > 0$ dla pewnego indeksu $1 \le i_0 \le m$. Możemy wtedy zmniejszyć $\bar{d}_{i_0}^r$ i jednocześnie zwiększyć $\bar{d}_{i_0}^a$ o taką samą małą liczbę. To znaczy, dla dostatecznie małej liczby dodatniej δ czwórka wektorów $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a + \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r - \delta\mathbf{e}_{i_0})$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla problemu PRPC. Dzięki temu, że $w_i^r > w_i^a$, spełniona jest następująca nierówność

$$-w_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^- + w_{i_0}^a(\bar{d}_{i_0}^a + \delta) + w_{i_0}^r(\bar{d}_{i_0}^r - \delta) < -w_{i_0}^- \bar{d}_{i_0}^- + w_{i_0}^a \bar{d}_{i_0}^a + w_{i_0}^r \bar{d}_{i_0}^r$$

Stąd wynika

$$\begin{array}{rcl} g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a + \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r - \delta\mathbf{e}_{i_0}) & \le & g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r) \\ g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a + \delta\mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r - \delta\mathbf{e}_{i_0}) & < & g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r) \end{array}$$

co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu PRPC. Zatem $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ spełnia oba warunki (3.50) ■

Z twierdzenia 3.12 wynika, że wymagania (3.50) można pominiąć w sformułowaniu problemu PRPC, gdy wagi wprowadzają stosunkowo wysoką karę za przekroczenie poziomu rezerwacji i stosunkowo niską premię za wynik lepszy od odpowiedniego poziomu aspiracji. Zauważmy, że dla parametrów β i γ spełniających waruki

$0 < \beta < 1$ i $\gamma > 1$, wagi określone wzorami $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$, $w_i^- = \beta/(r_i - a_i)$ i $w_i^r = \gamma/(r_i - a_i)$ spełniają warunek (3.56). Zatem funkcja s_i zdefiniowana wzorem (3.12) może być wyrażona w postaci (3.52), tak żeby spełnione były wszystkie założenia twierdzenia 3.12. W przypadku funkcji s_i zdefiniowanej wzorem (3.11) można napotkać pewne trudności przy dobieraniu właściwych wartości dla parametrów β i γ.

Wykażemy, że problem PRPC zawsze generuje rozwiązanie efektywne oryginalnego problemu wielokryterialnego (twierdzenie 3.13), spełniając jednocześnie postulaty **P2** (twierdzenie 3.14) i **P2a** (twierdzenie 3.15), definiujące model preferencji przedziałowej metody punktu referencyjnego. Ponadto zadanie PRPC stanowi zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych za pomocą poziomów aspiracji (twierdzenie 3.16).

Twierdzenie 3.13 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ i dowolnych dodatnich wag w_i^-, w_i^r, w_i^a spełniających warunki (3.56), jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC, to $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC. Przypuśćmy, że $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem nieefektywnym problemu (1.7). Oznacza to, że istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$f_i(\mathbf{x}) \le f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.57}$$

i $f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}})$ dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$, czyli

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) < \sum_{i=1}^{m} f_i(\bar{\mathbf{x}}) \tag{3.58}$$

Na mocy twierdzenia 3.12 odchylenia $\bar{d}_i^-$, $\bar{d}_i^a$ i $\bar{d}_i^r$ spełniają równości

$$\bar{d}_i^r = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - r_i)_+, \quad \bar{d}_i^a = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{d}_i^r - a_i)_+, \quad \bar{d}_i^- = (a_i - f_i(\bar{\mathbf{x}}))_+$$

Zdefiniujmy analogicznie odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$ jako

$$d_i^r = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+, \quad d_i^a = (f_i(\mathbf{x}) - d_i^r - a_i)_+, \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+$$

Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu PRPC i ze względu na (3.57) i (3.58) nierówności

$$-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r \le -w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^a \bar{d}_i^a + w_i^r \bar{d}_i^r \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r) < \sum_{i=1}^{m} (-w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^a \bar{d}_i^a + w_i^r \bar{d}_i^r)$$

są spełnione dla dowolnych dodatnich wag w_i^-, w_i^a i w_i^r. Stąd wynika

$$g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) \le g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{i} \quad g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) < g_2(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$$

co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu PRPC. Zatem $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu (1.7). ■

Twierdzenie 3.14 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ i dowolnych dodatnich wag w_i^-, w_i^r, w_i^a spełniających warunki (3.56), jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC, to odchylenie $\bar{d}_i^r$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^r > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > r_{i_0}$ i $\bar{d}_{i_0}^a = r_{i_0} - a_{i_0}$) dla pewnego indeksu i_0 oraz istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$ jako

$$d_i^r = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+ = 0, \quad d_i^a = (f_i(\mathbf{x}) - d_i^r - a_i)_+ \geq 0, \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \geq 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla problemu PRPC i dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^r są spełnione następujące zależności

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r\} = \max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a\} \leq 1$$

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^a \bar{d}_i^a + w_i^r \bar{d}_i^r\} \geq 1 + w_i^r \bar{d}_i^r > 1$$

Stąd $g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) < g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu PRPC. Zatem nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.15 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ oraz dowolnych dodatnich wag w_i^-, w_i^r, w_i^a spełniających warunki (3.56), jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC, to odchylenie $\bar{d}_i^a$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}_{i_0}^a > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > a_{i_0}$) dla pewnego indeksu i_0 oraz istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$ jako

$$d_i^r = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+ = 0, \quad d_i^a = (f_i(\mathbf{x}) - d_i^r - a_i)_+ = 0, \quad d_i^- = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \geq 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu PRPC i dla dowolnych dodatnich wag w_i^- i w_i^r są spełnione następujące nierówności

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + w_i^r d_i^r\} = \max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- d_i^-\} \leq 0$$

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{-w_i^- \bar{d}_i^- + w_i^a \bar{d}_i^a + w_i^r \bar{d}_i^r\} \geq w_i^a \bar{d}_i^a > 0$$

Stąd $g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) < g_1(\bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu PRPC. Więc nie istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.16 *Jeżeli wektor $\bar{\mathbf{x}} \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7), to wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu PRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$, dowolnym wektorem rezerwacji $\mathbf{r} > \mathbf{a}$ i dowolnymi wagami w_i^-, w_i^a, w_i^r spełniającymi warunek (3.56).*

Dowód. Przypuśćmy, że $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ nie jest rozwiązaniem optymalnym zadania PRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$. Istnieje wtedy wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$g_1((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+ - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+) < g_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

albo

$$g_1((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+ - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+) = 0$$

i jednocześnie

$$g_2((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+ - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+, (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+) < g_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

Zatem na mocy (3.56)

$$(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+ \geq \mathbf{0} \quad \text{i} \quad (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+ = \mathbf{0}$$

czyli $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, co przeczy efektywności wektora $\bar{\mathbf{x}}$ dla zadania (1.7). ■

3.4.2 Implementacja w arkuszu kalkulacyjnym

Zauważmy, że warunki (3.56) są spełnione dla $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$, $w_i^- = \beta/(r_i - a_i)$ i $w_i^r = \gamma/(r_i - a_i)$ z wartościami β i γ spełniającymi nierówności $0 < \beta < 1 < \gamma$. Odpowiedni problem PRPC przyjmuje wtedy prostą do implementacji postać

$$\begin{array}{ll} \text{PRPC:} & \text{lexmin } \mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = [g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r), g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)] \\ & \text{pod warunkiem, że (3.48)–(3.49)} \quad \text{i} \quad \mathbf{x} \in Q \end{array}$$

gdzie

$$g_1(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \max_{i=1,\dots,m} \{(-\beta d_i^- + d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i)\} \tag{3.59}$$

$$g_2(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \sum_{i=1}^{m} (-\beta d_i^- + d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i) \tag{3.60}$$

Powyższa postać zadania PRPC jest tak prosta, że może być łatwo zaimplementowana w arkuszu kalkulacyjnym. W ostatniej dekadzie elektroniczne arkusze kalkulacyjne stały się standardowym narzędziem analizy używanym w zarządzaniu. Podstawową techniką analizy w arkuszach kalkulacyjnych jest analiza typu *what–if*. Za jej pomocą użytkownik przymierza różne wartości w komórkach arkusza, reprezentujących zmienne decyzyjne i analizuje zaktualizowany arkusz w poszukiwaniu najbardziej satysfakcjonującego wyboru. Analiza symulacyjna typu *what–if* nie jest wystarczająco sprawna dla bardziej skomplikowanych modeli ilościowych. Dlatego pewne arkusze kalkulacyjne oferują tak zwaną analizę *goal–seeking* (np. Gray, 1988). Za jej pomocą użytkownik może określić preferowaną wartość celu dla pewnej komórki reprezentującej ocenę i wywołać komendę znajdowania odpowiedniej wartości dla wskazanej komórki wejściowej (zmiennej decyzyjnej). Można więc uważać, że analiza *goal–seeking* jest rozwiązywaniem równania lub uproszczoną symulacją odwrotną. Naturalnym krokiem dalej jest użycie narzędzi optymalizacji do poszukiwania najlepszych wartości zmiennych decyzyjnych, odpowiadających wartości optymalnej wskazanej komórki oceny. Poczynając od pionierskich implementacji w połowie lat 80. (por. Sharda, 1985), programowanie liniowe, czy generalnie optymalizacja, zaczęły być dostępne w arkuszach kalkulacyjnych jako dodatkowe oprogramowanie lub jako wbudowane funkcje arkusza. Jednakże, aby sprostać oczekiwaniom użytkownika, techniki optymalizacji nie powinny ograniczać się do analiz jednokryterialnych. Ponieważ modele w arkuszach kalkulacyjnych pozwalają za pomocą analizy *what–if* obserwować wiele ocen, należałoby to wykorzystać do optymalizacji wielokryterialnej.

Nowoczesne arkusze kalkulacyjne są wyposażone w narzędzia ułatwiające implementację większości funkcji systemów wspomagania decyzji (DeSanctis i Gallupe, 1987). Przede wszystkim, mają możliwości składowania danych zarówno w formie tablic, jak i w postaci relacyjnych baz danych. To pierwsze jest istotne, ponieważ naturalną postacią większości danych jest prostokątna tablica i jej składowanie w relacyjnej bazie danych jest zwykle nieefektywne. Z drugiej strony, funkcje relacyjnych baz danych są bardzo przydatne w procesie tłumaczenia wybranych rozwiązań (decyzji) na język konkretnych procedur zarządzania. Arkusze kalkulacyjne wyposażone w różnorodne narzędzia graficznej prezentacji wyników stanowią też wygodne i przyjazne dla użytkownika środowisko dla implementacji systemów wspomagania decyzji. Są one więc idealnym środowiskiem dla interaktywnej analizy wielokryterialnej (por. Troutt i inni, 1991). Omawiana w tym podrozdziale technika przedziałowego referencyjnego programowania celowego dobrze pasuje do stylu analizy interaktywnej w arkuszu kalkulacyjnym, ponieważ proces interaktywny jest całkowicie otwarty, jak w typowej analizie *what–if*.

Interaktywna metoda PRPC została zaimplementowana w arkuszu Lotus 1-2-3 wyposażonym w dodatkowy pakiet optymalizacyjny What'sBest! (Lindo Systems, 1992). Implementacja rozszerza zbiór zmiennych oryginalnego modelu decyzyjnego o zmienne odchyleń d_i^-, d_i^a i d_i^r, dodaje nowe ograniczenia typu (3.48)–(3.49) i wykonuje dwa przebiegi optymalizacji. W pierwszym przebiegu jest minimalizowana funkcja (3.59), a w drugim funkcja (3.60) przy ustalonej na poprzednim, optymalnym poziomie, wartości funkcji (3.59). W ten sposób otrzymywane są dwa kolejne zadania optymalizacyjne. Do implementowania ograniczeń (3.48)–(3.49) i funkcji osiągnięcia (3.59)–(3.60) został przygotowany specjalny szablon. Ponieważ dodatkowe równania celowe (3.48)–(3.49) używają tylko wartości funkcji oceny z oryginalnego modelu, szablon jest powiązany z oryginalnym modelem tylko poprzez kilka komórek odnoszących się do funkcji oceny $f_i(\mathbf{x})$ w (3.48). Aby skorzystać z możliwości analizy PRPC, użytkownik potrzebuje tylko skopiować szablon do arkusza zawierającego problem decyzyjny i wskazać funkcje oceny, które mają być analizowane. Użyty pakiet optymalizacyjny (Lindo Systems, 1992) pozwala analizować wielokryterialne modele liniowe i całkowitoliczbowe. Jednakże PRPC stosuje się także do problemów nieliniowych i może być implementowane do nich, jeśli tylko dodatkowe oprogramowanie pozwala na optymalizację nieliniową.

Większość szablonu PRPC jest ukryta przed użytkownikiem, który pracuje tylko z jedną tablicą sterującą (por. tablica 3.10). Tablica sterująca wspomaga zarówno cały interaktywny proces analizy, jak i przyłączenie narzędzia PRPC do oryginalnego modelu (poprzez specyfikację funkcji oceny). Wiersze tablicy sterującej odpowiadają poszczególnym funkcjom oceny. Wszystkie mają taką samą sześciokolumnową strukturę. Pierwsze cztery kolumny powinny być wypełnione przed rozpoczęciem analizy interaktywnej, aby przyłączyć szablon do bieżącego modelu decyzyjnego. Pierwsza kolumna (Objective) zawiera komórkę tekstową przeznaczoną na nazwę funkcji oceny. Druga kolumna (Max/Min) służy do określenia typu funkcji. Zawiera ona komórkę tekstową, w której wpisuje się odpowiednio max lub min. Trzecia kolumna (Activity) pozwala użytkownikowi aktywizować lub dezaktywizować funkcję oceny podczas analizy interaktywnej. Czwarta kolumna (Value) jest przeznaczona do pokazywania bieżącej wartości funkcji oceny. Zawiera komórkę formuły, w której na początku powinien być wpisany adres komórki funkcji oceny w oryginalnym modelu decyzyjnym. Operacja wpisania adresu przyłącza tablicę sterującą do modelu decyzyjnego.

Tablica 3.10

Tablica sterująca PRPC

Tablica 3.10:

Objective	Max/Min	Activity (0 or 1)	Value	Aspiration level	Reservation level
tekst	tekst	liczba	formuła	liczba	liczba
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
tekst	tekst	liczba	formuła	liczba	liczba

Zasadnicza część implementacji kryje się w strukturze danych zawierającej definicje zmiennych i formuły. Przygotowany zbiór formuł reperezentuje ograniczenia (3.48)–(3.49) w postaci m rozłącznych podzbiorów, z których każdy odwołuje się do konkretnej funkcji oceny f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Dodatkowe dwie komórki zawierają formuły reprezentujące funkcje osiągnięcia (3.59) i (3.60). Zauważmy, że dodatkowe struktury są niezależne od konkretnego modelu decyzyjnego i dlatego są uniwersalne. Jedyne połączenie z modelem występuje w ograniczeniach (3.48), które są przyłączane do reszty modelu poprzez adresy funkcji oceny w czwartej kolumnie tablicy sterującej.

Drugą część implementacji stanowi makro arkusza. Głównym jego zadaniem jest wyłączenie zbędnych formuł (3.48)–(3.49) odpowiadających nieaktywnym funkcjom oceny (zgodnie z wartościami z trzeciej kolumny tablicy sterującej) oraz przygotowanie zadań dla każdego z dwóch przebiegów optymalizacji. Operacje te są realizowane za pomocą standardowych komend arkusza Lotus 1-2-3. Do pierwszego przebiegu optymalizacji wyłączana jest komórka zawierająca funkcję celu (3.60). Po pierwszej optymalizacji pomocnicza zmienna wybierająca maksimum w (3.59) jest ustalana na poziomie wartości optymalnej i uaktywniana jest funkcja celu (3.60) dla drugiego przebiegu optymalizacji.

Mając tablicę sterującą przyłączoną do modelu decyzyjnego można rozpocząć analizę interaktywną, jako że model zostanie automatycznie rozszerzony o ograniczenia (3.48)–(3.49) zawarte w szablonie. Użytkownik steruje analizą poprzez edycję poziomów aspiracji i/lub rezerwacji, czyli używając kolumn piątej (Aspiration level) i szóstej (Reservation level) w tablicy sterującej. Kolumny te zawierają komórki przeznaczone do wpisywania odpowiednich liczb. Można także zaktywizować lub dezaktywizować pewne funkcje oceny w trzeciej kolumnie. Wykonanie makro generuje odpowiednie rozwiązanie efektywne. Bieżące oceny pojawiają się w czwartej kolumnie (Value) tablicy sterującej, podczas gdy bieżące wartości zmiennych decyzyjnych są umieszczane w odpowiednich komórkach oryginalnego modelu. Użytkownik może prowadzić otwartą analizę interaktywną, jak w trybie *what–if*. Standardowe możliwości składowania i graficznej prezentacji danych w arkuszu kalkulacyjnym pozwalają zapamiętywać i porównywać kilka rozwiązań efektywnych w sposób najbardziej dogodny dla użytkownika.

Często jako pierwszy krok analizy wielokryterialnej stosuje się jednokryterialną optymalizację względem każdej funkcji oceny z osobna, co umożliwia wyznaczenie macierzy konfliktu (por. podrozdział 1.4). Dlatego implementacja PRPC została wyposażona w dodatkowe makro wykonujące wszystkie optymalizacje jednokryterialne w jednym wywołaniu. Jest to niewielkie rozszerzenie głównego makro optymalizacyjnego używające tych samych struktur danych. Macierz konfliktu powstaje jako tablica zawierająca wartości wszystkich funkcji oceny (wierszy) otrzymywane podczas rozwiązywania poszczególnych problemów jednokryterialnych (kolumn). Dzięki użyciu techniki regularyzacyjnej podczas wyliczania macierzy konfliktu każde jednokryterialne rozwiązanie optymalne jest jednocześnie rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego.

Przykład 3.4. Do zademonstrowania analizy wielokryterialnej przeprowadzanej z pomocą szablonu PRPC w arkuszu kalkulacyjnym użyjemy małego przykładowego problemu decyzyjnego. Problem wywodzi się z podręcznikowego modelu planowania finansowego (Shogan, 1988, rozdz. 4.4), ale my zajmiemy się jego wielokryterialną naturą, podczas gdy w oryginale był sformułowany jako jednokryterialny problem liniowy. Należy zdecydować, jak inwestować w okresie 6 miesięcy pewną kwotę “wolnej gotówki”. Jest kilka możliwości inwestowania (lokat terminowych) charakteryzujących się różnymi terminami, stopami procentowymi i wskaźnikami ryzyka. Po upływie terminu lokaty zainwestowana kwota wraz z odsetkami jest natychmiast dostępna do ponownego zainwestowania. Tworzy to dynamiczną sieć przepływu gotówki, którą można opisać liniowymi równaniami bilansu (por. Shogan, 1988). Technika modelowania w arkuszu kalkulacyjnym (por. Lindo Systems, 1990) pozwala zapisać model decyzyjny w przejrzystej postaci prostokątnej tablicy zmiennych decyzyjnych (kwoty zainwestowane), z wierszami odpowiadającymi poszczególnym możliwościom inwestowania, podczas gdy równania bilansu są ukryte w dodatkowych formułach.

Celem jest znalezienie scenariusza inwestowania, który maksymalizuje zysk na koniec 6–miesięcznego okresu, minimalizuje ryzyko i maksymalizuje mobilność gotówki. Zysk jest zdefiniowany jako różnica między uzyskaną kwotą końcową a kwotą zainwestowaną na początku. W celu określenia ryzyka definiujemy miesięczny wskaźnik ryzyka dla zainwestowanych kwot jako sumę bieżących inwestycji ważoną odpowiednimi wskaźnikami ryzyka lokat. Funkcją oceny (minimalizowaną) jest wtedy maksimum z 6 miesięcznych wskaźników ryzyka. Jako miarę mobilności gotówki rozpatrujemy kwotę dostępną do szybkiego wycofania. W tym celu obliczamy dla każdego miesiąca dwie wielkości: kwotę dostępną do wycofania w czasie jednego miesiąca i kwotę dostępną do wycofania w czasie dwóch miesięcy. Pozwala to na sformułowanie dwóch funkcji oceny (maksymalizowanych) wyrażających minimum po 6 miesiącach kwot dostępnych do wycofania odpowiednio w czasie 1 i 2 miesięcy. Rozpatrywany problem decyzyjny jest ostatecznie sformułowany jako wielokryterialny problem liniowy z czterema funkcjami oceny nazywanymi odpowiednio: Zysk, Ryzyko, EW–1 i EW–2.

Wykonując odpowiednie makro otrzymujemy macierz konfliktu oraz wektory utopii i nadiru pokazane w tablicy 3.11. Zauważmy, że wartości ocen zmieniają się znacząco w zależności od tego, która funkcja oceny jest wybrana do jednokryterialnej optymalizacji. Ponadto widać zdecydowany konflikt pomiędzy Zyskiem i pozostałymi funkcjami oceny.

Tablica 3.11

Macierz konfliktu

Tablica 3.11:

	Optymalizowana funkcja					
Funkcja	Zysk	Ryzyko	EW–1	EW–2	Utopia	Nadir
Zysk	12.36	9.35	9.35	10.80	12.36	9.35
Ryzyko	9.54	1.08	1.08	4.00	1.08	9.54
EW–1	0.00	101.50	101.50	0.00	101.50	0.00
EW–2	0.00	101.50	101.50	103.50	103.50	0.00

Tablica 3.12

Analiza problemu przykładowego z PRPC

Tablica 3.12:

F-kcja	Asp.	Rez.	Rozw.	Asp.	Rez.	Rozw.
	Iteracja 1			Iteracja 2		
Zysk	12.36	9.35	10.86	12.36	9.35	10.51
Ryzyko	1.08	9.54	5.26	3.00	4.00	3.62
EW–1	101.50	0.00	51.15	50.00	30.00	37.65
EW–2	103.50	0.00	52.17	50.00	30.00	65.48
	Iteracja 3			Iteracja 4		
Zysk	12.36	11.00	10.76	12.36	11.00	11.04
Ryzyko	3.00	4.00	4.19	3.00	5.00	4.94
EW–1	50.00	30.00	26.26	40.00	20.00	20.56
EW–2	50.00	30.00	53.49	50.00	30.00	30.59

Przebieg analizy interaktywnej został przedstawiony w tablicy 3.12. Na początku użyliśmy wektora utopii jako poziomów aspiracji i wektora nadiru jako poziomów rezerwacji, co dało w wyniku tak zwane rozwiązanie neutralne. Analizując rozwiązanie neutralne spostrzegliśmy, że poziom Ryzyka nie jest satysfakcjonujący, podczas gdy wartości obu ocen mobilności są lepsze od spodziewanych. Dlatego w Iteracji 2 zmienione zostały poziomy aspiracji i rezerwacji dla tych funkcji. W wyniku otrzymaliśmy rozwiązanie efektywne z mniejszym Zyskiem i bardzo dobrymi pozostałymi ocenami. Zauważmy, że wartość EW–2 jest nawet lepsza od odpowiadającego jej poziomu aspiracji, gdyż mogła być poprawiona bez pogarszania innych ocen. To właśnie różni podejście PRPC od standardowego programowania celowego. Pragniemy znaleźć rozwiązanie z większym Zyskiem. Dlatego w Iteracji 3 podnosimy odpowiedni poziom rezerwacji do 11. W wyniku otrzymujemy rozwiązanie efektywne z wszystkimi ocenami gorszymi od odpowiadających im poziomów rezerwacji. Zatem po ponownym rozpatrzeniu naszych oczekiwań, decydujemy się na osłabienie wymagań na Ryzyko i EW–1. Pozwala to na otrzymanie w Iteracji 4 rozwiązania efektywnego, w którym wszystkie oceny spełniają nałożone na nie wymagania. Decydujemy się na przyjęcie tego rozwiązania jako końcowego. Wybór końcowego rozwiązania zależy oczywiście od preferencji użytkownika. Nasz przykład sesji PRPC pokazuje, jak łatwo decydent może poznać problem decyzyjny i sterować analizą zbioru rozwiązań efektywnych pracując w trybie *what–if* arkusza kalkulacyjnego. □

W podejściu PRPC poziomy rezerwacji są pośrednio używane do definiowania wag $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$. Można rozpatrywać standardowe podejście PC z tak zdefiniowanymi wagami jako prostszą technikę do zaimplementowania w arkuszu kalkulacyjnym. W kolejnym przykładzie przedstawiamy wyniki eksperymentów obliczeniowych służących do porównania tych dwóch podejść.

Przykład 3.5. Rozpatrujemy modele ważonego i minimaksowego programowania celowego z wagami $w_i = 1/(r_i - a_i)$. Ponadto pozwalamy, aby poziomy rezerwacji były użyte jako drugie cele, definiując w ten sposób programowanie celowe z funkcjami kary (Romero, 1991, rozdz. 6). W terminach modelu (3.48)–(3.49) rozpatrywane przez nas funkcje osiągnięcia PC przyjmują następującą postać

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \sum_{i=1}^{m} (d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i) \tag{3.61}$$

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \sum_{i=1}^{m} (\beta d_i^- + d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i) \tag{3.62}$$

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \max_{i=1,\ldots,m} \{(d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i)\} \tag{3.63}$$

$$g(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = \max_{i=1,\ldots,m} \{(\beta d_i^- + d_i^a + \gamma d_i^r)/(r_i - a_i)\} \tag{3.64}$$

Wzór (3.61) reprezentuje jednostronną ważoną funkcję osiągnięcia, minimalizującą tylko odchylenia dodatnie, podczas gdy (3.62) uwzględnia także odchylenia ujemne. W przypadku $\gamma = 1$ standardowe odchylenia dodatnie są rozpatrywane z odpowiednimi wagami równymi $1/(r_i - a_i)$. Dla $\gamma > 1$ wzory definiują funkcje osiągnięcia z dodatkowymi karami za odchylenia przekraczające odpowiadające im poziomy rezerwacji. Wzory (3.63) i (3.64) określają podobne minimaksowe funkcje osiągnięcia. Zauważmy, że funkcje osiągnięcia PC (3.64) i (3.62) różnią się od funkcji (3.59) i (3.60), używanych w podejściu PRPC, znakiem współczynników wagowych związanych z odchyleniami ujemnymi d_i^-.

Tablica 3.13 jest zestawieniem wyników standardowego podejścia ważonego PC (3.61) z $\gamma = 1$ dla problemu z przykładu 3.4. Iteracje od 1 do 4 odpowiadają takim samym w tablicy 3.12 w tym sensie, że użyto tych samych poziomów aspiracji i rezerwacji. W tablicy 3.13 można zaobserwować znacznie gorszą sterowalność procesu interaktywnego przez poziomy aspiracji i rezerwacji. W pierwszej iteracji, używając wektora utopii jako wektora aspiracji i wektora nadiru jako wektora rezerwacji, zamiast rozwiązania kompromisowego otrzymujemy rozwiązanie odpowiadające jednokryterialnej optymalizacji względem Ryzyka lub EW–1 (porównaj tablica 3.11). W Iteracji 3, mimo zmiany poziomu rezerwacji dla Zysku, otrzymujemy ponownie rozwiązanie z Iteracji 2 z wartością Zysku poniżej poziomu rezerwacji, podczas gdy pozostałe kryteria osiągają lub przekraczają swoje poziomy aspiracji. Podobne cechy ma rozwiązanie w Iteracji 4. Aby otrzymać rozwiązanie z większym Zyskiem, w Iteracji 5 podnosimy odpowiedni poziom rezerwacji do 12. Daje to w efekcie rozwiązanie z Zyskiem=11.04 (jak w Iteracji 4 PRPC, ale znacznie poniżej bieżącego poziomu rezerwacji) i wartością Ryzyka przekraczającą swój poziom rezerwacji, podczas gdy kryteria mobilności osiągają swoje poziomy aspiracji.

Tablica 3.13

Analiza ważonego PC dla problemu przykładowego

Tablica 3.13:

	Iteracja 1	Iteracja 2	Iteracja 3	Iteracja 4	Iteracja 5		
Funkcja	Rozw.	Rozw.	Rozw.	Rozw.	Asp.	Rez.	Rozw.
Zysk	9.35	10.24	10.24	10.28	12.36	12.00	11.04
Ryzyko	1.08	3.00	3.00	3.00	3.00	5.00	5.60
EW–1	101.50	50.00	50.00	40.00	40.00	20.00	40.00
EW–2	101.50	78.32	78.32	93.71	50.00	30.00	50.00

Używając poziomu rezerwacji jako drugiego celu do definicji funkcji kary, można poprawić sterowalność w podejściu ważonego PC. W tablicy 3.14 zestawiono wyniki dla takiego właśnie podejścia (z $\gamma = 10$) do problemu przykładowego, dla takich samych pięciu iteracji jak w tablicy 3.13. Można zauważyć poprawę sterowalności przez poziomy rezerwacji w tym sensie, że rozwiązania są zmuszane do osiągania wszystkich poziomów rezerwacji, o ile jest to tylko możliwe. Jednakże, mimo poprawy w Iteracji 4, wszystkie trudności ze sterowalnością wskazane w tablicy 3.13 pozostają istotne w tablicy 3.14. Dokładniej, wciąż nie ma rozwiązania kompromisowego w Iteracji 1, a rozwiązanie z Iteracji 4 nie przybliża tak równomiernie poziomów aspiracji i rezerwacji jak odpowiednie rozwiązanie w tablicy 3.12.

Tablica 3.14

Analiza problemu przykładowego z ważonym PC z funkcją kary

Tablica 3.14:

Funkcja	Iteracja 1 Rozwiązanie	Iteracja 2 Rozwiązanie	Iteracja 3 Rozwiązanie	Iteracja 4 Rozwiązanie	Iteracja 5 Rozwiązanie
Zysk	9.35	10.24	10.62	11.00	11.62
Ryzyko	1.08	3.00	4.00	5.00	7.17
EW–1	101.50	50.00	41.20	23.55	20.00
EW–2	101.50	78.32	50.00	50.00	30.00

Sterowalność, podobna do tej jaką ma podejście PRPC, może być osiągnięta przy minimaksowym PC z funkcją kary. W tym podejściu funkcja osiągnięcia (3.63) różni się od pierwszego poziomu funkcji osiągnięcia PRPC (3.59) tylko tym, że nie używa ujemnych wag dla odchyleń d_i^-. Jednakże ujemne wagi i użycie drugiego poziomu funkcji osiągnięcia (3.60) są nieodzowne dla zagwarantowania efektywności generowanego rozwiązania (Ogryczak i Lahoda, 1992). Standardowe techniki PC naruszają własność **P1** i dlatego mogą generować rozwiązania nieefektywne. Ilustrują to eksperymenty z problemami testowymi generowanymi losowo. Wygenerowano 20 dwukryterialnych problemów całkowitoliczbowych zdefiniowanych bezpośrednio w dwuwymiarowej przestrzeni ocen (tzn. $y_i = f_i(\mathbf{x}) = x_i$). Dla każdego problemu wygenerowano losowo 10 zbiorów poziomów aspiracji i rezerwacji. Wszystkie rozwiązania dopuszczalne są zawarte w kwadracie o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,100)$, $(100,100)$ i $(100,0)$. Ponadto zostały wygenerowane losowo dwie nierówności odcinające wierzchołek $(0,0)$; jedna z wierzchołka $(0,100)$ i druga z wierzchołka $(100,0)$. Wektory aspiracji wygenerowano jako punkty o współrzędnych całkowitych należące do trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,99)$ i $(99,0)$. 87% wygenerowanych wektorów aspiracji okazało się być nieosiągalnymi. Poziomy rezerwacji wygenerowano losowo jako liczby całkowite spełniające nierówności $a_i + 1 \leq r_i \leq 100$. 44% spośród wektorów rezerwacji okazało się nieosiągalne. Wszystkie liczby losowe były generowane zgodnie z rozkładem jednostajnym.

Tablica 3.15

Statystyka wyników dla generowanych losowo problemów całkowitoliczbowych

Tablica 3.15:

	Funkcje osiągnięcia z $\beta = \gamma = 1$						
	(3.61)	(3.62)	(3.63)	(3.64)	(3.59)	(3.60)	$\frac{(3.59)}{(3.60)}$
Nie osiągnięta efektywność	15%	30%	17%	30%	20%	0%	0%
Nie osiągnięte poz. rezerwacji	50%	50%	44%	44%	44%	82%	44%
Nie osiągnięte poz. aspiracji	87%	87%	87%	87%	87%	98%	87%
Nakładające się rozwiązania	27%	21%	24%	18%	20%	66%	26%

W tablicach 3.15 i 3.16 są zestawione wyniki dla różnych funkcji osiągnięcia

Tablica 3.16

Statystyka wyników dla generowanych losowo problemów całkowitoliczbowych

Tablica 3.16:

	Funkcje osiągnięcia z $\beta = 0.1$ i $\gamma = 10$						
	(3.61)	(3.62)	(3.63)	(3.64)	(3.59)	(3.60)	$\frac{(3.59)}{(3.60)}$
Nie osiągnięta efektywność	11%	26%	13%	21%	15%	0%	0%
Nie osiągnięte poz. rezerwacji	44%	44%	44%	44%	44%	44%	44%
Nie osiągnięte poz. aspiracji	87%	87%	87%	87%	87%	90%	87%
Nakładające się rozwiązania	19%	14%	23%	17%	19%	27%	25%

na problemach testowych wygenerowanych losowo. To porównanie zawiera cztery funkcje osiągnięcia PC (3.61)–(3.64), funkcje (3.59) i (3.60) z podejścia PRPC rozpatrywane oddzielnie i w końcu technikę PRPC opartą na leksykograficznej minimalizacji funkcji (3.59) i (3.60). Kolejne wiersze tablic zawierają: procent wyznaczonych rozwiązań, które nie spełniają wymagań efektywności, procent wyznaczonych rozwiązań, które nie osiągnęły swoich poziomów rezerwacji ($y_1 > r_1$ lub $y_2 > r_2$), procent wyznaczonych rozwiązań, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji ($y_1 > a_1$ lub $y_2 > a_2$) oraz średni procent wyznaczonych nakładających się rozwiązań. Łatwo zauważyć, że wszystkie funkcje osiągnięcia PC wygenerowały 11–30% rozwiązań nieefektywnych, mimo że tylko 13% wektorów aspiracji było osiągalnych. W istocie, poza techniką PRPC tylko funkcja (3.60) wygenerowała wyłącznie rozwiązanie efektywne. Jednakże funkcja (3.60), w przypadku $\beta = \gamma = 1$ odpowiadająca standardowemu podejściu ważonemu (1.19), okazała się bardzo słabo sterowalna przez poziomy aspiracji i rezerwacji. Wszystkie podejścia bazujące na minimaksowych funkcjach osiągnięcia, łącznie z techniką PRPC, osiągnęły wszystkie osiągalne poziomy aspiracji i rezerwacji. Zauważmy, że nawet "spłaszczona" wersja techniki PRPC z $\beta = \gamma = 1$ spełniła własności **P1**–**P3**. Wprowadzenie parametrów $\beta = 0.1$ i $\gamma = 10$ (tablica 3.16) poprawiło wyniki funkcji osiągnięcia PC, ale jeszcze pozostało wiele rozwiązań nieefektywnych. □

3.4.3 Model leksykograficzny

W podrozdziale 3.3 pokazano, że referencyjne PC może być rozszerzone do modelu leksykograficznego. W modelu PRPC można w podobny sposób określić priorytety dla zmiennych odchyleń. Ponieważ priorytety dotyczą zmiennych odchyleń a nie poszczególnych funkcji oceny, to zachowany zostaje oryginalny problem wielokryterialny (1.7) bez hierarchii funkcji oceny, a priorytety służą tylko jako dodatkowe narzędzia lepszego wyrażania preferencji decydenta podczas interaktywnego poszukiwania rozwiązań efektywnych. Zakładamy, że podczas analizy interaktywnej decydent określa swoje preferencje poprzez wektory poziomów aspiracji $\mathbf{a}$ i rezerwacji $\mathbf{r}$ oraz trzy grupy klas priorytetów P_k^r dla $k = 1, 2, \ldots, p_r$, P_k^a dla $k = 1, 2, \ldots, p_a$ i P_k^- dla $k = 1, 2, \ldots, p_-$. Klasy priorytetów P_k^r $(k = 1, 2, \ldots, p_r)$

reprezentują hierarchię poziomów rezerwacji w sensie ważności osiągania ocen nie gorszych od odpowiadających im poziomów rezerwacji. Analogicznie, klasy priorytetów P_k^a $(k = 1, 2, \ldots, p_a)$ reprezentują hierarchię poziomów aspiracji w sensie ważności osiągania ocen nie gorszych od odpowiadających im poziomów aspiracji. Klasy P_k^- $(k = 1, 2, \ldots, p_-)$ reprezentują hierarchię ważności osiągania ocen lepszych od odpowiadających im poziomów aspiracji. Każda z trzech grup klas priorytetów stanowi rozkład całego zbioru ocen i w szczególnym przypadku mogą one być identyczne. Model preferencji decydenta wyrażony w poziomach aspiracji i rezerwacji oraz klasach priorytetów spełnia następujące postulaty:

P1. Relacja preferencji jest racjonalną relacją preferencji, czyli spełnia warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5).

P2. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami $f_i(\mathbf{x})$ równymi odpowiadającym im poziomom aspiracji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną większą od odpowiadającego jej poziomu aspiracji.

P2a. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami $f_i(\mathbf{x})$ równymi odpowiadającym im poziomom rezerwacji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną większą od odpowiadającego jej poziomu rezerwacji.

P3a. Minimalizacja dowolnego odchylenia d_i^a jest ważniejsza od maksymalizacji każdego odchylenia w dół d_j^-.

P3b. Minimalizacja dowolnego odchylenia d_i^r jest ważniejsza od minimalizacji każdego odchylenia d_j^a.

P4a. Jeżeli $k' < k''$, to minimalizacja odchyleń d_i^r dla $i \in P_{k'}^r$ jest ważniejsza od minimalizacji odchyleń d_i^r dla $i \in P_{k''}^r$.

P4b. Jeżeli $k' < k''$, to minimalizacja odchyleń d_i^a dla $i \in P_{k'}^a$ jest ważniejsza od minimalizacji odchyleń d_i^a dla $i \in P_{k''}^a$.

P5. Jeżeli $k' < k''$, to maksymalizacja odchyleń w dół d_i^- dla $i \in P_{k'}^-$ jest ważniejsza od maksymalizacji odchyleń w dół d_i^- dla $i \in P_{k''}^-$.

Postulaty **P1**, **P2** i **P2a** charakteryzują model preferencji wykorzystywany w podejściu PRPC. Natomiast postulaty **P3a**, **P3b**, **P4a**, **P4b** i **P5** wyrażają hierarchię minimalizacji odchyleń zdefiniowaną za pomocą klas priorytetów. Postulaty **P3a** i **P3b** wyrażają własności relacji preferencji, które mogą być zapisane w postaci warunku (3.34) i analogicznego warunku dla poziomów rezerwacji

$$y_{i'} > r_{i'} \quad \text{i} \quad y_{i''} < r_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon' \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon'' \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} \qquad (3.65)$$
$$\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - r_{i'}, \quad 0 \leq \varepsilon'' \leq r_{i''} - y_{i''}$$

Postulat **P5** wyraża własności relacji preferencji zapisane w postaci warunku (3.36), natomiast postulaty **P4a** i **P4b** mogą być zapisane w postaci warunków

$$y_{i'} > r_{i'},\ y_{i''} \geq r_{i''} \quad \text{i} \quad k^r(i') < k^r(i'') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon' \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon'' \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$$
$$\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - r_{i'}, \quad \varepsilon'' \geq 0$$
$$r_{i'} \geq y_{i'} > a_{i'},\ y_{i''} \geq a_{i''} \quad \text{i} \quad k^a(i') < k^a(i'') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon' \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon'' \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$$
$$\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - a_{i'}, \quad 0 \leq \varepsilon'' \leq r_{i''} - y_{i''}$$

gdzie $k^r(i)$ i $k^a(i)$ oznaczają indeksy klas priorytetów takie, że odpowiednio $i \in P^r_{k^r(i)}$ oraz $i \in P^a_{k^a(i)}$.

Hierarchia minimalizacji odchyleń może być wprowadzona do modelu PRPC za pomocą następujących funkcji osiągnięcia

$$\text{LPRPC}: \quad \text{lexmin } \mathbf{g}(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r) = [\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r), \mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a), \mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-)] \quad \text{pod warunkiem, że (3.48), (3.49) i } \mathbf{x} \in Q \tag{3.66}$$

gdzie

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r) = [g^r_{11}(\mathbf{d}^r), g^r_{12}(\mathbf{d}^r), \ldots, \mathbf{g}^r_{p_r,1}(\mathbf{d}^r), \mathbf{g}^r_{p_r,2}(\mathbf{d}^r)] \tag{3.67}$$

$$\mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a) = [g^a_{11}(\mathbf{d}^a), g^a_{12}(\mathbf{d}^a), \ldots, \mathbf{g}^a_{p_a,1}(\mathbf{d}^a), \mathbf{g}^a_{p_a,2}(\mathbf{d}^a)] \tag{3.68}$$

$$\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) = [g^-_{11}(\mathbf{d}^-), g^-_{12}(\mathbf{d}^-), \ldots, \mathbf{g}^-_{p_-,1}(\mathbf{d}^-), \mathbf{g}^-_{p_-,2}(\mathbf{d}^-)] \tag{3.69}$$

$$g^r_{k1}(\mathbf{d}^r) = \max_{i \in P^r_k}(w^r_i d^r_i) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r \tag{3.70}$$

$$g^r_{k2}(\mathbf{d}^r) = \sum_{i \in P^r_k} w^r_i d^r_i \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r \tag{3.71}$$

$$g^a_{k1}(\mathbf{d}^a) = \max_{i \in P^a_k}(w^a_i d^a_i) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r \tag{3.72}$$

$$g^a_{k2}(\mathbf{d}^a) = \sum_{i \in P^a_k} w^a_i d^a_i \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_a \tag{3.73}$$

$$g^-_{k1}(\mathbf{d}^-) = \max_{i \in P^-_k}(-w^-_i d^-_i) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r \tag{3.74}$$

$$g^-_{k2}(\mathbf{d}^-) = \sum_{i \in P^-_k} -w^-_i d^-_i \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_- \tag{3.75}$$

Występujące w problemie LPRPC wagi w^-_i, w^a_i i w^r_i mogą przyjmować dowolne wartości dodatnie i nie muszą spełniać dodatkowych warunków typu (3.56) dla zagwarantowania właściwego obliczania odchyleń. Warunki te można pominąć w problemie LPRPC, ponieważ wszystkie odchylenia w dół d^-_i mają przypisane priorytety niższe niż dowolne odchylenie d^a_i i wszystkie odchylenia d^a_i mają przypisane priorytety niższe niż dowolne odchylenie d^r_i. Zostało to sprecyzowane w twierdzeniu 3.17.

Twierdzenie 3.17 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ i dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i rozwiązanie optymalne $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ problemu LPRPC spełnia warunki (3.50), czyli*

$$\bar{d}^-_i \bar{d}^a_i = 0, \quad (r_i - a_i - \bar{d}^a_i)\bar{d}^r_i = 0 \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}^-_{i_0} \bar{d}^a_{i_0} > 0$ dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$. Możemy wtedy zmniejszyć wartości obu zmiennych $\bar{d}^-_{i_0}$ i $\bar{d}^a_{i_0}$ o tę samą małą dodatnią liczbę. To znaczy, dla dostatecznie małej dodatniej liczby δ czwórka wektorów $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^- - \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^a - \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla problemu LPRPC. Ze względu na dodatniość wag w^-_i i w^a_i, spełnione są następujące nierówności

$$g^a_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^a - \delta \mathbf{e}_{i_0}) \le g^a_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{i} \quad g^a_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^a - \delta \mathbf{e}_{i_0}) \le g^a_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_a$$

Ponadto istnieje k_0 takie, że $i_0 \in P^a_{k_0}$. Stąd wynika, że $g^a_{k_0 2}(\bar{\mathbf{d}}^a - \delta \mathbf{e}_{i_0}) < g_{k_0 2}(\bar{\mathbf{d}}^a)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu LPRPC.

Dalej przypuśćmy, że $(r_{i_0} - a_{i_0} - \bar{d}^a_{i_0})\bar{d}^r_{i_0} > 0$ dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$. Możemy wtedy zmniejszyć wartość zmiennej $\bar{d}^r_{i_0}$ i jednocześnie zwiększyć wartość $\bar{d}^a_{i_0}$ o taką samą małą dodatnią liczbę. To znaczy, że dla dostatecznie małej dodatniej liczby δ wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a + \delta \mathbf{e}_{i_0}, \bar{\mathbf{d}}^r - \delta \mathbf{e}_{i_0})$ jest dopuszczalny dla problemu LPRPC. Ze względu na dodatniość wag w^r_i i w^a_i, spełnione są następujące nierówności

$$g^r_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^r - \delta \mathbf{e}_{i_0}) \le g^r_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{i} \quad g^r_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^r - \delta \mathbf{e}_{i_0}) \le g^r_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r$$

Ponadto istnieje k_0 takie, że $i_0 \in P^r_{k_0}$. Stąd wynika, że $g^r_{k_0 2}(\bar{\mathbf{d}}^r - \delta \mathbf{e}_{i_0}) < g^r_{k_0 2}(\bar{\mathbf{d}}^r)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu LPRPC. Zatem $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ spełnia oba warunki (3.50). ■

Z określenia leksykograficznej funkcji celu (3.66)–(3.75) jest jasne, że problem LRPC spełnia postulaty **P3a**, **P3b**, **P4a**, **P4b** i **P5**. Kolejne twierdzenia pokazują, że leksykograficzny problem LPRPC zawsze generuje rozwiązanie efektywne dla oryginalnego problemu wielokryterialnego (postulat **P1**), spełniając jednocześnie postulaty **P2** i **P2a**.

Twierdzenie 3.18 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ oraz dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i, jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC, to $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (1.7).*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC. Przypuśćmy, że $\bar{\mathbf{x}}$ nie jest rozwiązaniem efektywnym problemu (1.7), czyli istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że

$$f_i(\mathbf{x}) \le f_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.76}$$

i dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$

$$f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) \tag{3.77}$$

Na mocy twierdzenia 3.17 odchylenia $\bar{d}^-_i$, $\bar{d}^a_i$ i $\bar{d}^r_i$ spełniają równości

$$\bar{d}^r_i = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - r_i)_+, \quad \bar{d}^a_i = (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{d}^r_i - a_i)_+, \quad \bar{d}^-_i = (a_i - f_i(\bar{\mathbf{x}}))_+$$

Zdefiniujmy analogicznie odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$ jako

$$d^r_i = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+, \quad d^a_i = (f_i(\mathbf{x}) - d^r_i - a_i)_+, \quad d^-_i = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+$$

Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu LPRPC i z (3.76) wynika

$$d^r_i \le \bar{d}^r_i, \quad d^a_i \le \bar{d}^a_i \quad \text{i} \quad d^-_i \ge \bar{d}^-_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Stąd, dla dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i prawdziwe są następujące nierówności

$$g^r_{k1}(\mathbf{d}^r) \le g^r_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{i} \quad g^r_{k2}(\mathbf{d}^r) \le g^r_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r$$

$$g^a_{k1}(\mathbf{d}^a) \le g^a_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{i} \quad g^a_{k2}(\mathbf{d}^a) \le g^a_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_a$$

$$g^-_{k1}(\mathbf{d}^-) \le g^-_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^-) \quad \text{i} \quad g^-_{k2}(\mathbf{d}^-) \le g^-_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^-) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_-$$

Ponadto istnieją k_-, k_a i k_r takie, że $i_0 \in P^-_{k_-}$, $i_0 \in P^a_{k_a}$ i $i_0 \in P^r_{k_r}$. A więc, zgodnie z (3.77), dla dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i prawdziwa jest przynajmniej jedna z nierówności

$$g^r_{k_r2}(\mathbf{d}^r) < g^r_{k_r2}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{lub} \quad g^a_{k_a2}(\mathbf{d}^a) < g^a_{k_a2}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{lub} \quad g^-_{k_-2}(\mathbf{d}^-) < g^-_{k_-2}(\bar{\mathbf{d}}^-)$$

co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu LPRPC. Zatem $\bar{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego (1.7). ■

Twierdzenie 3.19 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ oraz dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i, jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC, to odchylenie $\bar{d}^r_i$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \le r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}^r_{i_0} > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > r_{i_0}$) dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$ i istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \le r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$

$$d^r_i = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+ = 0, \quad d^a_i = (f_i(\mathbf{x}) - d^r_i - a_i)_+ \ge 0, \quad d^-_i = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \ge 0$$

Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu LPRPC i dla dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i prawdziwe są następujące nierówności

$$g^r_{k1}(\mathbf{d}^r) = 0 \le g^r_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{i} \quad g^r_{k2}(\mathbf{d}^r) = 0 \le g^r_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r$$

Ponadto istnieje k_0 taki, że $i_0 \in P^r_{k_0}$. Stąd $g^r_{k_01}(\mathbf{d}^r) = 0 < w^r_{i_0}\bar{d}^r_{i_0} \le g^r_{k_01}(\bar{\mathbf{d}}^r)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu LPRPC. Zatem nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \le r_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.20 *Dla dowolnych poziomów aspiracji i rezerwacji $a_i < r_i$ oraz dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i, jeżeli $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC, to odchylenie $\bar{d}^a_i$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \le a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dowód. Niech $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC. Przypuśćmy, że $\bar{d}^a_{i_0} > 0$ (czyli $f_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) > a_{i_0}$) dla pewnego indeksu i_0 $(1 \le i_0 \le m)$ i istnieje wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \le a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zdefiniujmy odchylenia dla wektora $\mathbf{x}$

$$d^r_i = (f_i(\mathbf{x}) - r_i)_+ = 0, \quad d^a_i = (f_i(\mathbf{x}) - d^r_i - a_i)_+ = 0, \quad d^-_i = (a_i - f_i(\mathbf{x}))_+ \ge 0$$

Czwórka wektorów $(\mathbf{x}, \mathbf{d}^-, \mathbf{d}^a, \mathbf{d}^r)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu LPRPC i dla dowolnych dodatnich wag w^-_i, w^a_i i w^r_i prawdziwe są następujące nierówności

$$g^r_{k1}(\mathbf{d}^r) = 0 \leq g^r_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{i} \quad g^r_{k2}(\mathbf{d}^r) = 0 \leq g^r_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^r) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_r$$
$$g^a_{k1}(\mathbf{d}^a) = 0 \leq g^a_{k1}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{i} \quad g^a_{k2}(\mathbf{d}^a) = 0 \leq g^a_{k2}(\bar{\mathbf{d}}^a) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p_a$$

Ponadto istnieje k_0 taki, że $i_0 \in P^a_{k_0}$. Stąd $g^a_{k_01}(\mathbf{d}^a) = 0 < w^a_{i_0}\bar{d}^a_{i_0} \leq g^a_{k_01}(\bar{\mathbf{d}}^a)$, co przeczy optymalności $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}^-, \bar{\mathbf{d}}^a, \bar{\mathbf{d}}^r)$ dla problemu LPRPC. Zatem nie istnieje żaden wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $f_i(\mathbf{x}) \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Twierdzenie 3.21 *Jeżeli wektor $\bar{\mathbf{x}} \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7), to wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LPRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$, dowolnym wektorem rezerwacji $\mathbf{r} > \mathbf{a}$ i dowolnymi dodatnimi wagami w^-_i, w^a_i i w^r_i.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych dodatnich wag $\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r) \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a) \geqq \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) \leqq \mathbf{0}$, a jednocześnie $\mathbf{g}^r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^a(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Zatem, gdyby wektor $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ nie był rozwiązaniem optymalnym problemu LRPC z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$, to istniałby wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{g}^r((\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^a((\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r})_+ - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))_+) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}^-((\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))_+) <_{lex} \mathbf{0}$. Stąd $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, co przeczy efektywności wektora $\bar{\mathbf{x}}$ dla zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Zauważmy, że żadne z twierdzeń 3.17–3.21 nie zakłada wypukłości zbioru dopuszczalnego Q. Zatem technika LPRPC może być stosowana nie tylko do problemów liniowych, lecz także do problemów całkowitoliczbowych.

Problem LPRPC przyjmuje prostszą postać, gdy wszystkie klasy priorytetów są zbiorami jednoelementowymi ($p_r = p_a = p_- = m$). Zauważmy, że w takim przypadku

$$g^r_{k1}(\mathbf{d}^r) = g^r_{k2}(\mathbf{d}^r) = w^r_{\tau^r(k)} d^r_{\tau^r(k)} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m$$
$$g^a_{k1}(\mathbf{d}^a) = g^a_{k2}(\mathbf{d}^a) = w^a_{\tau^a(k)} d^a_{\tau^a(k)} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m$$
$$g^-_{k1}(\mathbf{d}^-) = g^-_{k2}(\mathbf{d}^-) = -w^-_{\tau^-(k)} d^-_{\tau^-(k)} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m$$

gdzie τ^r, τ^a i τ^- są permutacjami zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ takimi, że $P^r_k = \{\tau^r(k)\}$, $P^a_k = \{\tau^a(k)\}$ i $P^-_k = \{\tau^-(k)\}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$. Zatem funkcje wektorowe $\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r)$, $\mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a)$ i $\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-)$ zdefiniowane w (3.67)–(3.75) mogą być zastąpione przez następujące

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r) = [g^r_1(\mathbf{d}^r), g^r_2(\mathbf{d}^r), \ldots, g^r_m(\mathbf{d}^r)]$$
$$\mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a) = [g^a_1(\mathbf{d}^a), g^a_2(\mathbf{d}^a), \ldots, g^a_m(\mathbf{d}^a)]$$
$$\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) = [g^-_1(\mathbf{d}^-), g^-_2(\mathbf{d}^-), \ldots, g^-_m(\mathbf{d}^-)]$$

gdzie $g^r_k(\mathbf{d}^r) = d^r_{\tau^r(k)}$, $g^a_k(\mathbf{d}^a) = d^a_{\tau^a(k)}$ i $g^-_k(\mathbf{d}^-) = -d^-_{\tau^-(k)}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$.

Szczególnym przypadkiem modelu LPRPC jest problem z pojedynczymi klasami priorytetów $P^r_1 = I$, $P^a_1 = I$ i $P^-_1 = I$. Funkcje osiągnięcia dla takiego problemu możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{d}^r) = [g^r_1(\mathbf{d}^r), g^r_2(\mathbf{d}^r)] = \left[\max_{i=1,\ldots,m} (w^r_i d^r_i), \quad \sum_{i=1}^m w^r_i d^r_i \right] \tag{3.78}$$

$$\mathbf{g}^a(\mathbf{d}^a) = [g_1^a(\mathbf{d}^a), g_2^a(\mathbf{d}^a)] = \left[\max_{i=1,\ldots,m} (w_i^a d_i^a), \quad \sum_{i=1}^m w_i^a d_i^a \right] \tag{3.79}$$

$$\mathbf{g}^-(\mathbf{d}^-) = [g_1^-(\mathbf{d}^-), g_2^-(\mathbf{d}^-)] = \left[\max_{i=1,\ldots,m} (-w_i^- d_i^-), \sum_{i=1}^m -w_i^- d_i^- \right] \tag{3.80}$$

Zadanie LPRPC (3.37) z funkcjami osiągnięcia (3.78)–(3.80) definiuje model przedziałowego referencyjnego programowania celowego bez priorytetów minimalizacji odchyleń w poszczególnych grupach. Różni się on od wprowadzonego wcześniej modelu PRPC (3.53)–(3.55) nie tylko formą, lecz również własnościami. O ile w modelu PRPC współczynniki wagowe muszą spełniać warunek (3.56), to model LPRPC bez klas priorytetów wymaga jedynie dodatniości wag (twierdzenia 3.17–3.21). Wynika to z przyjętych w modelu preferencji dla LPRPC dodatkowych postulatów **P3a** i **P3b**. Własności relacji preferencji (3.34) i (3.65) równoważne tym postulatom nie wynikają z postulatów **P2** i **P2a**. Własności (3.34) i (3.65) nie posiada ani model preferencji zadania PRPC, ani model preferencji standardowych przedziałowych metod punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.13). Dokładniej, metody punktu referencyjnego oparte na parametryzacji (3.13) spełniają warunki (3.34) i (3.65) w przypadku dwóch funkcji oceny ($m = 2$), ale mogą ich nie spełniać przy większej liczbie funkcji.

Zauważmy, że postulaty **P2** i **P2a** określają jedynie, że wektory aspiracji i rezerwacji są preferowane w stosunku do wszystkich wektorów ocen spełniających odpowiednio warunki $\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{a}$ (por. (3.2)) i $\mathbf{y} \not\preceq_r \mathbf{r}$ (por. (3.9)). Postulaty te nie precyzują reguł preferencji dla różnych wektorów ocen $\mathbf{y}' \not\preceq_r \mathbf{a}$ i $\mathbf{y}'' \not\preceq_r \mathbf{a}$ lub $\mathbf{y}' \not\preceq_r \mathbf{r}$ i $\mathbf{y}'' \not\preceq_r \mathbf{r}$. Na przykład, w przedziałowych metodach punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.13) z przedziałami liniowymi funkcjami skalującymi (3.12) z $r_2 - a_2 = r_3 - a_3$, $\beta > 0.1$ i $\gamma < 10$ wektor ocen $(a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 - 10)$ jest preferowany w stosunku do wektora $(a_1 + 1, a_2, a_3)$ i wektor ocen $(r_1 + 1, r_2 + 1, r_3 - 10)$ jest preferowany w stosunku do wektora $(r_1 + 1, r_2, r_3)$. Preferowanie w takim wypadku wektora ocen $(a_1 + 1, a_2, a_3)$ i odpowiednio $(r_1 + 1, r_2, r_3)$ wydaje się być zgodne z intuicyjnym pojęciem poziomów aspiracji i rezerwacji oraz z leżącą u podstaw podejścia quasi–zadowalającego zasadą, że decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji (lub odpowiednio rezerwacji). Odpowiada to przyjęciu założenia, że wektory aspiracji i rezerwacji definiują model preferencji spełniający warunki (3.2) i (3.34) oraz (3.9) i (3.65). Taki właśnie model preferencji realizuje LPRPC niezależnie od wartości współczynników wagowych, podczas gdy w standardowych przedziałowych metodach punktu referencyjnego, opartych na parametryzacji (3.13) z funkcjami s_i postaci (3.11) lub (3.12), wymaga to stosowania arbitralnie małego współczynnika $\beta > 0$ i arbitralnie dużego współczynnika γ. Zatem, nawet w przypadku braku priorytetów, LPRPC nie jest modelem standardowych metod punktu referencyjnego zapisanym w terminach programowania celowego, lecz jakościowo inną metodą, ściślej realizującą quasi–zadowalający model preferencji decydenta wyrażonych za pomocą poziomów aspiracji i rezerwacji.

Rozdział 4

Modele preferencji z elementami równości

4.1 Rozwiązania symetrycznie efektywne

4.1.1 Symetryczna efektywność

Różne rozwiązania efektywne problemu wielokryterialnego (1.7) są rozwiązaniami najlepszymi w sensie różnych racjonalnych relacji preferencji (por. twierdzenie 1.3). Wiele praktycznych wielokryterialnych modeli decyzyjnych narzuca dodatkowe własności relacji preferencji i, co za tym idzie, ogranicza wybór rozwiązania do odpowiedniego podzbioru całego zbioru rozwiązań efektywnych. Ten rozdział jest poświęcony problemom wielokryterialnym z ocenami jednorodnymi, których minimalizacja jest jednakowo ważna (Podinowski, 1975). To znaczy, poszczególne indywidualne oceny y_i, chociaż generowane przez różne funkcje f_i, są wszystkie wyrażone w tej samej skali, co pozwala na porównywanie ich wartości. Dotyczy to w szczególności sytuacji, gdy poszczególne funkcje oceny wyrażają indywidualne oceny różnych użytkowników pewnego systemu i poszukuje się rozwiązania możliwie najbardziej zadowalającego wszystkich użytkowników. Oceny jednorodne pojawiają się w licznych problemach dynamicznych, gdzie poszczególne funkcje oceny reprezentują tę samą ocenę w odniesieniu do różnych momentów czasu (Klein i inni, 1992). W problemach stochastycznych oceny jednorodne mogą reprezentować różne możliwe wartości niedeterministycznej pojedynczej oceny (Bell i Raiffa, 1988). Ponadto wiele technik modelowania problemów decyzyjnych wprowadza najpierw oceny jednorodne, a następnie dokonuje ich (bezstronnej) agregacji. Dotyczy to na przykład agregacji relacji przynależności do zbioru rozmytego (por. Zimmermann, 1985; Yager i Filev, 1995).

W zadaniach z ocenami jednorodnymi i jednakowo ważnymi relacja preferencji decydenta powinna być bezstronna ze względu na indywidualne funkcje oceny. To znaczy, przy danym zestawie funkcji oceny ważny jest tylko rozkład wartości osiągniętych przez te funkcje dla danej decyzji, a nie jest ważne, jaka funkcja jaką wartość pryjęła. Wymaganie to jest formułowane matematycznie jako własność *anonimowości* relacji preferencji.

Definicja 4.1 *Mówimy, że relacja preferencji $\preceq$ jest anonimowa (bezstronna) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora ocen $\mathbf{y} \in Y$*

$$(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \ldots, y_{\tau(m)}) \cong (y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{4.1}$$

dla dowolnej permutacji τ zbioru $I = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Relację preferencji, która oprócz warunków zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5) spełnia dodatkowo warunek anonimowości (4.1), będziemy dalej nazywać *anonimowo racjonalną* relacją preferencji. Taką relacją jest na przykład relacja preferencji odpowiadająca minimalizacji sumy wszystkich funkcji oceny

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} y_i' \leq \sum_{i=1}^{m} y_i'' \tag{4.2}$$

Szereg wielokryterialnych problemów decyzyjnych z jednorodnymi ocenami wymaga anonimowo racjonalnych relacji preferencji. Jako podstawowego przykładu problemu decyzyjnego z anonimowo racjonalną relacją preferencji będziemy używać w tym rozdziale zagadnienia lokalizacyjnego. Ogólny problem lokalizacyjny można sformułować następująco. Dany jest zbiór m klientów (jednostek przestrzennych) oraz zbiór n potencjalnych lokalizacji obiektów. W szczególności może to być podzbiór (lub cały zbiór) punktów reprezentujących klientów. Ponadto dana jest liczba p ($p \leq n$) obiektów do lokalizacji. Decyzję można tu opisać poprzez zmienne binarne x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) równe 1, gdy ma być użyta j–ta lokalizacja, a 0 w przeciwnym przypadku. Zmienne decyzyjne x_j muszą spełniać ograniczenie $\sum_{j=1}^{n} x_j = p$. Następnie zakłada się, że dla każdego klienta $i = 1, 2, \ldots, m$ jest zdefiniowana funkcja $f_i(\mathbf{x})$ rozlokowania obiektów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jest ona miarą satysfakcji i–tego klienta z danego rozlokowania obiektów. W typowych sformułowaniach problemów lokalizacyjnych funkcja ta jest zwykle związana z odległością i dlatego jej mniejsza wartość oznacza wyższą satysfakcję klienta, a więc każda funkcja f_i jest minimalizowana. Zatem ogólny problem lokalizacyjny może być sformułowany jako następujący wielokryterialny problem minimalizacji

$$\min \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ : \ \sum_{j=1}^{n} x_j = p, \quad x_j \in \{0, 1\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{4.3}$$

Funkcje f_i zależą zwykle od współczynników odległości d_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$) wyrażających odległość i–tego klienta od lokalizacji j. W standardowym problemie lokalizacyjnym (bez ograniczeń pojemnościowych) zakłada się, że wszystkie potencjalne obiekty wykonują ten sam rodzaj usługi i każdy klient jest obsługiwany przez obiekt najbliżej usytuowany. Zatem poszczególne funkcje oceny przyjmują następującą postać

$$f_i(\mathbf{x}) = \min_{j=1,\ldots,n} \{d_{ij} \ : \ x_j = 1\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.4}$$

Funkcje te można zapisać w jawnej postaci funkcji kawałkami liniowych jako

$$f_i(\mathbf{x}) = \min_{j=1,\ldots,n} (d_{ij} - dx_j + d) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.5}$$

gdzie d jest arbitralnie dużą liczbą (większą od wszystkich współczynników odległości d_{ij}). Problem (4.3) z funkcjami celu (4.4) lub (4.5) jest klasycznym, najczęściej analizowanym dyskretnym problemem lokalizacji. Jednakże w wielu problemach lokalizacyjnych zbiór dopuszczalny Q ma bardziej złożoną strukturę. Decyzje przydziału są zwykle modelowane przy użyciu dodatkowych zmiennych decyzyjnych x'_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ równych 1, gdy lokalizacja j–ta jest użyta do obsługi i–tego klienta, a 0 w przeciwnym przypadku. Zmienne przydziału muszą spełniać następujące ograniczenia

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = 1 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.6}$$

$$x'_{ij} \leq x_j \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

$$x'_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.8}$$

Przy jawnym użyciu zmiennych przydziału funkcje oceny f_i mogą być zapisane w postaci liniowej

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x'_{ij} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.9}$$

Problem (4.3) może być rozpatrywany jako wielokryterialny problem decyzyjny z ocenami jednorodnymi. Ponadto przy lokalizacji obiektów publicznych rozkład odległości wśród klientów jest czynnikiem istotnym i dlatego model preferencji powinien mieć własność anonimowości. Zauważmy, że w przypadku zbioru potencjalnych lokalizacji obiektów będącego podzbiorem lokalizacji klientów każde rozwiązanie dopuszczalne przypisuje oceny równe 0 funkcjom oceny odpowiadającym klientom w wybranych lokalizacjach i dodatnie oceny pozostałym funkcjom. Każde rozwiązanie dopuszczalne jest wtedy rozwiązaniem efektywnym problemu (4.3) i wyznacza najlepsze lokalizacje w sensie pewnej racjonalnej relacji preferencji. Dopiero dodanie wymagania anonimowości relacji preferencji powoduje, że jest brany pod uwagę rozkład odległości.

Przyjmując jako podstawę zbiór wszystkich anonimowo racjonalnych relacji preferencji, możemy zdefiniować odpowiednie pojęcia dominacji wektorów ocen i rozwiązań efektywnych, analogicznie jak dla racjonalnych relacji preferencji w podrozdziale 1.2.

Definicja 4.2 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje symetrycznie* $\mathbf{y}'' \in Y$ *lub* $\mathbf{y}''$ *jest symetrycznie dominowany przez* $\mathbf{y}'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}''$ *dla wszystkich anonimowo racjonalnych relacji preferencji.*

Definicja 4.3 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *jest symetrycznie indyferentny z* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}''$ *dla wszystkich anonimowo racjonalnych relacji preferencji.*

Definicja 4.4 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *słabo dominuje symetrycznie* $\mathbf{y}'' \in Y$ *lub* $\mathbf{y}''$ *jest słabo dominowany symetrycznie przez* $\mathbf{y}'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$ *dla wszystkich anonimowo racjonalnych relacji preferencji.*

Relacje symetrycznej dominacji $\prec_a$, indyferencji $\cong_a$ i słabej dominacji $\preceq_a$ spełniają warunki (1.1)–(1.2), czyli stanowią relację preferencji $\preceq_a$. Co więcej, spełnia ona warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4), ścisłej monotoniczności (1.5) i anonimowości (4.1), czyli jest anonimowo racjonalną relacją preferencji. Relacja dominacji $\preceq_a$ jest najogólniejszą anonimowo racjonalną relacją preferencji i każda anonimowo racjonalna relacja preferencji $\preceq$ jest z nią zgodna w tym sensie, że

$$\mathbf{y}' \preceq_a \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$$

Relacja symetrycznej dominacji może być wyrażona jako relacja nierówności dla wektorów ocen, których współrzędne są uporządkowane nierosnąco. Formalnie można to zapisać z użyciem przekształcenia $\Theta : R^m \to R^m$ porządkującego nierosnąco współrzędne wektorów ocen (por. podrozdział 1.3), czyli $\Theta(\mathbf{y}) = (\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y}), \ldots, \theta_m(\mathbf{y}))$, gdzie $\theta_1(\mathbf{y}) \geq \theta_2(\mathbf{y}) \geq \cdots \geq \theta_m(\mathbf{y})$ oraz istnieje permutacja τ zbioru I taka, że $\theta_i(\mathbf{y}) = y_{\tau(i)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zauważmy, że relacja

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'') \tag{4.10}$$

jest zwrotna, przechodnia i anonimowa. Ponadto prawdziwe są zależności

$$\Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'') \quad \text{i} \quad \Theta(\mathbf{y}'') \not\leqq \Theta(\mathbf{y}')\Big)$$
$$\Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'') \quad \text{i} \quad \Theta(\mathbf{y}'') \leqq \Theta(\mathbf{y}')\Big)$$

Zatem relacja (4.10) jest relacją preferencji z relacjami ścisłej preferencji i indyferencji określonymi odpowiednio jako

$$\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'') \tag{4.11}$$
$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'') \tag{4.12}$$

Ponadto dla dowolnego $i \in I$ prawdziwa zależność

$$\Theta(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq \Theta(\mathbf{y}) \quad \text{dla } \varepsilon > 0$$

czyli relacja (4.10), jest anonimowo racjonalną relacją preferencji.

Twierdzenie 4.1 *Dla dowolnych wektorów ocen* $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$

$$\mathbf{y}' \preceq_a \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'')$$

Dowód. Relacja (4.10) jest anonimowo racjonalną relacją preferencji. Zatem bezpośrednio z definicji symetrycznej dominacji wynika prawdziwość implikacji

$$\mathbf{y}' \preceq_a \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'')$$

Dla udowodnienia odwrotnej implikacji załóżmy, że $\Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'')$. Zauważmy, że dla każdej anonimowo racjonalnej relacji preferencji $\preceq$ prawdziwa jest zależność $\mathbf{y}' \cong \Theta(\mathbf{y}') \preceq \Theta(\mathbf{y}'') \cong \mathbf{y}''$. Stąd otrzymujemy $\mathbf{y}' \preceq_a \mathbf{y}''$. ∎

Wniosek 4.1 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje symetrycznie* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'')$.

Wniosek 4.2 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje symetrycznie* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją permutacje* τ' *i* τ'' *takie, że*

$$(y'_{\tau'(1)}, y'_{\tau'(2)}, \ldots, y'_{\tau'(m)}) \leq (y''_{\tau''(1)}, y''_{\tau''(2)}, \ldots, y''_{\tau''(m)})$$

Dowód. Dostateczność warunku wynika bezpośrednio z definicji symetrycznej dominacji. Natomiast jego konieczność wynika z wniosku 4.1. ■

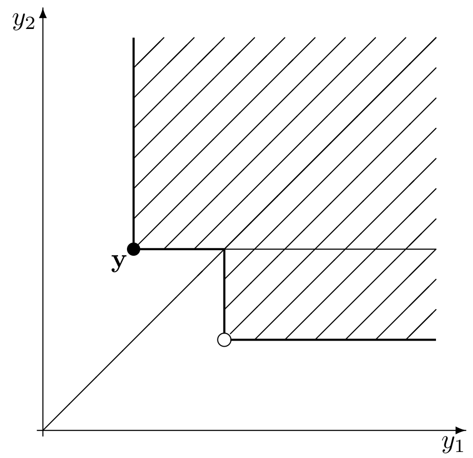
Wniosek 4.3 *Dla każdej anonimowo racjonalnej relacji preferencji* $\preceq$ *prawdziwe są zależności*

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'') \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \\ \Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'') \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \end{aligned}$$

Relacja dominacji $\prec_d$ może być ilustrowana za pomocą tzw. struktury dominacji (por. (1.10)), czyli przekształcenia przyporządkowującego wektorom ocen $\mathbf{y} \in Y$ zbiór dominowania

$$D(\mathbf{y}) = \{\mathbf{d} \in Y \ : \ \mathbf{y} \prec_d \mathbf{y} + \mathbf{d}\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

Z wniosku 4.2 wynika, że struktura dominacji symetrycznej zależy od położenia wektora $\mathbf{y}$ względem prostej równych ocen ($y_1 = y_2 = \cdots = y_m$). W ogólnym przypadku zbiór $D(\mathbf{y})$ nie jest stożkiem i nie jest zbiorem wypukłym. Rysunek 4.1 przedstawia $D(\mathbf{y})$ zaczepiony w $\mathbf{y}$, czyli zbiór $\mathbf{y} + D(\mathbf{y})$.



Rysunek 4.1:
Rys. 4.1. Struktura symetrycznej dominacji w R^2

Definicja 4.5 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *nazywamy symetrycznie niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje* $\mathbf{y} \in A$ *taki, że* $\mathbf{y}$ *dominuje symetrycznie* $\mathbf{y}^0$.

Bezpośrednio z definicji wektora symetrycznie niezdominowanego i wniosku 4.1 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.4 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem symetrycznie niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje anonimowo racjonalna relacja preferencji* $\preceq$ *taka, że dla żadnego* $\mathbf{y} \in A$ *nie zachodzi* $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$.

Wniosek 4.5 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem symetrycznie niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje* $\mathbf{y} \in A$ *taki, że* $\Theta(\mathbf{y}) \leq \Theta(\mathbf{y}^0)$.

Twierdzenie 4.2 *Wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$ *jest wektorem symetrycznie niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna, anonimowo racjonalna relacja preferencji* $\preceq$ *taka, że* $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ *dla wszystkich* $\mathbf{y} \in A$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnej spójnej, anonimowo racjonalnej relacji preferencji $\preceq$ prawdziwa jest zależność $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Zatem dla żadnego $\mathbf{y} \in A$ nie zachodzi $\mathbf{y} \preceq \mathbf{y}^0$. Tym samym, zgodnie z wnioskiem 4.4, wektor $\mathbf{y}^0$ jest symetrycznie niezdominowanym wektorem ocen.

Niech $\mathbf{y}^0 \in A$ będzie symetrycznie niezdominowanym wektorem ocen. Określmy relację

$$\begin{array}{lll}\mathbf{y}' \preceq_o \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) < \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}'') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) \\ & \text{lub} & \left(\max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}'') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) \right. \\ & & \left. \text{i} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} y'_i \leq \sum\limits_{i=1}^{m} y''_i \right)\end{array}$$

Dla tak określonej relacji $\mathbf{y}^0 \preceq_o \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Łatwo sprawdzić, że relacja $\preceq_o$ jest zwrotna, przechodnia, spójna i anonimowa. Ponadto odpowiednia relacja $\prec_o$ przyjmuje postać

$$\begin{array}{lll}\mathbf{y}' \prec_o \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) < \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}'') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) \\ & \text{lub} & \left(\max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} (\theta_i(\mathbf{y}'') - \theta_i(\mathbf{y}^0)) \right. \\ & & \left. \text{i} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} y'_i < \sum\limits_{i=1}^{m} y''_i \right)\end{array}$$

i spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5). Tym samym relacja $\preceq_o$ jest spójną, anonimowo racjonalną relacją preferencji, co kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie 4.3 *Jeżeli zbiór osiągalnych wektorów ocen* $A \neq \emptyset$ *jest domknięty i istnieje wektor* $\mathbf{y}^* \in Y$ *dominujący symetrycznie wszystkie osiągalne wektory ocen* $\mathbf{y} \in A$*, to istnieje symetrycznie niezdominowany wektor ocen* $\mathbf{y}^0 \in A$.

Dowód. Niech $\mathbf{y}' \in A$ będzie dowolnym osiągalnym wektorem ocen. Rozpatrzmy zbiór $A' = \{\mathbf{y} \in A \ : \ \sum_{i=1}^m y_i \leq \sum_{i=1}^m y'_i\}$. Zbiór A' jest zawarty w zbiorze

$$Y_0 = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ y_i \geq y^* \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^m y_i \leq \sum_{i=1}^m y'_i\}$$

gdzie $y^* = \min_{i=1,\ldots,m} y_i^*$. Zatem A' jest ograniczonym zbiorem domkniętym. Z tego wynika, że zadanie

$$\min \{\sum_{i=1}^m y_i \ : \ \mathbf{y} \in A'\}$$

ma rozwiązanie optymalne $\mathbf{y}^0 \in A'$. Co więcej, dla każdego $\mathbf{y} \in A$ prawdziwa jest nierówność $\sum_{i=1}^m y_i^0 \leq \sum_{i=1}^m y_i$, czyli $\mathbf{y}^0$ jest również rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\min \{\sum_{i=1}^m y_i \ : \ \mathbf{y} \in A\} \tag{4.13}$$

Zauważmy, że relacja preferencji definiowana przez minimalizację (4.13) wyraża się wzorem (4.2) i jest anonimowo racjonalną relacją preferencji. Zatem, zgodnie z wnioskiem 4.4, $\mathbf{y}^0$ jest symetrycznie niezdominowanym wektorem ocen. ∎

Definicja 4.6 *Rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} \in Q$ nazywamy symetrycznie efektywnym rozwiązaniem wielokryterialnego problemu (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest symetrycznie niezdominowany.*

Z wniosków 4.4 i 4.5 i twierdzenia 4.2 wynikają następujące charakterystyki rozwiązań symetrycznie efektywnych.

Wniosek 4.6 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje anonimowo racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Wniosek 4.7 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna, anonimowo racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$.*

Wniosek 4.8 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.*

Wniosek 4.9 *Dla dowolnej permutacji τ zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania*

$$\min \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Wniosek 4.10 *Dla dowolnej ściśle rosnącej funkcji $s : R \to R$ wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania*

$$\min \{(s(f_1(\mathbf{x})), s(f_2(\mathbf{x})), \ldots, s(f_m(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Zauważmy, że zgodnie z wnioskami 4.9 i 4.10, symetryczna efektywność rozwiązania nie zależy od kolejności funkcji oceny i od ściśle monotonicznej zmiany skal indywidualnych ocen. W odróżnieniu od wniosku 1.9, dotyczącego rozwiązań efektywnych, we wniosku 4.10 wszystkie funkcje oceny są skalowane za pomocą tej samej ściśle rosnącej funkcji s.

Symetryczna efektywność jest silniejsza od standardowej efektywności, a zbiór rozwiązań symetrycznie efektywnych jest podzbiorem standardowego zbioru rozwiązań efektywnych. Dowodzi tego następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4 *Każde rozwiązanie symetrycznie efektywne jest rozwiązaniem efektywnym.*

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0$ będzie rozwiązaniem symetrycznie efektywnym. Na mocy twierdzenia 4.4 istnieje anonimowo racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Anonimowo racjonalna relacja preferencji jest w szczególności racjonalną relacją preferencji. Zatem, na mocy wniosku 1.3, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym. ∎

Stanowiące główny przedmiot naszych rozważań zadania WPL i WPLD mają domknięte zbiory rozwiązań dopuszczalnych Q i liniowe funkcje oceny f_i. Zatem domknięte są odpowiednie zbiory ocen osiągalnych A. Co więcej, w przypadku regularnego zadania WPL lub WPLD, zbiór Q jest niepusty oraz istnieją rozwiązania optymalne $\bar{\mathbf{x}}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jednokryterialnych zadań (1.9). Stąd $A \neq \emptyset$ i wszystkie osiągalne wektory ocen $\mathbf{y} \in A$ są symetrycznie dominowane przez wektor $\mathbf{y}^*$, gdzie $y_i^* = f_i(\bar{\mathbf{x}}^i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Z twierdzenia 4.3 wynika więc następujący wniosek.

Wniosek 4.11 *Regularne zadania WPL i WPLD mają rozwiązania symetrycznie efektywne.*

Przykład 4.1. Dla zilustrowania koncepcji symetrycznej dominacji i symetrycznej efektywności rozpatrzmy problem lokalizacji dwóch obiektów do obsługi dziesięciu klientów. Dla ułatwienia analizy problemu przyjmujemy lokalizacje poszczególnych klientów U1, U2,. . .,U10 jako punkty na osi X o współrzędnych: 0, 4, 5, 6, 8, 17, 18, 19, 20 i 28, z których każdy może być potencjalną lokalizacją obiektu. Zakładamy, że każdy obiekt ma nieograniczoną pojemność i każdy klient jest obsługiwany przez najbliższy obiekt. Zatem problem przyjmuje postać (4.3)–(4.4) z $m = n = 10$ i $p = 2$.

Tablica 4.1 zawiera cztery różne rozwiązania problemu lokalizacji. Pierwsze z nich odpowiada podejściu leksykograficznego minimaksimum (1.38) i polega na umieszczeniu obiektów w punktach U2 i U9. W drugim wierszu tablicy 4.1 znajduje

Tablica 4.1

Rozwiązania zadania lokalizacji dla przykładu 4.1

Tablica 4.1:

Rozw.		Wektor ocen										Uporządkowany wektor ocen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U2	U9	4	0	1	2	4	3	2	1	0	8	8	4	4	3	2	2	1	1	0	0
U1	U9	0	4	5	6	8	3	2	1	0	8	8	8	6	5	4	3	2	1	0	0
U3	U8	5	1	0	1	3	2	1	0	1	9	9	5	3	2	1	1	1	1	0	0
U1	U10	0	4	5	6	8	11	10	9	8	0	11	10	9	8	8	6	5	4	0	0

się inne rozwiązanie minimaksowe. W tym rozwiązaniu obiekty są umieszczone w punktach U1 i U9. Następne wiersze zawierają rozwiązanie minimalizujące sumę ocen (1.18) oraz rozwiązanie minimalizujące współczynnik Giniego, który jest najbardziej popularną miarą rozbieżności ocen stosowaną w ekonomii (Sen, 1973). Problemami minimalizacji rozbieżności ocen zajmiemy się dokładniej w następnym podrozdziale. W pierwszym z tych rozwiązań obiekty są umieszczone w punktach U3 i U8, a w drugim w punktach U1 i U10.

Zauważmy, że żadne spośród czterech rozwiązań (wektorów ocen) występujących w tablicy 4.1 nie jest dominowane przez inne. Wszystkie są rozwiązaniami efektywnymi, ponieważ ze specyfiki problemu wynika, że każde rozwiązanie dopuszczalne jest rozwiązaniem efektywnym. Natomiast uporządkowany wektor ocen drugiego rozwiązania jest dominowany przez uporządkowany wektor ocen pierwszego rozwiązania, a uporządkowany wektor ocen czwartego rozwiązania jest dominowany przez trzy pozostałe. Zatem, zarówno rozwiązanie drugie, jak i czwarte nie są symetrycznie efektywne. □

4.1.2 Techniki generacji

Rozwiązania efektywne zadania wielokryterialnego można wyznaczać rozwiązując skalaryzacje zadania wielokryterialnego (1.13) z funkcją skalaryzującą $s : R^m \to R$ definiującą relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek ścisłej monotoniczności (por. twierdzenie 1.6). Jeżeli relacja $\preceq_s$ spełnia ponadto warunek anonimowości (4.1), to generowane przez tę skalaryzację rozwiązanie efektywne jest również symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego. Dotyczy to w szczególności skalaryzacji (1.18), polegającej na minimalizacji sumy wszystkich funkcji oceny $f_i(\mathbf{x})$, i regularyzowanego zadania minimaksowego (1.36).

Twierdzenie 4.5 *Rozwiązanie optymalne zadania (1.18), czyli zadania postaci*

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in Q\}$$

jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0 \in Q$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (1.18). Relacja preferencji definiowana przez zadanie (1.18) wyraża się wzorem (4.2) i jest anonimowo racjonalną relacją preferencji. Zatem, zgodnie z wnioskiem 4.4, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ jest symetrycznie niezdominowanym wektorem ocen i, co za tym idzie, wektor $\mathbf{x}^0$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Twierdzenie 4.6 *Rozwiązanie optymalne leksykograficznego zadania (1.36), czyli zadania postaci*

$$\operatorname{lexmin} \{(\max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0 \in Q$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (1.36). Relacja preferencji definiowana przez zadanie (1.36) wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad & \max_{i=1,\ldots,m} y'_i < \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{lub} \\ & \left(\max_{i=1,\ldots,m} y'_i = \max_{i=1,\ldots,m} y''_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i \leq \sum_{i=1}^{m} y''_i \right) \end{aligned}$$

i jest anonimowo racjonalną relacją preferencji. Zatem, zgodnie z wnioskiem 4.4, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ jest symetrycznie niezdominowanym wektorem ocen i, co za tym idzie, wektor $\mathbf{x}^0$ jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania (1.7). ■

Skalaryzacja (1.18) może być wykorzystywana do wyznaczania różnych rozwiązań efektywnych przez używanie różnych współczynników wagowych dla poszczególnych funkcji oceny (por. wniosek 1.15). Stosowanie różnych wag dla poszczególnych funkcji oceny narusza jednak warunek anonimowości relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację. Dlatego metoda ważenia ocen nie może być zastosowana przy poszukiwaniu rozwiązań symetrycznie efektywnych.

Zauważmy, że wniosek 4.8 może być wyrażony w terminach zadania z wektorową funkcją uporządkowanych ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (\theta_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \theta_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})))$, gdzie $\theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, jak poprzednio, oznacza i–tą składową wektora wyniku operacji porządkowania $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$

$$\min \{\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.14}$$

Wniosek 4.12 *Rozwiązanie dopuszczalne* $\mathbf{x} \in Q$ *jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (4.14).*

Stosując optymalizację leksykograficzną (1.32) do zadania (4.14) otrzymujemy leksykograficzny minimaksowy problem (1.38), czyli zadanie postaci

$$\operatorname{lexmin} \{(\theta_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \theta_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \theta_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

Na mocy twierdzenia 1.15 i wniosku 4.12 prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 4.13 *Rozwiązanie optymalne leksykograficznego zadania minimaksowego (1.38) jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Stosując metodę wag (1.19) do zadania (4.14) można generować różne rozwiązania efektywne problemu (4.14) i, co za tym idzie, różne symetrycznie efektywne rozwiązania oryginalnego zadania wielokryterialnego (1.7). Podejście takie odpowiada przypisaniu wag do współczynników uporządkowanych wektorów ocen. Taką technikę zaproponował Yager (1988) w tak zwanej *agregacji OWA* (Ordered Weighted Averaging). Stosując operator agregacji OWA do wielokryterialnego problemu (1.7) otrzymujemy problem jednokryterialny

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.15}$$

Na mocy wniosków 4.12 i 1.15 prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 4.14 *Dla dowolnych dodatnich wag w_i każde rozwiązanie optymalne problemu (4.15) jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem problemu wielokryterialnego (1.7).*

Niestety technika agregacji OWA (4.15) nie stanowi zupełnej parametryzacji całego zbioru rozwiązań symetrycznie efektywnych. Wynika to ze specyfiki techniki ważenia ocen w problemach wielokryterialnych (por. przykład 1.2). W przypadku wielokryterialnych problemów dyskretnych (jak problem lokalizacji (4.3)–(4.4)) istnieją rozwiązania symetrycznie efektywne, które nie mogą być wygenerowane jako rozwiązania optymalne problemu (4.15) dla żadnego zbioru dodatnich wag. Pokażemy to na małym przykładzie.

Przykład 4.2. Rozpatrzmy problem umiejscowienia pojedynczego obiektu w jednej z trzech potencjalnych lokalizacji (P1, P2 i P3) do obsługi dwóch klientów (C1 i C2). Odległości pomiędzy poszczególnymi klientami i potencjalnymi lokalizacjami są następujące: $d_{11} = 15$, $d_{12} = 14$, $d_{13} = 12$, $d_{21} = 10$, $d_{22} = 11$, $d_{23} = 12$.

Zauważmy, że wszystkie trzy rozwiązania dopuszczalne są efektywne w standardowym i symetrycznym sensie. Łatwo sprawdzić, że stosując agregację OWA nie można wybrać lokalizacji P2 dla żadnego zbioru dodatnich wag. Jeżeli $3w_1 < 2w_2$, to lokalizacja P1 jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). Jeżeli $3w_1 > 2w_2$, to lokalizacja P3 jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). W końcu, gdy $3w_1 = 2w_2$, wtedy obie lokalizacje P1 i P3 są optymalne. Lokalizacja P2 nigdy nie jest rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). □

Zupełną parametryzację zbioru rozwiązań symetrycznie efektywnych można otrzymać stosując metody punktu referencyjnego do zadania (4.14). Stosując parametryzację (3.4) do zadania (4.14) otrzymujemy

$$\operatorname{lexmin} \{(\max_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) : \mathbf{x} \in Q\}, \ \mathbf{a} \in Y \tag{4.16}$$

Bezpośrednio z wniosków 4.12, 3.1 i twierdzenia 3.2 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.15 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i rozwiązanie optymalne zadania (4.16) jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.16 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji* $\mathbf{a} \in Y$ *funkcje* $s_i(a_i, y_i)$ *są ściśle rosnące względem* y_i *i spełniają warunek (3.6), to każde symetrycznie efektywne rozwiązanie* $\mathbf{x}^0$ *wielokryterialnego zadania (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.16) dla wektora aspiracji* $\mathbf{a}^0 = \Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.

Wniosek 4.17 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji* $\mathbf{a} \in Y$ *funkcje* $s_i(a_i, y_i)$ *są ściśle rosnące względem* y_i *i spełniają warunek (3.6), to dla dowolnego symetrycznie efektywnego rozwiązania* $\mathbf{x}^0$ *zadania wielokryterialnego (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji* $\mathbf{a}^0 \in Y$ *taki, że* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.16).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne wektora aspiracji $\mathbf{a}$ użytego w parametryzacji (4.16) odpowiadają współrzędnym uporządkowanego wektora ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. W szczególności, dla wyznaczenia symetrycznie efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ za pomocą parametryzacji (4.16) jako wektor aspiracji należy przyjąć $\mathbf{a}^0 = \Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Tym samym można ograniczyć się do używania tylko uporządkowanych wektorów aspiracji ($\mathbf{a} = \Theta(\mathbf{a})$, czyli $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$). Jest to równoważne zastąpieniu parametryzacji (4.16) przez następującą

$$\operatorname{lexmin} \{ (\max_{i=1,\ldots,m} s_i(\theta_i(\mathbf{a}), \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{i=1}^{m} s_i(\theta_i(\mathbf{a}), \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) : \mathbf{x} \in Q \} \tag{4.17}$$

Relacja preferencji parametryzacji (4.17) spełnia następujący odpowiednik warunku (3.1)

$$(\Theta(\mathbf{y}) \not\leq \Theta(\mathbf{a}) \quad \text{i} \quad \Theta(\mathbf{y}) \neq \Theta(\mathbf{a})) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y} \tag{4.18}$$

Oznacza to, że każdy wektor $\mathbf{y}^a$ taki, że $\Theta(\mathbf{y}^a) = \Theta(\mathbf{a})$ jest preferowany w stosunku do dowolnego wektora ocen $\mathbf{y} \in Y$, który nie dominuje symetrycznie $\mathbf{y}^a$ i nie stanowi permutacji wektora $\mathbf{y}^a$, czyli

$$\mathbf{y} \not\succeq_a \mathbf{y}^a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.19}$$

Twierdzenie 4.7 *Dla dowolnego wektora aspiracji* $\mathbf{a} \in Y$, *jeżeli funkcje* $s_i(a_i, y_i)$ *są ściśle rosnące względem* y_i *i spełniają warunek (3.6), to relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną minimalizację (4.17) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna i anonimowa oraz spełnia warunek (4.18).*

Dowód. Zwrotność i przechodniość relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.17) jest oczywista. Anonimowość relacji wynika z użycia operatora porzadku Θ.

Dla wykazania ścisłej monotoniczności zauważmy, że relacja (4.10) jest anonimowo racjonalną relacją preferencji, czyli dla dowolnego $i \in I$ prawdziwa jest zależność

$$\Theta(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq \Theta(\mathbf{y}) \quad \text{dla } \varepsilon > 0$$

Stąd, na mocy wniosków 1.21 i 1.2, otrzymujemy ścisłą monotoniczność relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.17).

Na mocy twierdzenia 1.11 prawdziwa jest implikacja $\Theta(\mathbf{y}) \not\geqq \Theta(\mathbf{a}) \Rightarrow \Theta(\mathbf{a}) \prec \mathbf{y}$. Stąd po uwzględnieniu, że $\Theta(\mathbf{a}) \cong \mathbf{a}$, otrzymujemy implikację (4.18). ■

Występujący w definicji parametryzacji (4.17) operator porządku Θ powoduje, że ten problem jest bardzo trudny do implementacji. Dla najprostszych funkcji s_i postaci

$$s_i(a_i, y_i) = y_i - a_i \tag{4.20}$$

możliwe jest zastąpienie operatora porządku zadaniem przydziału. Zauważmy, że dla dowolnych wektorów $\mathbf{y} \in Y$ i $\mathbf{a} \in Y$ oraz dowolnej permutacji τ zbioru indeksów I prawdziwe są następujące zależności

$$\max_{i=1,\dots,m} \{\theta_i(\mathbf{y}) - a_{\tau(i)}\} \geq \max_{i=1,\dots,m} \{\theta_i(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{a})\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\theta_i(\mathbf{y}) - a_{\tau(i)}) = \sum_{i=1}^{m} (\theta_i(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{a}))$$

Tym samym zadanie (4.17) z funkcjami s_i postaci (4.20) może być zapisane w postaci

$$\begin{aligned}
&\text{lexmin } (\max_{i=1,\dots,m} z_i, \sum_{i=1}^{m} z_i) \\
&\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \\
&z_i = f_i(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{m} a_l u_{il}, \quad \sum_{l=1}^{m} u_{il} = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \\
&\sum_{i=1}^{m} u_{il} = 1 \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, m \\
&u_{il} \in \{0, 1\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m; \ l = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

Techniki tej nie można jednak rozszerzyć na ogólne funkcje s_i postaci (3.5) lub (3.7) z różnymi czynnikami skalującymi λ_i.

4.1.3 Podejście dystrybucyjne

Stosując uporządkowane wektory aspiracji w parametryzacji (4.17), określamy w pewnym sensie preferowany rozkład ocen. Dla wielokryterialnych problemów dyskretnych ze skończonymi zbiorami wartości ocen możemy zajmować się bezpośrednio dystrybucją ocen. Niech $V = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ $(v_0 > v_1 > \dots > v_r)$ oznacza zbiór wszystkich możliwych różnych wartości funkcji oceny f_i dla $\mathbf{x} \in Q$, czyli $A \subset V^m \subset Y$. Możemy wprowadzić funkcje całkowite $h_k(\mathbf{y})$ $(k = 0, 1, \dots, r)$ wyrażające liczbę wartości v_k występujących w wektorze ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Analitycznie funkcje h_k można wprowadzić do modelu poprzez przypisanie im dodatkowych zmiennych (binarnych) u_{ik} według wzorów

$$h_k(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} u_{ik} \qquad \text{dla } k = 0, 1, \dots, r \tag{4.21}$$

$$y_i = \sum_{k=0}^{r} v_k u_{ik} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \tag{4.22}$$

$$\sum_{k=0}^{r} u_{ik} = 1 \qquad \text{dla } i = 1,2,\dots,m \tag{4.23}$$

$$u_{ik} \in \{0,1\} \qquad \text{dla } i = 1,2,\dots,m \quad \text{i} \quad k = 0,1,\dots,r \tag{4.24}$$

Zauważmy, że $\sum_{k=0}^{r} h_k(\mathbf{y}) = m$. Zatem jedna z funkcji, przyjmijmy h_r, może być pominięta i r–wymiarowa funkcja wektorowa $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = (h_0(\mathbf{y}), h_1(\mathbf{y}), \dots, h_{r-1}(\mathbf{y}))$ jednoznacznie opisuje rozkład wartości współrzędnych wektora ocen $\mathbf{y}$

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}') = \mathbf{h}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'')$$

W wielu problemach dyskretnych wartości funkcji $h_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ są dostępne bezpośrednio, bez użycia dodatkowych zmiennych u_{ik}. Dotyczy to w szczególności problemów lokalizacyjnych z jawnymi zmiennymi przydziału (4.6)–(4.8). Podzielmy zbiór wszystkich indeksów (i,j) $i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$ na klasy C_k $(k = 0,1,\dots,r)$ zdefiniowane równymi współczynnikami odległości d_{ij}. Niech $d(C_k)$ $(k = 0,1,\dots,r)$ oznacza wartość współczynnika odległości dla klasy C_k i $d(C_0) > d(C_1) > \dots > d(C_r)$. Prawdziwa jest wtedy zależność

$$h_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{(i,j)\in C_k} x'_{ij} \quad \text{dla } k = 0,1,\dots,r \tag{4.25}$$

czyli $h_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ jest liniową funkcją zmiennych przydziału x'_{ij} występujących w zadaniu lokalizacyjnym (4.6)–(4.8).

Mając zdefiniowaną wektorową funkcję rozkładu $\mathbf{h}$ możemy zastosować do niej liniowy operator kumulacji $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$, gdzie dla $\mathbf{q} \in R^r$

$$\gamma_k(\mathbf{q}) = \sum_{l=0}^{k-1} q_l \quad \text{dla } k = 1,2,\dots,r \tag{4.26}$$

W ten sposób otrzymujemy funkcję wektorową $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{h}(\mathbf{y}))$, której poszczególne współrzędne stanowią skumulowane funkcje rozkładu

$$\bar{h}_k(\mathbf{y}) = \sum_{l=0}^{k-1} h_l(\mathbf{y}) \quad \text{dla } k = 1,2,\dots,r \tag{4.27}$$

To znaczy, że funkcja $\bar{h}_k(\mathbf{y})$ wyraża liczbę ocen większych od v_k. Funkcja wektorowa $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = (\bar{h}_1(\mathbf{y}), \bar{h}_2(\mathbf{y}), \dots, \bar{h}_r(\mathbf{y}))$ opisuje jednoznacznie rozkład wartości współrzędnych wektora ocen $\mathbf{y}$, czyli

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'')$$

Zatem $\bar{\mathbf{h}}$ jest różnowartościowym przekształceniem zbioru

$$R^m_{\geq} = \{\mathbf{y} \in R^m \ : \ y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m\} \tag{4.28}$$

w zbiór

$$Z^r_{\leq m} = \{\mathbf{q} \in Z^r \ : \ 0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_r \leq m\} \tag{4.29}$$

Rozpatrzmy problem wielokryterialny

$$\min \ \{(\bar{h}_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \bar{h}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \dots, \bar{h}_r(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.30}$$

Okazuje się, że symetryczna dominacja wektorów ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla zadania wielokryterialnego (1.7) jest równoważna standardowej dominacji wektorów ocen $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = (\bar{h}_1(\mathbf{y}), \bar{h}_2(\mathbf{y}), \dots, \bar{h}_r(\mathbf{y}))$ dla wielokryterialnego zadania (4.30).

Twierdzenie 4.8 *Dla dowolnych wektorów ocen* $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in V^m$

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'')$$

Dowód. Niech $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$, czyli $\bar{h}_k(\mathbf{y}') \leq \bar{h}_k(\mathbf{y}'')$ dla $k = 1, 2, \ldots, r$, gdzie dla co najmniej jednego indeksu k_0 spełniona jest nierówność ostra ($\bar{h}_{k_0}(\mathbf{y}') < \bar{h}_{k_0}(\mathbf{y}'')$). Wtedy oczywiście $\Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'')$.

Załóżmy, że $\Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'')$. Zauważmy, że dla dowolnego $\mathbf{y} \in V^m$, $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{h}}(\Theta(\mathbf{y}))$. Dalej zauważmy, że $\bar{h}_k(\mathbf{y}') = \bar{h}_k(\mathbf{y}'') = 0$, jeżeli $v_k \geq \theta_1(\mathbf{y}')$ i $v_k \geq \theta_1(\mathbf{y}'')$ oraz $\bar{h}_k(\mathbf{y}') = \bar{h}_k(\mathbf{y}'') = m$, jeśli $v_k < \theta_m(\mathbf{y}')$ i $v_k < \theta_1(\mathbf{y}'')$. Co więcej, dla dowolnego $i \in I$, z tego że $\theta_i(\mathbf{y}') = v_{k'} \leq \theta_i(\mathbf{y}'') = v_{k''}$ wynika, że $\bar{h}_k(\mathbf{y}') \leq \bar{h}_k(\mathbf{y}'')$ dla $k' \leq k \leq k''$. Zatem $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. ■

Wniosek 4.18 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in V^m$ *symetrycznie dominuje* $\mathbf{y}'' \in V^m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$.

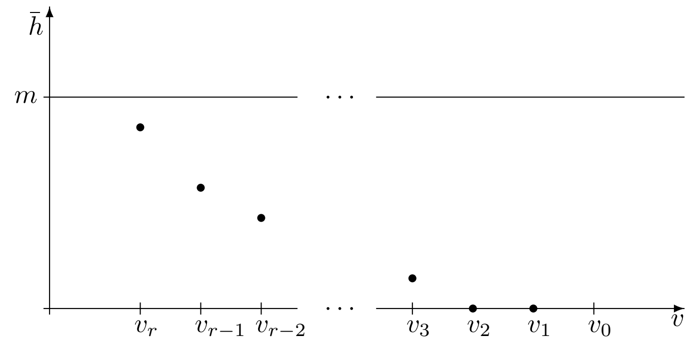
Wniosek 4.19 *Jeżeli* $A \subset V^m$, *to rozwiązanie dopuszczalne* $\mathbf{x} \in Q$ *jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem problemu wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (4.30).*

Zadanie (4.30) w ogólnym przypadku może mieć bardzo dużą liczbę funkcji oceny. Liczba tych funkcji zależy od liczby różnych wartości ocen v_k. Tym samym problem liczby funkcji oceny w zadaniu (4.30) wiąże się z dokładnością rozróżniania wartości ocen. Na przykład, w zadaniach lokalizacyjnych jest to problem przyjętej dokładności rozróżniania odległości. W wielu przypadkach przy poszukiwaniu zadowalającej dystrybucji ocen wyróżnia się jedynie niewielką liczbę klas wartości ocen typu: bardzo dobre, dobre itd. Odpowiada to rozmytemu podejściu do interpretacji ocen. Ponadto wektory ocen problemu (4.30) mają bardzo przejrzystą interpretację graficzną na płaszczyźnie, gdzie na osi odciętych odkładamy wartości v_k, a na osi rzędnych wartości $\bar{h}_k(\mathbf{y})$ (por. rys. 4.2). Punkty $(v_k, \bar{h}_k(\mathbf{y}))$ dla kolejnych $k = 1, 2, \ldots, r$ mogą być ze sobą połączone odcinkami tworząc łamaną monotoniczną (nierosnącą). Każdy wektor ocen jest wtedy reprezentowany przez wykres łamanej monotonicznej, a nierówność $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$ oznacza, że żaden punkt łamanej odpowiadającej $\mathbf{y}'$ nie znajduje się powyżej łamanej odpowiadającej $\mathbf{y}''$, a co najmniej jeden punkt znajduje się poniżej. Istnieje również możliwość zdefiniowania wartości $\bar{h}_v(\mathbf{y})$ dla dowolnego $v \in R$ jako liczby ocen y_i większych od v, czyli

$$\bar{h}_v(\mathbf{y}) = m \quad \text{dla } v < v_r, \qquad \bar{h}_v(\mathbf{y}) = \bar{h}_k(\mathbf{y}) \quad \text{dla } v_k \leq v < v_{k-1},$$
$$\bar{h}_v(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla } v \geq v_0 \tag{4.31}$$

Schodkowy wykres $(v, \bar{h}_v(\mathbf{y}))$ odpowiada wtedy wykresowi "odwróconej" dystrybuanty rozkładu wartości y_i. W modelach probabilistycznych dominacja wektorów $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ jest nazywana *dominacją stochastyczną* pierwszego rzędu (Levy, 1992).

Zauważmy, że $\sum_{k=1}^{r} (v_{k-1} - v_k)\bar{h}_k(\mathbf{y}) + mv_r = \sum_{i=1}^{m} y_i$. Zatem, stosując do zadania (4.30) technikę ważenia ocen (1.19) z wagami określonymi jako $w_k = v_{k-1} - v_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, r$, otrzymujemy symetrycznie efektywne rozwiązanie równoważne minimalizacji sumy oryginalnych funkcji oceny (1.18).



Rysunek 4.2:
Rys. 4.2. Wykres dystrybucyjny $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$

Stosując optymalizację leksykograficzną (1.32) do zadania (4.30) otrzymujemy problem leksykograficzny postaci

$$\operatorname{lexmin}\ \{(\bar{h}_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \bar{h}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \bar{h}_r(\mathbf{f}(\mathbf{x})))\ :\ \mathbf{x} \in Q\}$$

Na mocy definicji optymalizacji leksykograficznej problem ten jest równoważny zadaniu leksykograficznemu

$$\operatorname{lexmin}\ \{(h_0(\mathbf{f}(\mathbf{x})), h_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, h_{r-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.32}$$

Problem (4.32) może być wykorzystany do konstrukcji efektywnego algorytmu wyznaczania minimaksimum leksykograficznego (1.38). Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.9 *Jeżeli $A \subset V^m$, to wektor $\mathbf{x} \in Q$ jest rozwiązaniem optymalnym leksykograficznego minimaksowego problemu (1.38) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rozwiązaniem optymalnym leksykograficznego minimaksowego problemu (4.32).*

Dowód. Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (4.32) pokrywa się ze zbiorem rozwiązań optymalnych problemu leksykograficznego

$$\operatorname{lexmin}\ \{(\bar{v}_0 h_0(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \bar{v}_1 h_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \bar{v}_{r-1} h_{r-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.33}$$

gdzie $\bar{v}_k = v_k - v_r$ dla $k = 0, 1, \ldots, r-1$.

Funkcje h_k można wyrażić za pomocą wzorów (4.21)–(4.24). Niech $\mathbf{u}_k = (u_{ik})_{i=1,2,\ldots,m}$. Zauważmy, że dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}'_k$ i $\mathbf{u}''_k$ spełniających warunki (4.23)–(4.24) prawdziwe są zależności

$$\bar{v}_k \sum_{i=1}^{m} u'_{ik} < \bar{v}_k \sum_{i=1}^{m} u''_{ik} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\bar{v}_k \mathbf{u}'_k) <_{lex} \Theta(\bar{v}_k \mathbf{u}''_k)$$

$$\bar{v}_k \sum_{i=1}^{m} u'_{ik} = \bar{v}_k \sum_{i=1}^{m} u''_{ik} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\bar{v}_k \mathbf{u}'_k) = \Theta(\bar{v}_k \mathbf{u}''_k)$$

Co więcej, ponieważ $\bar{v}_{k-1} \geq \bar{v}_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, r-1$, to prawdziwe są zależności

$$\left(\bar v_0 \sum_{i=1}^m u'_{i0}, \ldots, \bar v_{r-1} \sum_{i=1}^m u'_{i,r-1}\right) <_{lex} \left(\bar v_0 \sum_{i=1}^m u''_{i0}, \ldots, \bar v_{r-1} \sum_{i=1}^m u''_{i,r-1}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta(\sum_{k=0}^{r-1} \bar v_k \mathbf{u}'_k) <_{lex} \Theta(\sum_{k=0}^{r-1} \bar v_k \mathbf{u}''_k)$$

$$\left(\bar v_0 \sum_{i=1}^m u'_{i0}, \ldots, \bar v_{r-1} \sum_{i=1}^m u'_{i,r-1}\right) = \left(\bar v_0 \sum_{i=1}^m u''_{i0}, \ldots, \bar v_{r-1} \sum_{i=1}^m u''_{i,r-1}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta(\sum_{k=0}^{r-1} \bar v_k \mathbf{u}'_k) = \Theta(\sum_{k=0}^{r-1} \bar v_k \mathbf{u}''_k)$$

Dalej zauważmy, że zgodnie ze wzorami (4.22)–(4.24)

$$\sum_{k=0}^{r-1} \bar v_k u_{ik} = f_i(\mathbf{x}) - v_r \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Zatem wektor $\mathbf{x} \in Q$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznego (4.32) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznego

$$\text{lexmin } \{(\theta_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - v_r, \theta_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - v_r, \ldots, \theta_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - v_r) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

które ma dokładnie taki sam zbiór rozwiązań optymalnych jak standardowe zadanie minimaksimum leksykograficznego (1.38). ■

Przykład 4.3. Dla ilustracji, że problem leksykograficzny (4.32) pomimo dużej liczby funkcji oceny h_k może być znacznie łatwiejszy do rozwiązania niż oryginalny problem minimaksimum leksykograficznego (1.38), przedstawimy wyniki eksperymentów obliczeniowych na losowo generowanych problemach lokalizacyjnych. Rozważamy problemy lokalizacji jednego obiektu wśród zadanego zbioru punktów ($p = 1$, $m = n$). W eksperymentach generowano losowo (rozkład jednostajny) n punktów o całkowitych współrzędnych od 0 do 100. Dla określenia odległości między punktami najpierw zostały obliczone odległości euklidesowe (norma l_2), a następnie zaokrąglone do przyjętego kroku (dokładności) odległości. Eksperymenty zostały przeprowadzone dla liczby punktów $n = 30$, 50 i 100 oraz dla kroku odległości 1 i 10. W ramach każdego eksperymentu wygenerowano losowo 50 problemów.

W rozważanych problemach wszystkie rozwiązania dopuszczalne są znane explicite i dla każdego z nich można łatwo wyznaczyć wektory $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ i $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Tablica 4.2 pokazuje, ile współrzędnych wektorów $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ i odpowiednio $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ trzeba zbadać dla wyznaczenia minimaksimum leksykograficznego. W tablicy podajemy zarówno wyniki średnie, jak i najgorsze z 50 wygenerowanych problemów. Widać, że w przypadku większej liczby równych odległości (krok odległości 10) może być konieczne badanie znacznej liczby współrzędnych uporządkowanego wektora ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Natomiast przy badaniu wektora $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ zawsze wystarcza zbadanie niewielkiej liczby pierwszych współrzędnych tego wektora, niezależnie od liczności klas równych odległości. □

Tablica 4.2

Identyfikacja leksykograficznego rozwiązania minimaksowego

Tablica 4.2:

Liczba pozycji do zbadania		Krok odległości 10			Krok odległości 1		
		$n=30$	$n=50$	$n=100$	$n=30$	$n=50$	$n=100$
w $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$	średnio	3.54	3.70	5.82	1.16	1.16	1.40
	najwięcej	22	25	32	3	5	3
w $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$	średnio	2.04	1.80	2.02	1.16	1.16	1.38
	najwięcej	5	3	3	3	5	3

Zupełną parametryzację zbioru rozwiązań symetrycznie efektywnych można otrzymać stosując metody punktu referencyjnego do zadania (4.30). Stosując parametryzację (3.4) do zadania (4.30) otrzymujemy

$$\text{lexmin}\ \{(\max_{k=1,\ldots,r} s_k(q_k^a, \bar{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{k=1}^{r} s_k(q_k^a, \bar{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.34}$$

gdzie $s_k : R^2 \to R$ i $\mathbf{q}^a \in R^r$. Bezpośrednio z wniosków 4.19, 3.1 i twierdzenia 3.2 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.20 *Jeżeli $A \subset V^m$ i funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k, to rozwiązanie optymalne zadania (4.34) jest symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.21 *Jeżeli $A \subset V^m$ oraz dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{q}^a \in Z^r$ funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek*

$$s_1(q_1^a, q_1^a) = s_2(q_2^a, q_2^a) = \cdots = s_r(q_r^a, q_r^a) \tag{4.35}$$

to każde symetrycznie efektywne rozwiązanie $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.34) dla wektora aspiracji $\mathbf{q}^a = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.

Wniosek 4.22 *Jeżeli $A \subset V^m$ oraz dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{q}^a \in Z^r$ funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek (4.35), to dla dowolnego symetrycznie efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji $\bar{\mathbf{q}}^a \in Z^r$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.34).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne wektora aspiracji $\mathbf{q}^a$ użytego w parametryzacji (4.34) odpowiadają współrzędnym wektora $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. W szczególności, dla wyznaczenia symetrycznie efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ za pomocą parametryzacji (4.34) jako wektor aspiracji powinno być przyjęte $\mathbf{q}^a = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Tym samym w czasie analizy interaktywnej można używać jedynie wektorów aspiracji reprezentujących pewne skumulowane dystrybucje, czyli wektorów $\mathbf{q}^a \in Z^r_{\leq m}$ (tzn. $0 \leq q_1^a \leq q_2^a \leq \cdots \leq q_r^a \leq m$). Oznacza to, że w przypadku dużego r decydent nie musi zajmować się wszystkimi współczynnikami q_k^a. Wektor $\mathbf{q}^a$ może być określony przez kilka współrzędnych q_k^a i automatyczną interpolację wartości pozostałych współrzędnych. Podejście takie prowadzi do interaktywnej metody referencyjnej dystrybucji jako uogólnienia metody punktu referencyjnego dla zadań z ocenami jednorodnymi. Przedstawiona na rysunku 4.2 graficzna reprezentacja wektorów ocen $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ w postaci wykresów skumulowanych dystrybucji dostarcza przejrzystego interfejsu graficznego do prowadzenia analizy interaktywnej w ramach odpowiedniego systemu wspomagania decyzji.

W przypadku stosowania wektorów aspiracji $\mathbf{q}^a \in Z^r_{\leq m}$ relacja preferencji parametryzacji (4.34) spełnia warunek (4.18) dla wektora $\mathbf{y}^a \in Y$ takiego, że $\mathbf{q}^a = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$, czyli

$$(\Theta(\mathbf{y}) \not\leq \Theta(\mathbf{y}^a) \quad \text{i} \quad \Theta(\mathbf{y}) \neq \Theta(\mathbf{y}^a)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.36}$$

Oznacza to, że każdy wektor $\mathbf{y}^a$ taki, że $\mathbf{q}^a = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$ jest preferowany w stosunku do dowolnego wektora ocen $\mathbf{y} \not\preceq_a \mathbf{y}^a$, czyli

$$\mathbf{y} \not\preceq_a \mathbf{y}^a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.37}$$

Twierdzenie 4.10 *Jeżeli $A \subset V^m$ oraz dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{q}^a \in Z^r_{\leq m}$ funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek (4.35), to dla dowolnego wektora aspiracji $\mathbf{q}^a \in Z^r_{\leq m}$ relacja preferencji definiowana przez minimalizację leksykograficzną (4.34) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna i anonimowa oraz spełnia warunek (4.37).*

Dowód. Jeżeli $\mathbf{q}^a \in Z^r_{\leq m}$, to zadanie (4.34) jest równoważne zadaniu

$$\operatorname{lexmin} \{ (\max_{k=1,\ldots,r} s_k(\bar{h}_k(\mathbf{y}^a), \bar{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{k=1}^{r} s_k(\bar{h}_k(\mathbf{y}^a), \bar{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{4.38}$$

gdzie $\mathbf{y}^a$ jest (dowolnym) wektorem ocen, takim że $\mathbf{q}^a = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$.

Zwrotność i przechodniość relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.38) jest oczywista. Anonimowość relacji wynika z symetrii przekształcenia $\bar{\mathbf{h}}$.

Z twierdzenia 4.8 wynika, że dla dowolnego $i \in I$ prawdziwa jest zależność

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \quad \text{dla } \varepsilon > 0$$

Stąd na mocy wniosków 1.21 i 1.2 otrzymujemy ściśłą monotoniczność relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.38)

Na mocy twierdzenia 1.11 prawdziwa jest implikacja

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \not\leqq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y}$$

Stąd, po uwzględnieniu równoważności $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'') \Leftrightarrow \Theta(\mathbf{y}') \leqq \Theta(\mathbf{y}'')$, otrzymujemy implikację (4.36). ■

Przykład 4.4. Dla ilustracji metody dystrybucji referencyjnej opartej na parametryzacji (4.34) przedstawimy przykładowy przebieg analizy interaktywnej dla losowo wygenerowanego problemu lokalizacyjnego (4.3)–(4.4). Rozważamy problem lokalizacji dwóch obiektów ($p = 2$) wśród zadanych 10 potencjalnych lokalizacji ($n = 10$) dla obsługi zbioru 50 klientów ($m = 50$). Dla określenia potencjalnych lokalizacji i położenia klientów wygenerowano losowo (rozkład jednostajny)

60 punktów o całkowitych współrzędnych od 0 do 100. Dla określenia odległości między punktami najpierw zostały obliczone odległości euklidesowe (norma l_2), a następnie zaokrąglone do przyjętego kroku (dokładności) odległości 10. W ten sposób otrzymano wielokryterialny problem (4.3)–(4.4) z 50 jednorodnymi ocenami o wartościach należących do zbioru $V = \{150, 140, \ldots, 10, 0\}$, gdzie $v_0 = 150$, $v_1 = 140, \ldots$, $v_{14} = 10$ i $v_{15} = 0$. Do analizy tego problemu zastosowano metodę dystrybucji referencyjnej (4.34) z najprostszymi funkcjami skalującymi postaci $s_k(q_k^a, q_k) = q_k - q_k^a$.

Tablica 4.3

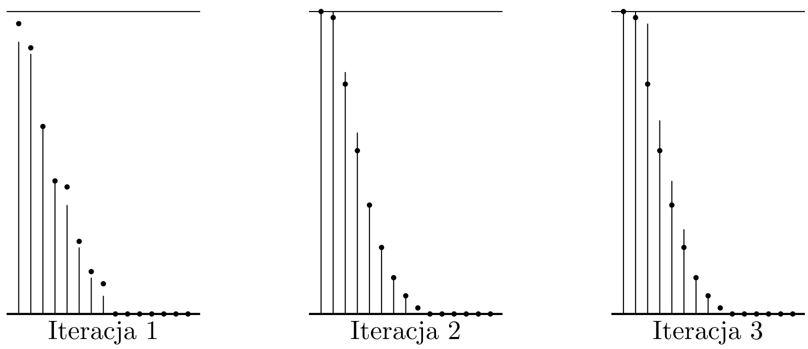
Wyniki interaktywnej analizy problemu lokalizacyjnego

Tablica 4.3:

Iteracja	Skumulowana dystrybucja odległości $\bar{\mathbf{h}}$										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
1											
aspiracja	45	43	31	22	18	11	6	3	0	0	0
rozwiązanie	48	44	31	22	21	12	7	5	0	0	0
2											
aspiracja	50	50	40	30	18	11	6	3	0	0	0
rozwiązanie	50	49	38	27	18	11	6	3	1	0	0
3											
aspiracja	50	50	48	32	22	14	6	3	0	0	0
rozwiązanie	50	49	38	27	18	11	6	3	1	0	0

Przebieg analizy interaktywnej ilustruje tablica 4.3 i rysunek 4.3. Jako pierwszą dystrybucję referencyjną przyjmujemy dystrybucję utopii, czyli wektor $\mathbf{q}^a$ złożony z najmniejszych możliwych wartości funkcji $\bar{h}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 15)$. W wyniku otrzymujemy jedno z rozwiązań minimaksowych o dość znacznej liczbie odległości największych (5 odległości większych od 70, 7 odległości większych od 60 i 12 odległości większych od 50). W celu wyznaczenia rozwiązania o mniejszej liczbie dużych odległości, w drugiej iteracji zwiększamy poziomy aspiracji odpowiadające małym odległościom ($q_{15}^a = q_{14}^a = 50$, $q_{13}^a = 40$, $q_{12}^a = 30$), pozostawiając niezmienione poziomy aspiracji dla odległości większych od 40. W rezultacie otrzymujemy rozwiązanie o znacznie mniejszej liczbie dużych odległości (tylko 3 odległości większe od 70, 6 odległości większych od 60 i 11 odległości większych od 50), chociaż pojawiła się jedna odległość większa od 80. Otrzymany rozkład odległości wydaje się być zadowalającym rozwiązaniem. Zostały osiągnięte najmniejsze możliwe liczby odległości większych od 40, 50, 60 i 70.

Dla sprawdzenia, czy nie można znaleźć podobnego rozwiązania bez odległości większej od 80, w trzeciej iteracji jeszcze bardziej zwiększamy poziomy aspiracji dla odległości mniejszych od 40, jak również podnosimy nieco poziomy aspiracji dla odległości większych od 40 i większych od 50. Okazuje się, że ponownie otrzymujemy to samo rozwiązanie. Zatem nie istnieje inne rozwiązanie dopuszczalne o



Rysunek 4.3:
Rys. 4.3. Wyniki interaktywnej analizy problemu lokalizacyjnego

podobnie małej liczbie dużych odległości. Wyraźnie widać to na rysunku 4.3, gdzie wykresy otrzymanych dystrybucji odległości są prezentowane w postaci kropek na tle słupków reprezentujących dystrybucje referencyjne (aspiracje). Akceptujemy więc otrzymane w drugiej iteracji rozwiązanie jako zadowalające rozwiązanie problemu lokalizacyjnego. □

4.2 Rozwiązania wyrównująco efektywne

4.2.1 Wyrównująca efektywność

Istotnym czynnikiem oceny rozkładu wartości poszczególnych ocen w rozwiązaniu zadania wielokryterialnego z ocenami jednorodnymi jest często minimalizacja rozbieżności pomiędzy ocenami (por. Young, 1994). W naukach ekonomicznych wprowadzono pewne *miary rozbieżności ocen*, których wartości są minimalizowane (Sen, 1973; Marsh i Schilling, 1994). Najprostszą taką miarą jest suma wartości bezwzględnych różnic między ocenami

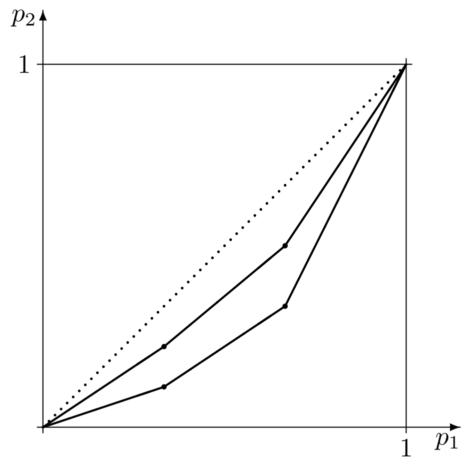
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |y_i - y_j| \tag{4.39}$$

W naukach ekonomicznych preferowane są względne miary rozbieżności jako niezależne od skali ocen. W szczególności powszechnie stosowana jest minimalizacja *współczynnika (miary) Giniego*

$$(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |y_i - y_j|)/(2m \sum_{i=1}^{m} y_i) \tag{4.40}$$

Współczynnik Giniego wyraża połowę średniej (bezwzględnej) różnicy między ocenami w stosunku do średniej oceny (Kendall, 1958).

Rozbieżności pomiędzy ocenami mogą być ilustrowane graficznie za pomocą popularnej w ekonomii techniki *krzywych Lorenza*. Krzywe Lorenza służą do zobrazowania rozbieżności w dystrybucji przychodów (w sensie pewnego ustalonego dobra), w danej populacji odbiorców. Odbiorców porządkuje się według niemalejących wartości przychodów, czyli od "najbiedniejszych" do "najbogatszych". Pozwala to identyfikować zadanego rozmiaru grupę odbiorców o najniższych przychodach. Jako rozmiar grupy przyjmuje się jej względną liczność w stosunku do całej populacji. Następnie dla każdej takiej grupy odbiorców oblicza się sumę ich przychodów w stosunku do sumy przychodów całej populacji. Wykres tak określonej zależności względnych przychodów od względnej wielkości populacji stanowi krzywą Lorenza. Rysunek 4.4 przedstawia krzywe Lorenza w układzie współrzędnych, gdzie oś p_1 reprezentuje względną wielkość populacji, a oś p_2 względną wielkość przychodów. Kropkowana linia ukośna reprezentuje krzywą Lorenza dla przypadku absolutnej równości (wszyscy odbiorcy uzyskują jednakowe przychody). Krzywa Lorenza dla dowolnego rozkładu przychodów jest krzywą wypukłą (faktycznie łamaną przy dyskretnej populacji odbiorców) łączącą punkty (0,0) i (1,1). Zatem wszystkie krzywe Lorenza są zawarte w trójkącie poniżej linii absolutnej równości. Im krzywa Lorenza jest bliższa linii absolutnej równości, tym mniejsza jest nierówność dystrybucji przychodów. Mówimy, że krzywa Lorenza A dominuje krzywą Lorenza B, gdy krzywa A nie ma żadnego punktu poniżej krzywej B, a przynajmniej jeden jej punkt znajduje się powyżej krzywej B. Jeżeli krzywa Lorenza dla rozkładu przychodów A dominuje krzywą Lorenza dla rozkładu przychodów B, to rozkład A generuje mniejszą względną nierówność przychodów niż rozkład B (Allison, 1978). Współczynnik Giniego (4.40) ma prostą graficzną interpretację jako stosunek pola obszaru pomiędzy krzywą Lorenza i prostą absolutnej równości do pola całego trójkąta poniżej prostej absolutnej równości.



Rysunek 4.4:
Rys. 4.4. Krzywe Lorenza

Minimalizacja miar rozbieżności jest na ogół sprzeczna z minimalizacją poszczególnych ocen. Na przykład, w problemie lokalizacyjnym minimalizacja współczynnika Giniego może prowadzić do wyboru lokalizacji obiektów maksymalnie odległych od wszystkich klientów (por. Erkut, 1993). W przykładzie 4.1 z poprzedniego podrozdziału czwarte rozwiązanie problemu lokalizacyjnego jest właśnie rozwiązaniem minimalizującym współczynnik Giniego i jak pokazano, nie jest ono rozwiązaniem symetrycznie efektywnym.

Teoria miar rozbieżności opiera na *aksjomacie przesunięć wyrównujących* Pigou–Daltona (por. Shorrocks i Foster, 1987). Aksjomat ten może być zapisany w postaci następującej własności relacji preferencji

$$y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} \quad \text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''} \tag{4.41}$$

Zauważmy, że aksjomat przesunięć wyrównujących można wyrazić w postaci szeregu innych równoważnych warunków (Bell i Raiffa, 1988).

Twierdzenie 4.11 *Relacja preferencji $\preceq$ spełnia dla dowolnych $\mathbf{y} \in Y$ aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia dla dowolnych $\mathbf{y} \in Y$ dowolny z następujących warunków*

$$y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} \prec \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i''} \quad \textit{dla } \varepsilon > 0 \tag{4.42}$$

$$y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{e}_{i'} \quad \textit{dla } \varepsilon > 0 \tag{4.43}$$

Dowód. Dla udowodnienia twierdzenia wykażemy, że prawdziwy jest ciąg implikacji: (4.41) $\Rightarrow$ (4.42) $\Rightarrow$ (4.43) $\Rightarrow$ (4.41).

Załóżmy, że warunek (4.41) jest prawdziwy dla dowolnego wektora $\mathbf{y} \in Y$. Rozpatrzmy wektor $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$. Zauważmy, że $y'_{i'} = y_{i'}$, $y'_{i''} = y_{i''} - \varepsilon$ i $y'_{i'} > y'_{i''}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jeżeli $y_{i'} > y_{i''}$. Stosując zależność (4.41) do wektora $\mathbf{y}'$, otrzymujemy warunek (4.42).

Załóżmy, że warunek (4.42) jest prawdziwy dla dowolnego wektora $\mathbf{y} \in Y$. Rozpatrzmy wektor $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$. Zauważmy, że $y'_{i'} = y_{i'} + \varepsilon$, $y'_{i''} = y_{i''} + \varepsilon$ i $y'_{i'} > y'_{i''}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jeżeli $y_{i'} > y_{i''}$. Stosując zależność (4.42) do wektora $\mathbf{y}'$, otrzymujemy warunek (4.43).

Załóżmy, że warunek (4.43) jest prawdziwy dla dowolnego wektora $\mathbf{y} \in Y$. Rozpatrzmy wektor $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'}$. Zauważmy, że $y'_{i'} = y_{i'} - \varepsilon$, $y'_{i''} = y_{i''}$ i $y'_{i'} > y'_{i''}$ dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$, jeżeli $y_{i'} > y_{i''}$. Stosując zależność (4.43) do wektora $\mathbf{y}'$, otrzymujemy warunek (4.41). ■

Aksjomat przesunięć wyrównujących nie jest sprzeczny z aksjomatami anonimowo racjonalnych relacji preferencji. Istnieje zatem możliwość poszukiwania wyrównująco efektywnych rozwiązań problemu wielokryterialnego (1.7), zdefiniowanych jako elementy minimalne w sensie racjonalych relacji preferencji spełniających dodatkowo warunek anonimowości i aksjomat przesunięć wyrównujących. Relacje takie będziemy dalej nazywać *wyrównująco racjonalnymi* relacjami preferencji. Przyjmując jako podstawę zbiór wszystkich wyrównująco racjonalnych relacji preferencji możemy zdefiniować odpowiednie pojęcia dominacji wektorów ocen i rozwiązań efektywnych, analogicznie jak dla racjonalnych relacji preferencji w podrozdziale 1.2.

Definicja 4.7 *Mówimy, że wektor ocen $\mathbf{y}' \in Y$ dominuje wyrównująco $\mathbf{y}'' \in Y$ lub $\mathbf{y}''$ jest wyrównująco dominowany przez $\mathbf{y}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}''$ dla wszystkich wyrównująco racjonalnych relacji preferencji.*

Definicja 4.8 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *jest wyrównująco indyferentny z* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}''$ *dla wszystkich wyrównująco racjonalnych relacji preferencji.*

Definicja 4.9 *Mówimy, że wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *słabo dominuje wyrównująco* $\mathbf{y}'' \in Y$ *lub* $\mathbf{y}''$ *jest słabo dominowany wyrównująco przez* $\mathbf{y}'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$ *dla wszystkich wyrównująco racjonalnych relacji preferencji.*

Relacje wyrównującej dominacji $\prec_w$, indyferencji $\cong_w$ i słabej dominacji $\preceq_w$ spełniają warunki (1.1)–(1.2), czyli stanowią relację preferencji $\preceq_w$. Relacja ta spełnia warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4), ścisłej monotoniczności (1.5), anonimowości (4.1) i przesunięć wyrównujących (4.41), czyli jest wyrównująco racjonalną relacją preferencji. Relacja dominacji $\preceq_w$ jest najogólniejszą wyrównująco racjonalną relacją preferencji i każda wyrównująco racjonalna relacja preferencji $\preceq$ jest z nią zgodna w tym sensie, że

$$\mathbf{y}' \preceq_w \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$$

Relacja wyrównującej dominacji może być wyrażona jako relacja nierówności dla skumulowanych uporządkowanych wektorów ocen, czyli z użyciem m–wymiarowego liniowego operatora kumulacji Γ (4.26) do uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{y})$. Formalnie zapisujemy to za pomocą przekształcenia $\bar{\Theta} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \ldots, \bar{\theta}_m)$ określonego wzorem $\bar{\Theta}(\mathbf{y}) = \Gamma(\Theta(\mathbf{y}))$, czyli

$$\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{i} \theta_l(\mathbf{y}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.44}$$

Kolejne współrzędne wektora $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ wyrażają odpowiednio: największą ocenę, sumę dwóch największych ocen, sumę trzech największych ocen itd.

Bezpośrednio z określenia operatora $\bar{\Theta}$ wynika, że dla dowolnych $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$ prawdziwe są następujące zależności

$$\Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') = \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \tag{4.45}$$

$$\Theta(\mathbf{y}') \leq \Theta(\mathbf{y}'') \quad \Rightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \tag{4.46}$$

Implikacja odwrotna do (4.46) nie jest prawdziwa. Na przykład, $\bar{\Theta}(2,2,2) = (2,4,6) \leq (3,5,6) = \bar{\Theta}(3,2,1)$ i jednocześnie $\Theta(2,2,2) \not\leq \Theta(3,2,1)$.

Zauważmy, że relacja

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \tag{4.47}$$

jest zwrotna, przechodnia, anonimowa. Ponadto prawdziwe są zależności

$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \text{i} \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \not\leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}')\Big)$$

$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}') = \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \text{i} \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}')\Big)$$

Zatem relacja (4.47) jest relacją preferencji z relacjami ścisłej preferencji i indyferencji określonymi odpowiednio jako

$$\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \tag{4.48}$$
$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') = \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \tag{4.49}$$

Co więcej, prawdziwe są zależności

$$\bar{\Theta}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}) \qquad \text{dla } \varepsilon > 0$$
$$y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}) \qquad \text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$$

czyli relacja (4.47) jest wyrównująco racjonalną relacją preferencji.

Zauważmy, że określenie wartości $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ jest podobne do kostrukcji krzywych Lorenza dla populacji złożonej z m funkcji oceny. Zasadnicza różnica polega na odwrotnym porządkowaniu wartości ocen, od największej do najmniejszej. Wynika to z faktu, że rozpatrujemy zadanie minimalizacji wielokryterialnej i dlatego "najbiedniejszymi odbiorcami" są funkcje oceny o największych wartościach. Rozpatrując krzywe Lorenza w sensie minimalizacji otrzymalibyśmy obrócone o 180^o wykresy krzywych wklęsłych. Wektor $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ może być przedstawiony graficznie w postaci łamanej łączącej punkt (0,0) i punkty $(i, \bar{\theta}_i(\mathbf{y}))$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. W przypadku wektorów ocen $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$ o równej sumie ocen $(\bar{\theta}_m(\mathbf{y}') = \bar{\theta}_m(\mathbf{y}''))$, nierówność $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ jest równoważna dominacji $\mathbf{y}'$ nad $\mathbf{y}''$ w sensie "obróconych" krzywych Lorenza. W ogólnym przypadku "obrócone" krzywe Lorenza można traktować jako wykresy współrzędnych wektora $\bar{\Theta}(\mathbf{y})/\bar{\theta}_m(\mathbf{y})$ (por. rys. 4.5). Natomiast wykresy współrzędnych wektorów $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ stanowią analogiczne do "obróconych" krzywych Lorenza nienormalizowane krzywe wklęsłe (por. rys. 4.6). Zauważmy, że w terminach krzywych Lorenza żaden wektor ocen nie może być lepszy od wektora równych ocen. Relacja (4.47) bierze również pod uwagę wielkości ocen. Wektory jednakowych ocen są dodatkowo rozróżniane na podstawie wartości ocen. Są one reprezentowane przez różne proste ukośne na rys. 4.6. Relacja preferencji (4.47) dopuszcza możliwość, że wektor nierównych małych ocen jest preferowany w stosunku do wektora jednakowych dużych ocen.

Teoria dominacji w sensie krzywych Lorenza (Allison, 1978) i ogólniej teoria miar rozbieżności opiera się na twierdzeniu o majoryzacji wektora (Hardy i inni, 1934), które w terminach $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ może być wyrażone w następującej postaci.

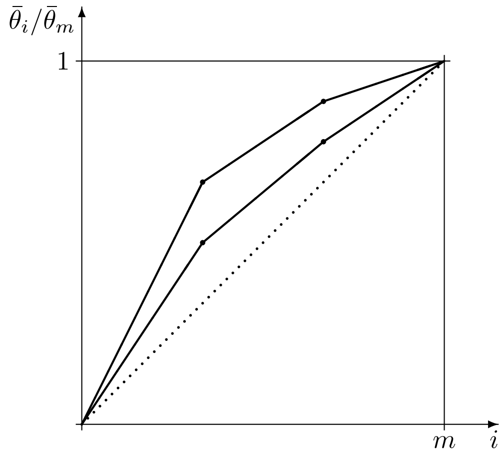
Twierdzenie 4.12 *Jeżeli* $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ *i* $\bar{\theta}_m(\mathbf{y}') = \bar{\theta}_m(\mathbf{y}'')$, *to istnieje skończony ciąg wektorów* $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}'', \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^t = \mathbf{y}'$ *taki, że* $\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^{k-1} - \varepsilon_k \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon_k \mathbf{e}_{i''}$, $0 < \varepsilon_k < y_{i'}^{k-1} - y_{i''}^{k-1}$ *dla* $k = 1, 2, \ldots, t$.

Poniższe twierdzenia i wnioski rozszerzają ten wynik i doprowadzają do równoważności relacji wyrównującej dominacji z relacją (4.47).

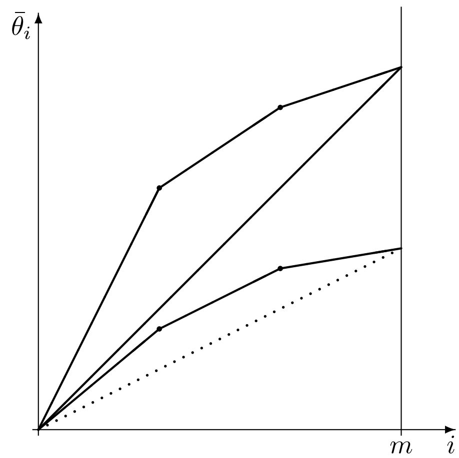
Twierdzenie 4.13 *Jeżeli* $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ *i* $\bar{\theta}_m(\mathbf{y}') < \bar{\theta}_m(\mathbf{y}'')$, *to istnieje wektor ocen* $\mathbf{y}''' \in Y$ *taki, że* $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}''')$, $\bar{\theta}_m(\mathbf{y}') = \bar{\theta}_m(\mathbf{y}''')$, $\Theta(\mathbf{y}''') \leq \Theta(\mathbf{y}'')$ *i* $\theta_m(\mathbf{y}''') \geq \min\{\theta_m(\mathbf{y}'), \theta_m(\mathbf{y}'')\}$.

Dowód. Niech $\mathbf{u}^0 = \Theta(\mathbf{y}'')$. Określmy wektory $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m$ jako

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \delta_k \mathbf{e}_{i_k} \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, m-1$$



Rysunek 4.5:
Rys. 4.5. $\bar{\Theta}(\mathbf{y})/\bar{\theta}_m(\mathbf{y})$ jako krzywe Lorenza



Rysunek 4.6:
Rys. 4.6. $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ jako nienormalizowane krzywe Lorenza

gdzie i_k jest indeksem takim, że

$$u^k_{i_k} > \theta_{i_k}(\mathbf{y}') \quad \text{i} \quad u^k_i \leq \theta_i(\mathbf{y}') \quad \text{dla } i_k < i \leq m$$

a współczynnik δ_k jest określony wzorem

$$\delta_k = \min\{u^k_{i_k} - \theta_{i_k}(\mathbf{y}'), \bar{\theta}_m(\mathbf{u}^k) - \bar{\theta}_m(\mathbf{y}')\}$$

Zauważmy, że

$$\bar{\theta}_i(\mathbf{u}^k) - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}') \leq \bar{\theta}_{i-1}(\mathbf{u}^k) - \bar{\theta}_{i-1}(\mathbf{y}') \quad \text{dla } i_k < i \leq m$$

oraz $\delta_k \geq 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, m-1$, przy czym $\delta_0 > 0$. Stąd, dla $k = 1, 2, \ldots, m$ prawdziwe są zależności

$$u^k_1 \geq u^k_2 \geq \cdots \geq u^k_m \geq \min\{\theta_m(\mathbf{y}'), \theta_m(\mathbf{y}'')\}$$

$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{u}^k) \quad \text{i} \quad \Theta(\mathbf{u}^k) \leqq \Theta(\mathbf{u}^{k-1})$$

Ponadto $\bar{\theta}_m(\mathbf{u}^m) = \bar{\theta}_m(\mathbf{y}')$ i $\Theta(\mathbf{u}^m) \leq \Theta(\mathbf{y}'')$, czyli wektor $\mathbf{y}''' = \mathbf{u}^m$ spełnia wszystkie warunki tezy twierdzenia. ■

Wniosek 4.23 *Jeżeli* $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$, *to istnieje skończony ciąg wektorów* $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}''$, $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{y}^t = \mathbf{y}'$ *taki, że* $\theta_m(\mathbf{y}^k) \geq \min\{\theta_m(\mathbf{y}'), \theta_m(\mathbf{y}'')\}$ *oraz* $\Theta(\mathbf{y}^k) \leq \Theta(\mathbf{y}^{k-1})$ *lub* $\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^{k-1} - \varepsilon_k \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon_k \mathbf{e}_{i''}$, $0 < \varepsilon_k < y^{k-1}_{i'} - y^{k-1}_{i''}$ *dla* $k = 1, 2, \ldots, t$.

Twierdzenie 4.14 *Dla dowolnych wektorów ocen* $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$

$$\mathbf{y}' \preceq_w \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$$

Dowód. Zauważmy, że relacja (4.47) jest wyrównująco racjonalną relacją preferencji. Zatem bezpośrednio z definicji wyrównującej dominacji wynika prawdziwość implikacji

$$\mathbf{y}' \preceq_w \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$$

Dla udowodnienia odwrotnej implikacji zauważmy, że na mocy wniosku 4.23 dla każdej wyrównująco racjonalnej relacji preferencji $\preceq$ prawdziwa jest zależność $\Theta(\mathbf{y}') \preceq \Theta(\mathbf{y}'')$. Stąd, korzystając z warunku anonimowości, otrzymujemy $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$. Zatem $\mathbf{y}' \preceq_w \mathbf{y}''$. ■

Wniosek 4.24 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje wyrównująco* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$.

Wniosek 4.25 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *jest wyrównująco indyferentny z* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'')$, *czyli*

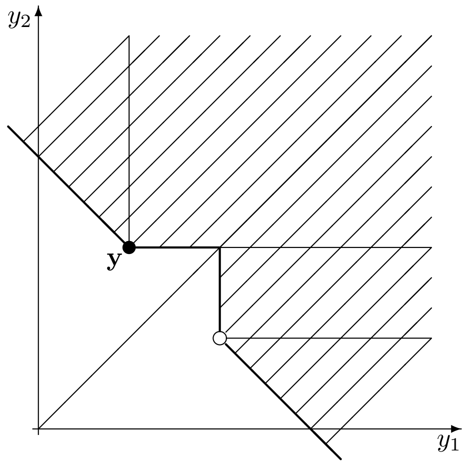
$$\mathbf{y}' \cong_w \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' \cong_a \mathbf{y}''$$

Wniosek 4.26 *Wektor ocen* $\mathbf{y}' \in Y$ *dominuje wyrównująco* $\mathbf{y}'' \in Y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg wektorów* $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}'', \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{y}^t = \mathbf{y}'$ *taki, że* $\Theta(\mathbf{y}^k) \leq \Theta(\mathbf{y}^{k-1})$ *lub* $\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^{k-1} - \varepsilon_k \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon_k \mathbf{e}_{i''}$, $0 < \varepsilon_k < y^{k-1}_{i'} - y^{k-1}_{i''}$ *dla* $k = 1, 2, \ldots, t$.

Wniosek 4.27 *Dla każdej wyrównująco racjonalnej relacji preferencji $\preceq$ prawdziwe są następujące zależności*

$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}''$$
$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \prec \mathbf{y}''$$

Z wniosku 4.26 wynika, że struktura dominacji wyrównującej (por. (1.10)) zależy od położenia wektora $\mathbf{y}$ względem prostej równych ocen ($y_1 = y_2 = \cdots = y_m$). W ogólnym przypadku zbiór dominowania $D(\mathbf{y})$ nie jest stożkiem i nie jest zbiorem wypukłym. Rysunek 4.7 przedstawia $D(\mathbf{y})$ zaczepiony w $\mathbf{y}$, czyli zbiór $\mathbf{y} + D(\mathbf{y})$.



Rysunek 4.7:
Rys. 4.7. Struktura wyrównującej dominacji w R^2

Definicja 4.10 *Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ nazywamy wyrównująco niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{y} \in A$ taki, że $\mathbf{y}$ dominuje wyrównująco $\mathbf{y}^0$.*

Bezpośrednio z definicji wektora wyrównująco niezdominowanego i wniosku 4.24 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.28 *Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem wyrównująco niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyrównująco racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{y} \in A$ nie zachodzi $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$.*

Wniosek 4.29 *Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem wyrównująco niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{y} \in A$ taki, że $\bar{\Theta}(\mathbf{y}) \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}^0)$.*

Twierdzenie 4.15 *Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem wyrównująco niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna, wyrównująco racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$.*

Dowód. Załóżmy, że dla pewnej wyrównująco racjonalnej relacji preferencji, $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Tym samym, dla żadnego $\mathbf{y} \in A$ nie zachodzi $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$. Zatem, na mocy wniosku 4.28, wektor $\mathbf{y}^0$ jest wyrównująco niezdominowanym wektorem ocen.

Niech $\mathbf{y}^0 \in A$ będzie wyrównująco niezdominowanym wektorem ocen. Określmy relację

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \preceq_o \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad & \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) < \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) \\ \text{lub} \quad & \left(\max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) = \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) \right. \\ & \left. \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i(\mathbf{y}') \le \sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') \right) \end{aligned}$$

Dla tak określonej relacji, $\mathbf{y}^0 \preceq_o \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$. Łatwo sprawdzić, że relacja $\preceq_o$ jest zwrotna, przechodnia, spójna i anonimowa. Odpowiednia relacja $\prec_o$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \prec_o \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad & \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) < \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) \\ \text{lub} \quad & \left(\max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) = \max_{i=1,\dots,m} (\bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') - \bar{\theta}_i(\mathbf{y}^0)) \right. \\ & \left. \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i(\mathbf{y}') < \sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i(\mathbf{y}'') \right) \end{aligned}$$

i spełnia warunek ścisłej monotoniczności (1.5) oraz aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41). Tym samym relacja $\preceq_o$ spełnia wszystkie wymagane warunki. ■

Twierdzenie 4.16 *Jeżeli $A \subset Y(y^*) = \{\mathbf{y} \in Y \;:\; y_i \ge y^* \quad dla\ i = 1, 2, \dots, m\}$ dla pewnego $y^* \in R$, to wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem wyrównująco niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja preferencji $\preceq$ spełniająca warunki zwrotności, przechodniości, ścisłej monotoniczności, anonimowości i przesunięć wyrównujących na zbiorze $Y(y^*)$ taka, że dla żadnego $\mathbf{y} \in A$ nie zachodzi $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$.*

Dowód. Konieczność warunku wynika z wniosku 4.28. Dla udowodnienia dostateczności warunku przypuśćmy, że istnieje relacja preferencji $\preceq$ spełniająca warunki zwrotności, przechodniości, ścisłej monotoniczności, anonimowości i przesunięć wyrównujących na zbiorze $Y(y^*)$ taka, że dla żadnego $\mathbf{y} \in A$ nie zachodzi $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$ i pomimo tego $\mathbf{y}^0$ nie jest wektorem niezdominowanym. Zatem, zgodnie z wnioskiem 4.29, istnieje $\mathbf{y} \in A$ taki, że $\bar{\Theta}(\mathbf{y}) \le \bar{\Theta}(\mathbf{y}^0)$. Na mocy wniosku 4.23 istnieje wtedy skończony ciąg wektorów $\mathbf{u}^0 = \mathbf{y}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{u}^t = \mathbf{y}^0$ taki, że $\mathbf{u}^k \in Y(y^*)$ dla $k = 1, 2, \dots, t$ oraz $\Theta(\mathbf{u}^k) \le \Theta(\mathbf{u}^{k-1})$ lub $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} - \varepsilon_k \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon_k \mathbf{e}_{i''}$, gdzie $0 < \varepsilon_k < u_{i'}^{k-1} - u_{i''}^{k-1}$. Stąd, dla każdej relacji preferencji $\preceq$ spełniającej warunki zwrotności, przechodniości, ścisłej monotoniczności, anonimowości i przesunięć wyrównujących na zbiorze $Y(y^*)$ spełniony jest warunek $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}^0$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. ■

Twierdzenie 4.17 *Jeżeli zbiór osiągalnych wektorów ocen $A \neq \emptyset$ jest domknięty i istnieje $y^* \in R$ takie, że $A \subset Y(y^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ y_i \geq y^* \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m\}$, to istnieje wyrównująco niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$.*

Dowód. Zauważmy, że zadanie

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} (y_i - y^*)^2 \ : \ \mathbf{y} \in A\} \tag{4.50}$$

ma rozwiązanie optymalne $\mathbf{y}^0 \in A$. Oznacza to, że dla relacji preferencji $\preceq$ definiowanej przez minimalizację (4.50) prawdziwy jest warunek $\mathbf{y}^0 \preceq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in A$. Relacja preferencji definiowana przez minimalizację (4.50) wyraża się wzorem

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} (y'_i - y^*)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} (y''_i - y^*)^2$$

i spełnia warunki zwrotności, przechodniości, ścisłej monotoniczności, anonimowości i przesunięć wyrównujących na zbiorze $Y(y^*)$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem 4.16, $\mathbf{y}^0$ jest wyrównująco niezdominowanym wektorem ocen. ■

Definicja 4.11 *Rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} \in Q$ nazywamy wyrównująco efektywnym rozwiązaniem wielokryterialnego zadania (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest wyrównująco niezdominowany.*

Z wniosków 4.28 i 4.29 i twierdzenia 4.15 wynikają następujące charakterystyki rozwiązań wyrównująco efektywnych.

Wniosek 4.30 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyrównująco racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Wniosek 4.31 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna wyrównująco racjonalna relacja preferencji $\preceq$ taka, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$.*

Wniosek 4.32 *Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.*

Wniosek 4.33 *Dla dowolnej permutacji τ zbioru $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania*

$$\min \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Wniosek 4.34 *Dla dowolnej ściśle rosnącej funkcji liniowej $s : R \to R$ wektor $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania*

$$\min \{(s(f_1(\mathbf{x})), s(f_2(\mathbf{x})), \ldots, s(f_m(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

Zauważmy, że zgodnie z wnioskami 4.33 i 4.34 wyrównująca efektywność rozwiązania nie zależy od kolejności funkcji oceny i od ściśle monotonicznej liniowej zmiany skal indywidualnych ocen. W odróżnieniu od wniosku 1.9 dotyczącego rozwiązań efektywnych, we wniosku 4.10 wszystkie funkcje oceny są skalowane za pomocą tej samej ściśle rosnącej funkcji liniowej s. Możliwe są więc tylko liniowe zmiany skal ocen z zachowaniem wyrównującej efektywności rozwiązań.

Wyrównująca efektywność jest silniejsza od symetrycznej efektywności, a zbiór rozwiązań wyrównująco efektywnych jest podzbiorem zbioru rozwiązań symetrycznie efektywnych. Dowodzi tego następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.18 *Każde rozwiązanie wyrównująco efektywne jest rozwiązaniem symetrycznie efektywnym.*

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0$ będzie rozwiązaniem wyrównująco efektywnym. Przypuśćmy, że $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem symetrycznie efektywnym. Na mocy wniosku 4.8 istnieje wtedy wektor dopuszczalny $\mathbf{x}$ taki, że $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Stąd $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$, co na mocy wniosku 4.32 jest sprzeczne z wyrównującą efektywnościa wektora $\mathbf{x}^0$. ■

Stanowiące główny przedmiot naszych rozważań zadania WPL i WPLD mają domknięte zbiory rozwiązań dopuszczalnych Q i liniowe funkcje oceny f_i. Zatem domknięte są odpowiednie zbiory ocen osiągalnych A. Co więcej, w przypadku regularnego zadania WPL lub WPLD zbiór Q jest niepusty oraz istnieją rozwiązania optymalne $\bar{\mathbf{x}}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jednokryterialnych zadań (1.9). Stąd $A \neq \emptyset$ i $A \subset Y(y^*) = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ y_i \geq y^* \ \text{dla}\ i = 1, 2, \ldots, m\}$, gdzie $y^* = \min_{i=1,\ldots,m} f_i(\bar{\mathbf{x}}^i)$. Z twierdzenia 4.17 wynika więc następujący wniosek.

Wniosek 4.35 *Regularne zadania WPL i WPLD mają rozwiązania wyrównująco efektywne.*

4.2.2 Techniki generacji

Rozwiązania efektywne zadania wielokryterialnego można wyznaczać rozwiązując skalaryzacje zadania wielokryterialnego z funkcją skalaryzującą $s : R^m \to R$, definiującą relację preferencji $\preceq_s$ spełniającą warunek ścisłej monotoniczności (por. twierdzenie 1.6). Jeżeli relacja $\preceq_s$ spełnia ponadto warunek anonimowości (4.1) i aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41), to generowane przez skalaryzację rozwiązanie efektywne jest również wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego. Aksjomatu przesunięć wyrównujących nie spełnia skalaryzacja (1.18), polegająca na minimalizacji sumy wszystkich funkcji oceny $f_i(\mathbf{x})$, ani skalaryzacje minimaksowe (1.21) i (1.36). Istnieje jednak możliwość spełnienia aksjomatu przesunięć wyrównujących przez relacje preferencji zadań (1.18) i (1.36) z odpowiednio skalowanymi ocenami. Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4.19 *Dla dowolnej ściśle wypukłej, rosnącej funkcji $s : R \to R$ relacja preferencji definiowana przez zadanie*

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} s(f_i(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.51}$$

jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41).

Dowód. Zwrotność, przechodniość, ścisła monotoniczność i anonimowość relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację (4.51) wynika bezpośrednio z odpowiednich własności relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację (1.18) i faktu, że funkcja s jest ściśle rosnąca. Pozostaje zatem udowodnić spełnienie aksjomatu przesunięć wyrównujących (4.41). Niech $\mathbf{y} \in Y$ i $y_{i'} > y_{i''}$. Zdefiniujmy wektory $\mathbf{y}^\varepsilon = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$ i $\mathbf{y}^s = \mathbf{y} - (y_{i'} - y_{i''})\mathbf{e}_{i'} + (y_{i'} - y_{i''})\mathbf{e}_{i''}$. Zauważmy, że $\mathbf{y}^\varepsilon = \lambda \mathbf{y}^s + (1-\lambda)\mathbf{y}$, gdzie $\lambda = \varepsilon/(y_{i'} - y_{i''})$, czyli $0 < \lambda < 1$ dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$. Funkcja $G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m s(y_i)$ jest ściśle wypukła i symetryczna. Stąd

$$G(\mathbf{y}^\varepsilon) < \lambda G(\mathbf{y}^s) + (1-\lambda) G(\mathbf{y}) = G(\mathbf{y}) \quad \text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$$

Zatem relacja preferencji definiowana przez minimalizację tej funkcji spełnia warunek przesunięć wyrównujących, co kończy dowód. ■

Wniosek 4.36 *Jeżeli* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}$ *dla każdego* $\mathbf{x} \in Q$ *(czyli* $A \subset R^m_+$*), to rozwiązanie optymalne zadania najmniejszych kwadratów*

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} f_i^2(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.52}$$

jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).

Twierdzenie 4.20 *Dla dowolnej ściśle wypukłej, rosnącej funkcji* $s : R \to R$ *relacja preferencji definiowana przez zadanie*

$$\operatorname{lexmin} \{(\max_{i=1,\dots,m} s(f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s(f_i(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.53}$$

jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41).

Dowód. Zwrotność, przechodniość, ścisła monotoniczność i anonimowość relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację (4.53) wynika bezpośrednio z odpowiednich własności relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację (1.36) i faktu, że funkcja s jest ściśle rosnąca. Pozostaje zatem udowodnić spełnienie aksjomatu przesunięć wyrównujących (4.41). Niech $\mathbf{y} \in Y$ i $y_{i'} > y_{i''}$. Zdefiniujmy wektor $\mathbf{y}^\varepsilon = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$ Zauważmy, że dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$

$$\max_{i=1,\dots,m} s(y_i^\varepsilon) \leq \max_{i=1,\dots,m} s(y_i) \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^m s(y_i^\varepsilon) < \sum_{i=1}^m s(y_i)$$

Stąd

$$\left(\max_{i=1,\dots,m} s(y_i^\varepsilon), \sum_{i=1}^m s(y_i^\varepsilon)\right) <_{lex} \left(\max_{i=1,\dots,m} s(y_i), \sum_{i=1}^m s(y_i)\right)$$

Zatem relacja preferencji definiowana przez zadanie (4.53) spełnia warunek przesunięć wyrównujących, co kończy dowód. ∎

Aksjomat przesunięć wyrównujących spełnia relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (1.38).

Twierdzenie 4.21 *Relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (1.38) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących (4.41).*

Dowód. Relacja preferencji odpowiadająca minimaksymalizacji leksykograficznej (1.38)

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{y}'')$$

spełnia warunki zwrotności (1.3), przechodniości (1.4) i ścisłej monotoniczności (1.5) (por. dowód twierdzenia 1.24). Z własności operatora porządkującego Θ wynika też natychmiast anonimowość tej relacji.

Zauważmy, że jeżeli $y_{i'} = \theta_{j'}(\mathbf{y}) > y_{i''} = \theta_{j''}(\mathbf{y})$, to istnieje indeks j_0, $j' \leq j_0 \leq j''$ taki, że dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$

$$\theta_{j_0}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) < \theta_{j_0}(\mathbf{y}) \quad \text{i} \quad \theta_j(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) \leq \theta_j(\mathbf{y}) \quad \text{dla } j < j_0$$

co dowodzi spełnienia aksjomatu przesunięć wyrównujących. ∎

Wniosek 4.37 *Rozwiązanie optymalne leksykograficznego zadania minimaksowego (1.38) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.32 może być wyrażony w terminach wielokryterialnego zadania z wektorową funkcją skumulowanych uporządkowanych ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$

$$\min \{\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.54}$$

Wniosek 4.38 *Rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (4.54).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne skumulowanego uporządkowanego wektora ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ mogą być zapisane w postaci wypukłych, kawałkami liniowych funkcji wektora $\mathbf{y}$

$$\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) = \max_{\tau \in \Pi} \left(\sum_{k=1}^{i} y_{\tau(k)} \right)$$

gdzie Π jest zbiorem wszystkich permutacji τ zbioru indeksów I. Tym samym, w przypadku zadań WPL odpowiedni problem (4.54) może być wyrażony w postaci wielokryterialnego zadania programowania liniowego (z dużą liczbą dodatkowych nierówności liniowych)

$$\min \ (z_1, z_2, \ldots, z_m) \tag{4.55}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{4.56}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.57}$$

$$z_i \geq \sum_{k=1}^{i} y_{\tau(k)} \quad \text{dla } \tau \in \Pi; \ i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.58}$$

Wynika z tego, że w przypadku zadań WPL zbiór rozwiązań wyrównująco efektywnych jest spójnym podzbiorem zbioru wszystkich rozwiązań efektywnych.

Skalaryzacja minimaksowa (1.21) odpowiada minimalizacji pierwszej funkcji oceny w wielokryterialnym zadaniu (4.54). Podobnie skalaryzacja (1.18) polegająca na minimalizacji sumy wszystkich oryginalnych funkcji oceny odpowiada minimalizacji ostatniej (m–tej) funkcji oceny w wielokryterialnym zadaniu (4.54). Zatem w przypadku problemów dwukryterialnych ($m = 2$), zbiór rozwiązań wyrównująco efektywnych pokrywa się ze zbiorem rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania z funkcjami oceny określonymi odpowiednio jako maksimum oryginalnych ocen i suma oryginalnych ocen. W ogólnym przypadku, na mocy wniosków 4.38 i 1.13, prawdziwe są następujące wnioski.

Wniosek 4.39 *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.21) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1.7), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, rozwiązanie optymalne zadania (1.21) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.40 *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.18) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1.7), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, rozwiązanie optymalne zadania (1.18) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.41 *Zbiór rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania*

$$\min \{(\max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.59}$$

zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1.7), a jeżeli rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^0$ zadania (4.59) spełnia dla wszystkich $\mathbf{x} \in Q$ warunek

$$(\max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}^0) \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}^0)) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$$

to $\mathbf{x}^0$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).

Wniosek 4.42 *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1.36) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1.7), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, rozwiązanie optymalne zadania (1.36) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Stosując optymalizację leksykograficzną (1.32) do zadania (4.54), otrzymujemy problem leksykograficzny

$$\text{lexmin } \{\bar{\Theta}(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.60}$$

Zauważmy, że na mocy definicji optymalizacji leksykograficznej problem (4.60) jest równoważny standardowemu leksykograficznemu problemowi minimaksowemu

(1.38) dla oryginalnego zadania wielokryterialnego (1.7). Prowadzi to do alternatywnego dowodu wniosku 4.37.

Jednym ze stosowanych w praktyce sposobów uwzględniania rozbieżności ocen jest wprowadzanie miary rozbieżności jako dodatkowej funkcji oceny do modelu wielokryterialnego i poszukiwanie rozwiązań efektywnych dla tak rozszerzonego zadania wielokryterialnego. Na przykład, Mandell (1991) poszukiwał rozwiązań efektywnych problemu dwukryterialnego, gdzie jednym kryterium była minimalizacja sumy ocen, a drugim minimalizacja współczynnika Giniego. Nasuwa się tu naturalne pytanie, czy takie podejścia mogą prowadzić do wyznaczenia wyrównująco efektywnych rozwiązań oryginalnego zadania wielokryterialnego. Niech $g(\mathbf{y})$ oznacza minimalizowaną miarę rozbieżności. Rozwiązania efektywne odpowiadają wektorom ocen niezdominowanym w sensie relacji $\leqq$, czyli w przypadku rozszerzonego problemu w sensie relacji

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\mathbf{y}' \leqq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad g(\mathbf{y}') \leq g(\mathbf{y}'')\Big)$$

Łatwo zauważyć, że tak określona relacja preferencji nie spełnia warunku ścisłej monotoniczności, jeżeli funkcja g nie spełnia warunku (słabej monotoniczności) $g(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq g(\mathbf{y})$ dla $\varepsilon > 0$. Niestety, warunku tego nie spełnia ani współczynnik Giniego (4.40), ani suma różnic ocen (4.39). Rozszerzone problemy wielokryterialne z użyciem tych miar nie generują więc rozwiązań wyrównująco efektywnych. Dla ilustracji tego faktu odwołajmy się do przykładu 4.1. Ostatnie rozwiązanie przedstawione w tablicy 4.1 stanowi jednoznaczne rozwiązanie problemu minimalizacji współczynnika Giniego. Jest zatem rozwiązaniem efektywnym rozszerzonego problemu wielokryterialnego. Tymczasem, jak pokazaliśmy w tablicy 4.1, uporządkowany wektor ocen tego rozwiązania jest zdominowany przez uporządkowane wektory ocen wszystkich pozostałych rozważanych rozwiązań. Tym samym rozwiązanie to nie jest wyrównująco efektywne.

Przykład 4.5. Dla ilustracji rozwiązań wyrównująco efektywnych można przedstawić wyniki analizy losowo generowanych problemów lokalizacyjnych. Rozważamy problemy lokalizacji jednego obiektu wśród zadanego zbioru punktów ($p = 1$, $m = n$). W eksperymentach generowano losowo (przy użyciu rozkładu jednostajnego) punkty o całkowitych współrzędnych od 0 do 100. W pierwszej serii eksperymentów generowano losowo wszystkie n punktów w kwadracie o wierzchołkach (0,0), (100,0), (100,100) i (0,100), czyli występował jednostajny rozkład punktów. W drugiej serii eksperymentów wybrano narożny punkt (100,100), a pozostałe $n-1$ punktów generowano losowo w trójkącie o wierzchołkach (0,0), (100,0) i (0,100), czyli istniał jeden izolowany punkt. Dla określenia odległości między punktami najpierw zostały obliczone odległości euklidesowe (norma l_2), a następnie zaokrąglone do przyjętego kroku (dokładności) odległości równej 10. Eksperymenty zostały przeprowadzone dla liczby punktów $n = 30$, 50 i 100. W ramach każdego eksperymentu wygenerowano losowo 50 problemów.

Dla każdego z wygenerowanych problemów lokalizacyjnych wyznaczano sześć rozwiązań: LM – leksykograficzne rozwiązanie minimaksowe (1.38), LS – rozwiązanie zadania najmniejszych kwadratów (4.52), MM – standardowe rozwiązanie minimaksowe (1.21), MS – rozwiązanie minimalizujące sumę ocen (1.18), AD – rozwiązanie minimalizujące sumę bezwględnych różnic między ocenami (4.39), GC – rozwiązanie minimalizujące wspólczynnik Giniego (4.40). Pierwsze dwa rozwiązania LM i LS są wyrównująco efektywne na mocy wniosków 4.37 i 4.36. Dalsze dwa MM i MS są wyrównująco efektywne w przypadku jednoznaczności skumulowanych uporządkowanych wektorów ocen (wnioski 4.39 i 4.40). Ostatnie dwa rozwiązania AD i GC minimalizują standardowe miary rozbieżności.

Tablica 4.4

Średni rozkład ocen dla problemu z jednostajnym rozkładem punktów

Tablica 4.4:

	Procentowy rozkład ocen dla $n = 30$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	3.67	4.80	11.53	20.27	25.40	20.93	11.20	1.93	0.27		
MM	3.67	5.33	12.27	19.00	24.07	19.60	12.13	3.33	0.60		
MS	3.80	6.53	12.07	21.27	23.60	17.93	10.53	3.33	0.87	0.07	
LS	3.73	5.80	11.27	20.27	26.60	19.13	10.33	2.40	0.47		
GC	3.33	1.60	5.00	11.40	16.87	16.67	12.20	11.07	8.73	6.60	6.53
AD	3.47	3.67	10.60	20.33	26.33	21.53	10.73	2.87	0.33	0.13	
	Procentowy rozkład ocen dla $n = 50$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	2.44	5.52	12.60	18.96	23.88	23.52	11.16	1.92			
MM	2.56	5.92	12.52	18.40	23.20	21.80	12.68	2.92			
MS	2.88	6.56	13.88	19.68	23.00	19.72	10.96	2.80	0.48	0.04	
LS	2.60	6.08	13.16	20.28	23.68	21.16	10.44	2.40	0.20		
GC	2.08	2.12	5.72	10.56	15.04	16.04	12.12	9.56	9.32	7.64	9.80
AD	2.44	4.88	11.72	20.08	25.24	23.56	9.48	2.44	0.16		
	Procentowy rozkład ocen dla $n = 100$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	1.54	5.78	12.40	19.64	23.52	24.72	10.76	1.64			
MM	1.54	5.98	12.14	19.26	23.16	22.74	12.12	3.06			
MS	1.68	6.48	13.14	19.72	23.92	21.54	10.86	2.32	0.34		
LS	1.58	6.26	12.80	19.72	24.50	22.26	10.66	2.12	0.10		
GC	1.16	2.66	5.80	10.02	13.78	14.96	10.96	9.16	9.40	10.20	11.90
AD	1.38	5.50	11.84	19.76	24.72	24.48	10.38	1.88	0.06		

Tablice 4.4 i 4.5 przedstawiają wyniki dla pierwszej serii eksperymentów z jednostajnym rozkładem punktów. Tablica 4.4 zawiera średnie rozkłady ocen dla poszczególnych rozwiązań. Obserwujemy tam dość wysoki procent dużych odległości w rozwiązaniu GC. Rozwiązania MM i LM minimalizują maksymalną odległość. Rozwiązanie LM minimalizuje jednak dodatkowo liczbę wystąpień odległości maksymalnych. Rozwiązanie MS wydaje się maksymalizować liczbę wystąpień najmniejszych odległości, pozwalając pewnym ocenom przekraczać wartość minimaksymalną. Rozwiązanie LS jest podobne do MS, ale wydaje się zwracać większą uwagę na minimalizację największych odległości.

Tablica 4.5 przedstawia koincydencję rozwiązań, czyli procent przypadków, gdy rozwiązania były identyczne. Oprócz koincydencji poszczególnych par rozwiązań podano tam też procentową zgodność wszystkich rozwiązań (ALL). Ze względu na jednostajny rozkład punktów, można tu zaobserwować względnie wysoką koincy-

Tablica 4.5

Koincydencja rozwiązań dla problemu z jednostajnym rozkładem punktów

Tablica 4.5:

	$n = 30$					$n = 50$					$n = 100$				
Rozw.	LM	MM	MS	LS	GC	LM	MM	MS	LS	GC	LM	MM	MS	LS	GC
AD	72	56	40	60	34	62	44	32	52	30	62	28	28	38	32
GC	32	28	18	28		28	16	6	16		24	14	14	18	
LS	76	60	74			56	38	72			48	20	74		
MS	52	42				34	28				38	20			
MM	68					64					38				
ALL	16					4					6				

dencję rozwiązań dla wszystkich par. Koincydencja wszystkich rozwiązań jest jednak niska.

Tablice 4.6 i 4.7 przedstawiają wyniki dla drugiej serii eksperymentów z izolowanym punktem (100,100). W tej serii eksperymentów rozwiązanie GC zawsze polegało na wyborze lokalizacji w izolowanym punkcie (100,100), a AD wybierało ten punkt w 40–88% przypadków, zależnie od rozmiaru problemu. Wszystkie pozostałe rozwiązania zawsze wybierały pewną lokalizację w trójkącie (0,0), (100,0), (0,100). W tej serii eksperymentów sześć rozważanych rozwiązań wyraźnie podzieliło się na trzy pary względnie podobnych rozwiązań: LM i MM, MS i LS oraz AD i GC (por. tab. 4.7). Jednak nadal można zaobserwować różnice w średnich rozkładach ocen (por. tab. 4.6) pomiędzy rozwiązaniami LM a MM i odpowiednio pomiędzy rozwiązaniami LS a MS. □

Stosując metodę wag (1.19) do zadania (4.54) otrzymujemy parametryczne zadanie postaci

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.61}$$

Zauważmy, że na mocy definicji operatora $\bar{\Theta}$ zadanie to jest równoważne zastosowaniu do wielokryterialnego problemu (1.7) operatora agregacji OWA (4.15) z odpowiednio zmodyfikowanymi wagami. Zadanie (4.61) może być zapisane w postaci

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} \bar{w}_i \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.62}$$

gdzie $\bar{w}_i = \sum_{j=i}^{m} w_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4.22 *Jeżeli wagi w_i spełniają warunek*

$$w_1 > w_2 > \cdots > w_{m-1} > w_m > 0 \tag{4.63}$$

to każde rozwiązanie optymalne odpowiedniego problemu OWA (4.15) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem problemu wielokryterialnego (1.7).

Dowód. Zadanie (4.15) z wagami w_i można zapisać w postaci

Tablica 4.6

Średni rozkład ocen dla problemu z izolowanym punktem

Tablica 4.6:

	Procentowy rozkład ocen dla $n = 30$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	4.33	7.73	13.33	20.00	19.87	17.53	10.07	4.73	2.26	0.13	
MM	4.00	8.20	13.20	18.27	18.40	17.20	11.20	5.80	3.60	0.13	
MS	5.00	15.53	18.33	19.07	16.60	10.53	6.93	2.73	2.33	2.20	0.73
LS	4.87	12.73	18.20	20.80	18.33	11.87	6.33	2.20	2.33	1.80	0.53
GC	3.33							2.40	16.93	24.47	46.87
AD	3.47	2.67	6.80	10.07	10.60	8.33	3.00	2.47	9.87	14.07	28.65
	Procentowy rozkład ocen dla $n = 50$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	2.68	7.28	12.40	20.28	22.92	18.92	10.44	4.20	0.88		
MM	2.80	7.32	12.56	19.16	22.56	17.16	11.44	5.36	1.64		
MS	3.60	14.32	21.40	19.04	17.04	11.56	6.60	2.60	1.60	1.76	0.48
LS	3.32	11.92	20.08	22.28	18.00	12.56	6.80	2.28	1.24	1.24	0.28
GC	2.00							2.60	15.36	26.20	53.84
AD	2.04	1.40	5.04	9.92	9.76	7.60	3.76	2.64	9.88	15.80	32.16
	Procentowy rozkład ocen dla $n = 100$										
Rozw.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100+
LM	1.66	6.64	11.96	18.42	23.44	20.78	12.26	4.70	0.14		
MM	1.66	6.72	12.00	18.24	23.08	20.24	12.30	5.34	0.42		
MS	2.48	13.66	22.56	20.60	16.90	12.44	5.86	2.78	1.52	1.04	0.16
LS	2.30	12.16	21.90	21.40	18.42	14.16	5.44	2.16	1.10	0.90	0.06
GC	1.00							2.88	15.50	26.36	54.26
AD	1.04	0.60	1.42	2.94	2.76	2.60	1.16	2.78	13.94	23.18	47.58

Tablica 4.7

Koincydencja rozwiązań dla problemu z izolowanym punktem

Tablica 4.7:

	$n = 30$					$n = 50$					$n = 100$				
Rozw.	LM	MM	MS	LS	GC	LM	MM	MS	LS	GC	LM	MM	MS	LS	GC
AD	16	10	2	6	54	26	16	2	2	40	6	2	0	0	88
GC	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0	
LS	12	6	54			6	0	62			0	0	48		
MS	6	4				2	0				0	0			
MM	68					58					68				
ALL	0					0					0				

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} w'_i \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

gdzie współczynniki w'_i są określone jako $w'_m = w_m$ i $w'_i = w_i - w_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Jeżeli spełniony jest warunek (4.63), to $w'_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zatem, na mocy wniosków 1.15 i 4.38, rozwiązanie optymalne zadania (4.15) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7). ■

Twierdzenie 4.23 *Dla każdego* $\mathbf{x}^0$ *wyrównująco efektywnego rozwiązania zadania WPL istnieją wagi* $w_1 > w_2 > \cdots > w_{m-1} > w_m > 0$ *takie, że* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania OWA (4.15).*

Dowód. Na mocy wniosku 4.38 $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym wielokryterialnego zadania programowania liniowego (4.55)–(4.58). Na mocy twierdzenia 1.9 istnieją wtedy dodatnie wagi w'_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ takie, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.61). Zatem $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania OWA (4.15) z wagami $w_i = \sum_{j=i}^{m} w'_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ■

Zauważmy, że w przypadku wag w_i spełniających warunek (4.63), dla dowolnej permutacji τ zbioru I prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \le \sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(\mathbf{y})$$

Zatem zadanie wyznaczenia rozwiązania wyrównująco efektywnego za pomocą techniki OWA może być implementowane przez dodanie do ograniczeń zadania $m!$ nierówności liniowych, czyli w postaci zadania

$$\min \ z \tag{4.64}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{4.65}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.66}$$

$$z \ge \sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \quad \text{dla } \tau \in \Pi \tag{4.67}$$

gdzie Π jest zbiorem wszystkich permutacji τ zbioru indeksów I. Dla zadań WPL odpowiednie zadania (4.64)–(4.67) są zadaniami programowania liniowego. W praktyce taki zapis zadania (4.61) jest użyteczny jedynie w przypadku niewielkiej liczby funkcji oceny.

Niestety technika agregacji OWA z malejącymi wagami nie stanowi — w ogólnym przypadku — zupełnej parametryzacji całego zbioru rozwiązań wyrównująco efektywnych. Wynika to ze specyfiki podejścia ważenia ocen do problemów wielokryterialnych (por. przykład 1.2). W przypadku wielokryterialnych problemów dyskretnych (jak problem lokalizacji (4.3)–(4.4)) istnieją rozwiązania wyrównująco efektywne, które nie mogą być wygenerowane jako rozwiązania optymalne problemu (4.15) dla żadnego zbioru dodatnich wag. Pokażemy to na małym przykładzie.

Przykład 4.6. Rozpatrzmy problem umiejscowienia pojedynczego obiektu w jednej z trzech potencjalnych lokalizacji (P1, P2 i P3) do obsługi dwóch klientów (C1 i C2). Odległości pomiędzy poszczególnymi klientami i potencjalnymi lokalizacjami są następujące: $d_{11} = 15$, $d_{12} = 14$, $d_{13} = 13$, $d_{21} = 8$, $d_{22} = 11$, $d_{23} = 13$.

Zauważmy, że wszystkie trzy rozwiązania dopuszczalne są efektywne w standardowym sensie i jednocześnie wyrównująco efektywne. Łatwo sprawdzić, że stosując agregację OWA nie można wybrać lokalizacji P2 dla żadnego zbioru dodatnich wag. Żeby lokalizacja P2 była rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15), współczynniki wagowe muszą spełniać nierówności: $w_1 \geq 3w_2$ i $2w_2 \geq w_1$, co nie jest możliwe przy $w_1 > w_2 > 0$. Faktycznie, jeżeli $2w_1 < 5w_2$, to lokalizacja P1 jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). Jeżeli $2w_1 > 5w_2$, to lokalizacja P3 jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). W końcu, gdy $2w_1 = 5w_2$, wtedy obie lokalizacje P1 i P3 są optymalne. Lokalizacja P2 nigdy nie jest rozwiązaniem optymalnym problemu (4.15). □

Zupełną parametryzację zbioru rozwiązań wyrównująco efektywnych można otrzymać stosując metody punktu referencyjnego do zadania (4.54). Stosując parametryzację (3.4) do zadania (4.54) otrzymujemy

$$\text{lexmin } \{(\max_{i=1,\dots,m} s_i(a_i, \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) : \mathbf{x} \in Q\},\ \mathbf{a} \in Y \qquad (4.68)$$

Bezpośrednio z wniosków 4.38, 3.1 i twierdzenia 3.2 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.43 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i rozwiązanie optymalne zadania (4.68) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.44 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a} \in Y$ funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to każde wyrównująco efektywne rozwiązanie $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.68) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.*

Wniosek 4.45 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a} \in Y$ funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to dla dowolnego wyrównująco efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji $\mathbf{a}^0 \in Y$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.68).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne wektora aspiracji $\mathbf{a}$, użytego w parametryzacji (4.68), odpowiadają współrzędnym skumulowanego uporządkowanego wektora ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. W szczególności, dla wyznaczenia wyrównująco efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ za pomocą parametryzacji (4.68), jako wektor aspiracji należy przyjąć $\mathbf{a}^0 = \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Tym samym, można ograniczyć się do używania tylko wektorów aspiracji reprezentujących pewne skumulowane uporządkowane wektory ocen. Relacja preferencji parametryzacji (4.68) z wektorem aspiracji $\mathbf{a} = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnego $\mathbf{y}^a \in Y$ spełnia następujący odpowiednik warunku (3.1)

$$(\bar{\Theta}(\mathbf{y}) \not\leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a) \quad \text{i} \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}) \neq \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.69}$$

Oznacza to, że każdy wektor $\mathbf{y}^a$ taki, że $\mathbf{a} = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a)$, jest preferowany w stosunku do dowolnego wektora ocen $\mathbf{y} \not\preceq_w \mathbf{y}^a$, czyli

$$\mathbf{y} \not\preceq_w \mathbf{y}^a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.70}$$

Twierdzenie 4.24 *Jeżeli wektor aspiracji $\mathbf{a} = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnego $\mathbf{y}^a \in Y$, funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to relacja preferencji definiowana przez minimalizację leksykograficzną (4.68) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna i anonimowa oraz spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących i warunek (4.69).*

Dowód. Jeżeli $\mathbf{a} = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnego $\mathbf{y}^a \in Y$, to minimalizacja (4.68) jest to równoważna następującemu zadaniu

$$\text{lexmin}\ \{(\max_{i=1,\ldots,m} s_i(\bar{\theta}_i(\mathbf{y}^a), \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{i=1}^{m} s_i(\bar{\theta}_i(\mathbf{y}^a), \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) \ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.71}$$

Zwrotność i przechodniość relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.71) jest oczywista. Anonimowość relacji wynika z użycia operatora $\bar{\Theta}$.

Dla wykazania ścisłej monotoniczności i warunku przesunięć wyrównujących zauważmy, że relacja (4.47) jest wyrównująco racjonalną relacją preferencji, czyli dla dowolnego $i \in I$ prawdziwe są zależności

$$\begin{aligned} & & \bar{\Theta}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) &\leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}) & &\text{dla } \varepsilon > 0 \\ y_{i'} > y_{i''} & \quad \Rightarrow & \bar{\Theta}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) &\leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}) & &\text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''} \end{aligned}$$

Stąd na mocy wniosków 1.21 i 1.2 stwierdzamy, że relacja preferencji definiowana przez minimalizację (4.71) jest ściśle monotoniczna i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących. Dalej, na mocy twierdzenia 1.11, prawdziwa jest implikacja

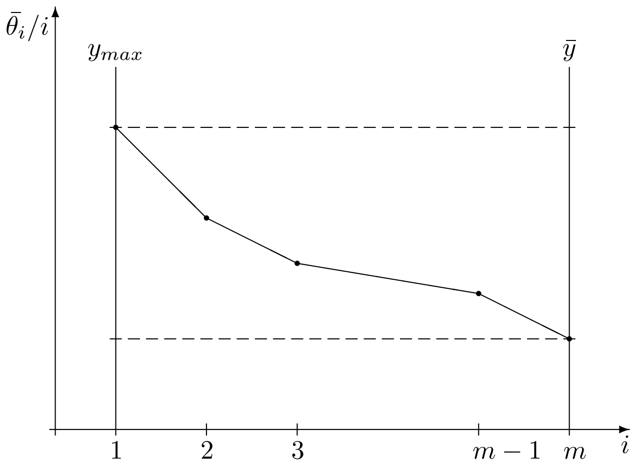
$$\bar{\Theta}(\mathbf{y}) \not\leqq \bar{\Theta}(\mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y}$$

czyli warunek (4.69). ■

Wielkości $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})/i$ wyrażają częściowe średnie początkowych i współrzędnych uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{y})$. Mogą być zatem interpretowane graficznie za pomocą nierosnących łamanych, jak na rysunku 4.8. Taka interpretacja graficzna dostarcza wygodnego interfejsu graficznego dla interaktywnej analizy opartej na parametryzacji (4.68).

4.2.3 Podejście dystrybucyjne

W podrozdziale 4.1 pokazaliśmy, że w przypadku skończonego dyskretnego zbioru wartości ocen V wielokryterialny problem minimalizacji uporządkowanych wektorów ocen (4.14) jest równoważny wielokryterialnemu problemowi dystrybucyjnemu (4.30) z indywidualnymi funkcjami $\bar{h}_k$ określonymi wzorami (4.25)–(4.27). Podobny wynik można wyprowadzić dla wielokryterialnego problemu minimalizacji skumulowanych uporządkowanych wektorów ocen (4.54). Niech $V =$



Rysunek 4.8:
Rys. 4.8. Wykres $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})/i$

$\{v_0, v_1, \ldots, v_r\}$ ($v_0 > v_1 > \cdots > v_r$) oznacza zbiór wszystkich możliwych różnych wartości funkcji oceny f_i dla $\mathbf{x} \in Q$, czyli $A \subset V^m \subset Y$. Jak w podrozdziale 4.1, niech funkcje $h_k(\mathbf{y})$ ($k = 0, 1, \ldots, r$) wyrażają liczbę wartości v_k występujących w wektorze ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, a funkcje $\bar{h}_k(\mathbf{y})$ ($k = 1, 2, \ldots, r$) stanowią skumulowane funkcje rozkładu (4.27), wyrażające liczbę ocen większych od v_k. Dla uwzględnienia wartości współczynników v_k i kumulacji w operatorze $\bar{\Theta}$ do wektora $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ zastosujemy dodatkowo liniowy operator ważonej kumulacji $\Gamma^v = (\gamma_1^v, \gamma_2^v, \ldots, \gamma_r^v)$, gdzie dla $\mathbf{q} \in R^r$

$$\gamma_k^v(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^{k} (v_{l-1} - v_l) q_l \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, r \tag{4.72}$$

W ten sposób otrzymujemy funkcję wektorową $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \Gamma^v(\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}))$, której poszczególne współrzędne są funkcjami postaci

$$\hat{h}_k(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{k} (v_{l-1} - v_l) \bar{h}_l(\mathbf{y}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, r \tag{4.73}$$

Zauważmy, że

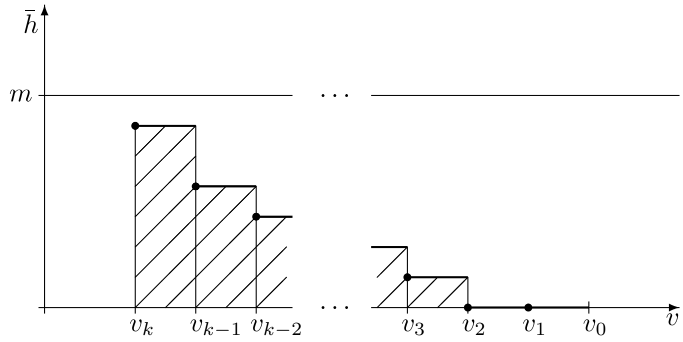
$$\hat{h}_k(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{k} [(v_{l-1} - v_l) \sum_{j=0}^{l-1} h_j(\mathbf{y})] = \sum_{l=0}^{k-1} (v_l - v_k) h_l(\mathbf{y}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, r \tag{4.74}$$

czyli $\hat{h}_k(\mathbf{y})$ wyraża sumę różnic pomiędzy ocenami y_i większymi od v_k i wartością v_k. Ponieważ $(v_l - v_k) > 0$ dla $0 \leq l < k$, to z (4.74) wynika, że funkcja wektorowa $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ jednoznacznie opisuje rozkład wartości współrzędnych wektora ocen $\mathbf{y}$, jako że dla dowolnych $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in V^m$

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}') = \mathbf{h}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') = \Theta(\mathbf{y}'') \tag{4.75}$$

Zależność (4.74) pozwala też na bezpośrednie wyrażenie $\hat{h}_k(\mathbf{y})$ jako kawałkami liniowej funkcji wektora ocen $\mathbf{y}$

$$\hat{h}_k(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - v_k)_+ \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, r \tag{4.76}$$



Rysunek 4.9:
Rys. 4.9. $\hat{h}_k(\mathbf{y})$ jako pole obszaru pod wykresem $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że istnieje możliwość zdefiniowania wartości $\bar{h}_v(\mathbf{y})$ dla dowolnego $v \in R$ jako liczby ocen y_i większych od v (por. (4.31)). Schodkowy wykres $(v, \bar{h}_v(\mathbf{y}))$ odpowiada wtedy wykresowi "odwróconej" dystrybuanty rozkładu wartości y_i. Wielkość $\hat{h}_k(\mathbf{y})$ dla $k = 1, 2, \ldots, r$ może być interpretowana jako pole obszaru pod wykresem $(v, \bar{h}_v(\mathbf{y}))$ dla $v \geq v_k$ (por. rys 4.9). Podobnie wzór 4.74 pozwala na łatwe zdefiniowanie wartości $\hat{h}_v(\mathbf{y})$ dla dowolnego $v \in R$ jako

$$\hat{h}_v(\mathbf{y}) = \sum_{k: v_k > v} (v_k - v) h_k(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - v)_+ \tag{4.77}$$

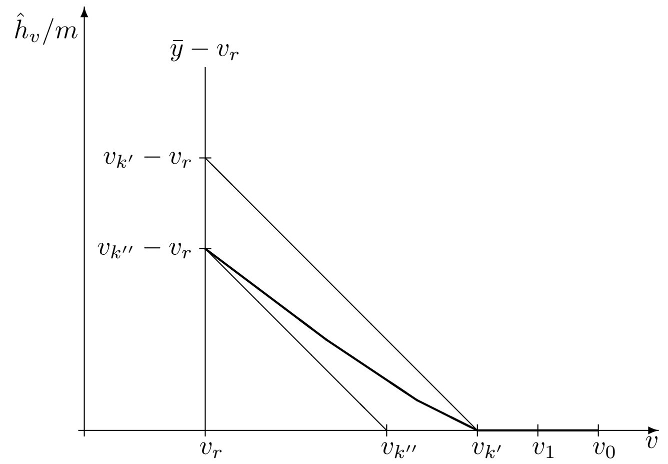
Rysunek 4.10 przedstawia wykres $(v, \hat{h}_v(\mathbf{y})/m)$. Zauważmy, że dla $v_r \leq v \leq v_0$ jest to krzywa (łamana) wypukła pokrywająca się z osią v dla $v \geq \theta_1(\mathbf{y})$ i przechodząca przez punkt $(v_r, \bar{y} - v_r)$, gdzie $\bar{y}$ jest średnią arytmetyczną ocen y_i. Tak więc przebieg krzywej $(v, \hat{h}_v(\mathbf{y})/m)$ jest wstępnie określony przez wartości maksymalnej i średniej oceny, ale ostateczny kształt krzywej zależy od całego rozkładu wartości współrzędnych y_i. W modelach probabilistycznych dominacja wektorów $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ jest nazywana dominacją stochastyczną drugiego rzędu (Levy, 1992).

Rozpatrzmy problem wielokryterialny

$$\min \{(\hat{h}_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \hat{h}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \hat{h}_r(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{4.78}$$

Okazuje się, że wyrównująca dominacja wektorów ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla zadania wielokryterialnego (1.7) jest równoważna standardowej dominacji wektorów ocen $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = (\hat{h}_1(\mathbf{y}), \hat{h}_2(\mathbf{y}), \ldots, \hat{h}_r(\mathbf{y}))$ dla wielokryterialnego zadania (4.78).

Twierdzenie 4.25 *Wektor ocen $\mathbf{y}' \in V^m$ dominuje wyrównująco $\mathbf{y}'' \in V^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$.*



Rysunek 4.10:
Rys. 4.10. Wykres $\hat{h}_v(\mathbf{y})/m$

Dowód. Jeżeli wektor ocen $\mathbf{y}' \in Y$ dominuje wyrównująco $\mathbf{y}'' \in Y$, to istnieje skończony ciąg wektorów $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}'', \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{y}^t = \mathbf{y}'$ taki, że $\mathbf{y}^k \in Y$ dla $k = 1, 2, \ldots, t$ oraz $\Theta(\mathbf{y}^k) \leq \Theta(\mathbf{y}^{k-1})$ lub $\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^{k-1} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$ dla $0 < \varepsilon < y_{i'}^{k-1} - y_{i''}^{k-1}$

Zauważmy, że na mocy (4.73) dla dowolnego wektora $\mathbf{u} \in Y$

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) \leqq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{u}) \quad \text{dla } 0 < \varepsilon < u_{i'} - u_{i''}$$

i dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}'' \in Y$

$$\Theta(\mathbf{u}') \leq \Theta(\mathbf{u}'') \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{u}') \leqq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{u}'')$$

Zatem $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^k) \leqq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^{k-1})$ dla $k = 1, 2, \ldots, t$ i, co za tym idzie, $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leqq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. Jednocześnie na mocy (4.75), $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \neq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$, czyli $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. Tak więc z wyrównującego dominowania wektora $\mathbf{y}''$ przez wektor $\mathbf{y}'$ wynika nierówność $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$.

Niech $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. Pokażemy, że $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$. Przypuśćmy, że $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \not\leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$. Jeżeli $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') = \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$, to z (4.45) i (4.75) otrzymujemy $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$, co przeczy $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. Pozostaje zatem przypadek, gdy $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \not\leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ i $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \neq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$. Istnieje wtedy indeks i_0 $(1 \leq i_0 \leq m)$ taki, że $\bar{\theta}_{i_0}(\mathbf{y}') > \bar{\theta}_{i_0}(\mathbf{y}'')$ i $\bar{\theta}_i(\mathbf{y}') = \bar{\theta}_i(\mathbf{y}'')$ dla $1 \leq i < i_0$. Niech k_0 oznacza indeks taki, że $\bar{\theta}_{i_0}(\mathbf{y}') = v_{k_0}$. Zauważmy, że $0 \leq k_0 \leq r - 1$ oraz $h_{k_0}(\mathbf{y}') > h_{k_0}(\mathbf{y}'')$ i $h_k(\mathbf{y}') = h_k(\mathbf{y}'')$ dla $0 \leq k < k_0$. Stąd, na mocy (4.74) otrzymujemy $\hat{h}_{k_0+1}(\mathbf{y}') > \hat{h}_{k_0+1}(\mathbf{y}'')$, co przeczy $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$. Zatem z nierówności $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'')$ wynika nierówność $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ i na mocy twierdzenia 4.24 wektor ocen $\mathbf{y}'$ wyrównująco dominuje $\mathbf{y}''$. ■

Wniosek 4.46 *Dla dowolnych wektorów ocen* $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in V^m$

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}') \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \leq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$$

Wniosek 4.47 *Jeżeli $A \subset V^m$, to rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (4.78).*

Zauważmy, że $\hat{h}_r(\mathbf{y}) + mv_r = \sum_{i=1}^m y_i$, czyli minimalizacja sumy oryginalnych funkcji oceny problemu (1.7) (skalaryzacja (1.18)) jest równoważna minimalizacji ostatniej pojedynczej funkcji oceny w zadaniu (4.78). Natomiast suma wartości bewzględnych wszystkich różnic między ocenami (4.39) wyraża się jako

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |y_i - y_j| = 2\sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{y})\hat{h}_k(\mathbf{y})$$

czyli jest kombinacją liniową o zmiennych współczynnikach funkcji oceny z zadania (4.78). Zatem minimalizacja (4.39) nie może być traktowana jako poprawna skalaryzacja wielokryterialnego zadania (4.78).

Zupełną parametryzację zbioru rozwiązań wyrównująco efektywnych można otrzymać stosując metody punktu referencyjnego do zadania (4.78). Stosując parametryzację (3.4) do zadania (4.78) otrzymujemy

$$\operatorname{lexmin} \{ (\max_{k=1,\ldots,r} s_k(q_k^a, \hat{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{k=1}^r s_k(q_k^a, \hat{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) : \mathbf{x} \in Q\},\ \mathbf{q}^a \in R^r \quad (4.79)$$

gdzie $s_k : R \times R \to R$. Bezpośrednio z wniosków 4.47, 3.1 i twierdzenia 3.2 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.48 *Jeżeli $A \subset V^m$ i funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k, to rozwiązanie optymalne zadania (4.79) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1.7).*

Wniosek 4.49 *Jeżeli $A \subset V^m$ oraz dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{q}^a \in R^r$ funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek (4.35), to każde wyrównująco efektywne rozwiązanie $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.79) dla wektora aspiracji $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.*

Wniosek 4.50 *Jeżeli $A \subset V^m$ oraz dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{q}^a \in R^r$ funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek (4.35), to dla dowolnego wyrównująco efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji $\bar{\mathbf{q}}^a \in R^r$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.79).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne wektora aspiracji $\mathbf{q}^a$ użytego w parametryzacji (4.79) odpowiadają współrzędnym wektora $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. W szczególności, dla wyznaczenia wyrównująco efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ za pomocą parametryzacji (4.79), jako wektor aspiracji powinno być przyjęte $\bar{\mathbf{q}}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Tym samym, w czasie analizy interaktywnej można używać jedynie wektorów aspiracji postaci $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnych $\mathbf{y}^a \in Y$. Podejście takie prowadzi do interaktywnej metody referencyjnej dystrybucji jako uogólnienia metody punktu referencyjnego dla zadań z jednorodnymi ocenami. Przedstawiona na rysunku 4.10 graficzna reprezentacja wektorów ocen $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ w postaci wykresów krzywych $(v, \hat{h}_v(\mathbf{y})/m)$ dostarcza interfejsu graficznego do prowadzenia analizy interaktywnej w ramach odpowiedniego systemu wspomagania decyzji.

W przypadku stosowania wektorów aspiracji postaci $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnych $\mathbf{y}^a \in Y$, relacja preferencji parametryzacji (4.34) spełnia warunek (4.69) dla każdego wektora $\mathbf{y}^a \in Y$ takiego, że $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$. Oznacza to, że każdy wektor $\mathbf{y}^a$ taki, że $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$, jest preferowany w stosunku do dowolnego wektora ocen $\mathbf{y} \not\preceq_w \mathbf{y}^a$, czyli

$$\mathbf{y} \not\preceq_w \mathbf{y}^a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y} \tag{4.80}$$

Twierdzenie 4.26 *Jeżeli $A \subset V^m$, wektor aspiracji $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnego $\mathbf{y}^a \in Y$ oraz funkcje $s_k(q_k^a, q_k)$ są ściśle rosnące po q_k i spełniają warunek (4.35), to relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną minimalizację (4.79) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna i anonimowa oraz spełnia warunek przesunięć wyrównujących i warunek (4.69).*

Dowód. Jeżeli $\mathbf{q}^a = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a)$ dla pewnego $\mathbf{y}^a \in Y$, to minimalizacja (4.79) jest równoważna następującemu zadaniu

$$\operatorname{lexmin} \{ (\max_{k=1,\ldots,r} s_k(\hat{h}_k(\mathbf{y}^a), \hat{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{k=1}^{r} s_k(\hat{h}_k(\mathbf{y}^a), \hat{h}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) : \mathbf{x} \in Q \} \tag{4.81}$$

Zwrotność i przechodniość relacji preferencji definiowanej przez minimalizację (4.81) jest oczywista. Anonimowość relacji wynika z użycia operatora $\hat{\mathbf{h}}$.

Dla wykazania ścisłej monotoniczności i warunku przesunięć wyrównujących zauważmy, że na mocy wniosku 4.46 prawdziwe są zależności

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_i) \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \quad \text{dla } \varepsilon > 0 \\ y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad & \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) \leq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \quad \text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''} \end{aligned}$$

Stąd, na mocy wniosków 1.21 i 1.2, stwierdzamy, że relacja preferencji definiowana przez minimalizację (4.81) jest ściśle monotoniczna i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących.

Dalej, na mocy twierdzenia 1.11, prawdziwa jest implikacja

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \ngeqq \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{y}^a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^a \prec \mathbf{y}$$

Stąd, na mocy wniosku 4.46 i zależności (4.75), otrzymujemy warunek (4.69). ■

4.3 Leksykograficzna metoda punktu referencyjnego

Rozważane w podrozdziale 3.1 metody punktu referencyjnego wyznaczania rozwiązań efektywnych zadania wielokryterialnego (1.7) można interpretować jako stosowanie minimaksowej skalaryzacji (1.36) do zadania o parametrycznych funkcjach oceny $s_i(a_i, f_i(\mathbf{x}))$ lub $s_i(a_i, r_i, f_i(\mathbf{x}))$ w przypadku przedziałowej metody punktu referencyjnego. Oznacza to, że skalaryzacja (1.36) jest tam używana do wyznaczania rozwiązań efektywnych parametrycznych zadań wielokryterialnych

$$\min \{\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x}\in Q\}, \qquad \mathbf{a}\in Y \tag{4.82}$$

gdzie

$$\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (s_1(a_1,f_1(\mathbf{x})), s_2(a_2,f_2(\mathbf{x})),\ldots,s_m(a_m,f_m(\mathbf{x}))) \tag{4.83}$$

lub odpowiednio

$$\min \{\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{r},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x}\in Q\}, \qquad \mathbf{a}<\mathbf{r}, \quad \mathbf{a},\mathbf{r}\in Y \tag{4.84}$$

gdzie

$$\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{r},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (s_1(a_1,r_1,f_1(\mathbf{x})), s_2(a_2,r_2,f_2(\mathbf{x})),\ldots,s_m(a_m,r_m,f_m(\mathbf{x}))) \tag{4.85}$$

Wprowadzone w problemach (4.82) i (4.84) funkcje oceny s_i oceniają wartości oryginalnych funkcji oceny f_i w terminach modelu preferencji określonego przez przyjęte poziomy aspiracji i rezerwacji (lub współczynniki skalujące). Co więcej, wyraźnie dąży się do tego, żeby funkcje s_i mierzyły indywidualne oceny w tej samej skali. Najlepiej jest to widoczne w przedziałowej metodzie punktu referencyjnego, gdzie funkcje s_i są tak konstruowane, by zagwarantować spełnienie warunku

$$s_i(a_i,r_i,a_i)=0, \quad s_i(a_i,r_i,r_i)=1 \quad \text{dla } i=1,2,\ldots,m$$

Zatem zadania wielokryterialne (4.82) i (4.84) leżące u podstaw metod punktu referencyjnego należą do klasy rozważanych w dwóch wcześniejszych podrozdziałach zadań z jednakowo ważnymi ocenami jednorodnymi. Pojawia się tu naturalne pytanie, czy model preferencji standardowych metod punktu referencyjnego uwzględnia elementy równości funkcji oceny s_i w zadaniach (4.82) i (4.84).

W metodach punktu referencyjnego funkcje s_i są agregowane za pomocą regularyzowanej skalaryzacji minimaksowej (1.36). Zatem, zgodnie z twierdzeniem 4.6, model preferencji metod punktu referencyjnego spełnia warunek anonimowości (4.1) w odniesieniu do zadań (4.82) i (4.84). Natomiast nie jest spełniony aksjomat przesunięć wyrównujących. Stosowanie pewnej regularyzacji skalaryzacji minimaksowej jest istotne dla spełnienia warunku (3.1), podstawowego w podejściu quasi–zadowalającym, o postaci

$$\mathbf{y} \ngeqq \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y}$$

Zamiast regularyzowanej skalaryzacji minimaksowej (1.36) można jednak użyć minimaksymalizacji leksykograficznej (1.38), która również jest regularyzacją skalaryzacji minimaksowej (1.21) i jednocześnie definiuje wyrównująco racjonalną relację preferencji (por. twierdzenie 4.21). Stosując minimaksymalizację leksykograficzną (1.38) do zadania (4.82) otrzymujemy parametryzację

$$\operatorname{lexmin} \{\Theta(\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \;:\; \mathbf{x}\in Q\}, \qquad \mathbf{a}\in Y \tag{4.86}$$

Metodę punktu referencyjnego opartą na parametryzacji (4.86) będziemy nazywać *leksykograficzną metodą punktu referencyjnego*. Leksykograficzna metoda punktu referencyjnego zachowuje istotne własności standardowych metod punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4). Z wniosku 1.26 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.51 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i rozwiązanie optymalne zadania (4.86) jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego (1.7).*

Ponadto prawdziwe są następujące odpowiedniki twierdzeń 3.1 i 3.2 oraz wynikających z nich wniosków.

Twierdzenie 4.27 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (3.6) relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.86) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna oraz spełnia warunek (3.1).*

Dowód. Zwrotność, przechodniość i ścisła monotoniczność definiowanej przez minimalizację (4.86) relacji preferencji

$$\mathbf{y}' \preceq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{s}(\mathbf{a}, \mathbf{y}')) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{s}(\mathbf{a}, \mathbf{y}''))$$

wynika bezpośrednio ze ścisłej monotoniczności funkcji $s_i(a_i, y_i)$ względem y_i (por. wniosek 1.26). Zauważmy, że $\theta_1(\mathbf{s}(\mathbf{a}, \mathbf{y})) = \max_{i=1,\dots,m} s_i(a_i, y_i)$. Zatem, na mocy twierdzenia 1.11, prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{y} \not\gneqq \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{y}$$

co oznacza spełnienie warunku (3.1). ∎

Twierdzenie 4.28 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a} \in Y$ funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i i spełniają warunek (3.6), to każde rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1.7) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.86) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.*

Dowód. Niech $\mathbf{x}^0$ będzie rozwiązaniem efektywnym zadania (1.7). Przypuśćmy, że $\mathbf{x}^0$ nie jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.86) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Istnieje wtedy wektor $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\Theta(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}))) <_{lex} \Theta(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)))$.

Zauważmy, że na mocy warunku (3.6)

$$\theta_1(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}^0))) = \theta_2(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}^0))) = \cdots = \theta_m(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)))$$

i jednocześnie

$$\theta_1(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}))) \geq \theta_2(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x}))) \geq \cdots \geq \theta_m(\mathbf{s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{f}(\mathbf{x})))$$

Zatem

$$s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x})) \leq s_i(f_i(\mathbf{x}^0), f_i(\mathbf{x}^0)) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m$$

i istnieje indeks i_0 taki, że

$$s_{i_0}(f_{i_0}(\mathbf{x}^0), f_{i_0}(\mathbf{x})) < s_{i_0}(f_{i_0}(\mathbf{x}^0), f_{i_0}(\mathbf{x}^0))$$

Ponieważ funkcje $s_i(f_i(\mathbf{x}^0), y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i, to $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^0)$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, przy czym dla indeksu i_0 zachodzi nierówność ostra. Przeczy to efektywności wektora $\mathbf{x}^0$ dla problemu (1.7). Zatem wektor $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.86) dla wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. ∎

Wniosek 4.52 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji* $\mathbf{a} \in Y$ *funkcje* $s_i(a_i, y_i)$ *są ściśle rosnące względem* y_i *i spełniają warunek (3.6), to dla dowolnego rozwiązania efektywnego* $\mathbf{x}^0$ *zadania wielokryterialnego (1.7) istnieje wektor poziomów aspiracji* $\mathbf{a}^0 \in Y$ *taki, że* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (4.86).*

Leksykograficzna metoda punktu referencyjnego nie tylko spełnia wszystkie podstawowe wymagania dla metod punktu referencyjnego, ale również ma pewne dodatkowe zalety w porównaniu ze standardowymi metodami opartymi na parametryzacji (3.4). Omawiając własności modelu LRPC w podrozdziale 3.1 zwracaliśmy uwagę na fakt, że racjonalne relacje preferencji spełniające warunek (3.34), czyli

$$y_{i'} > a_{i'} \quad \text{i} \quad y_{i''} < a_{i''} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} - \varepsilon' \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon'' \mathbf{e}_{i''} \prec \mathbf{y}$$
$$\text{dla} \quad 0 < \varepsilon' \leq y_{i'} - a_{i'}, \ 0 \leq \varepsilon'' \leq a_{i''} - y_{i''}$$

lepiej odzwierciedlają znaczenie poziomów aspiracji w quasi–zadowalającym modelu decyzyjnym niż relacje spełniające jedynie warunek (3.1). Warunki te są sobie równoważne w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni ocen Y ($m = 2$). W przypadku większej liczby funkcji oceny warunek (3.34) jest silniejszy od warunku (3.1), jako że każda racjonalna relacja preferencji posiadająca własność (3.34) spełnia następujące uogólnienie warunku (3.1)

$$(y_i)_{i \in J} \not\leqq (a_i)_{i \in J} \quad \Rightarrow \quad [(a_i)_{i \in J}, (y_i)_{i \in I \setminus J}] \prec \mathbf{y} \quad \text{dla } J \subset I \tag{4.87}$$

Warunek (4.87) oznacza, że dla dowolnego podzbioru J zbioru wszystkich ocen I, jeżeli przynajmniej jedna z ocen y_i, $i \in J$, jest większa od swojego poziomu aspiracji, to zastąpienie wszystkich ocen y_i dla $i \in J$ ich poziomami aspiracji jest preferowane w stosunku do oryginalnych wartości ocen. Warunek (3.1) jest ograniczeniem warunku (4.87) do przypadku $J = I$. Omawiane w podrozdziale 3.1 standardowe metody punktu referencyjnego oparte na parametryzacji (3.4) w ogólnym przypadku nie spełniają warunku (4.87) dla dowolnych $J \subset I$. Na przykład, w metodach punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4) z liniowymi funkcjami skalującymi (3.5) o jednostkowych współczynnikach λ_i, wektor ocen (a_1+1, a_2+1, a_3-10) jest preferowany w stosunku do wektora (a_1+1, a_2, a_3), podczas gdy preferowanie w takim wypadku wektora ocen $(a_1 + 1, a_2, a_3)$ jest zgodne z intuicyjnym pojęciem poziomów aspiracji i leżącej u podstaw podejścia quasi–zadowalającego zasady, że decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji. Model preferencji leksykograficznej metody punktu referencyjnego (4.86), w odróżnieniu od standardowych metod punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4), spełnia warunek (3.34) i, co za tym idzie, warunek (4.87) dla dowolnych $J \subset I$. Bezpośrednio z twierdzenia 1.21 wynika bowiem następujący wniosek.

Wniosek 4.53 *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji* $\mathbf{a} \in Y$ *funkcje* $s_i(a_i, y_i)$ *są ściśle rosnące względem* y_i *i spełniają warunek (3.6), to relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.86) spełnia warunek (3.34).*

Stosując skalaryzację minimaksimum leksykograficznego (1.38) do zadania (4.84) otrzymujemy parametryzację

$$\text{lexmin}\ \{\Theta(\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{r},\mathbf{f}(\mathbf{x})))\ :\ \mathbf{x}\in Q\},\qquad \mathbf{a}<\mathbf{r},\quad \mathbf{a},\mathbf{r}\in Y \tag{4.88}$$

generującą leksykograficzną przedziałową metodę punktu referencyjnego. Zauważmy, że zarówno funkcje (3.11), jak i funkcje (3.12) spełniają założenia twierdzeń 4.27 i 4.28 oraz wniosku 4.51. Otrzymujemy zatem zupełną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych, zgodną z modelem preferencji określonym postulatami **P1** i **P2** (por. rozdział 3). Ponadto, dzięki temu, że $s_i(a_i,r_i,r_i)=1$ dla $i=1,2,\ldots,m$, spełniony jest również postulat **P2a**. To znaczy, relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.88) spełnia warunek (3.8), czyli

$$\mathbf{y}\not\leqq\mathbf{r}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{r}\prec\mathbf{y}$$

Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.29 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i,r_i,y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (3.14) relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.88) spełnia warunek (3.8).*

Dowód. Zauważmy, że $\theta_1(\mathbf{s}(\mathbf{a},\mathbf{r},\mathbf{y}))=\max_{i=1,\ldots,m}\ s_i(a_i,r_i,y_i)$. Zatem, na mocy twierdzenia 1.11, prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{y}\not\leqq\mathbf{r}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{r}\prec\mathbf{y}$$

co oznacza spełnienie warunku (3.8). ∎

Relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną przedziałową metodę punktu referencyjnego spełnia również rozważany w podrozdziale 3.4 warunek (3.65), czyli

$$\begin{array}{ll} y_{i'}>r_{i'}\quad\text{i}\quad y_{i''}<r_{i''}\quad\Rightarrow & \mathbf{y}-\varepsilon'\mathbf{e}_{i'}+\varepsilon''\mathbf{e}_{i''}\prec\mathbf{y}\\ & \text{dla}\quad 0<\varepsilon'\le y_{i'}-r_{i'},\quad 0\le\varepsilon''\le r_{i''}-y_{i''}\end{array}$$

który lepiej niż warunek (3.8) odzwierciedla znaczenie poziomów rezerwacji w quasi–zadowalającym modelu decyzyjnym. Warunki te są sobie równoważne w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni ocen ($m=2$). W przypadku większej liczby funkcji oceny warunek (3.65) jest silniejszy od warunku (3.8), jako że każda racjonalna relacja preferencji posiadająca własność (3.65) spełnia następujące uogólnienie warunku (3.8)

$$(y_i)_{i\in J}\not\leqq(r_i)_{i\in J}\quad\Rightarrow\quad[(r_i)_{i\in J},(y_i)_{i\in I\setminus J}]\prec\mathbf{y}\quad\text{dla } J\subset I \tag{4.89}$$

Warunek (4.89) oznacza, że dla dowolnego podzbioru J zbioru ocen I, jeżeli przynajmniej jedna z ocen y_i, $i\in J$, jest większa od swojego poziomu rezerwacji, to zastąpienie wszystkich ocen y_i dla $i\in J$ ich poziomami rezerwacji jest preferowane w stosunku do oryginalnych wartości ocen. Warunek (3.8) jest ograniczeniem warunku (4.89) do przypadku $J=I$. Omawiane w podrozdziale 3.1 standardowe przedziałowe metody punktu referencyjnego oparte na parametryzacji (3.13) w ogólnym przypadku nie spełniają warunku (4.89) dla dowolnych $J\subset I$. Na przykład, w przedziałowych metodach punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.13) z kawałkami liniowymi funkcjami skalującymi (3.12) z $r_2 - a_2 = r_3 - a_3$ i $\gamma < 10$ wektor ocen $(r_1 + 1, r_2 + 1, r_3 - 10)$ jest preferowany w stosunku do wektora $(r_1 + 1, r_2, r_3)$, podczas gdy preferowanie w takim wypadku wektora ocen $(r_1 + 1, r_2, r_3)$ jest zgodne z intuicyjnym pojęciem poziomów rezerwacji i leżącej u podstaw podejścia quasi–zadowalającego zasady, że decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych ocen, które nie osiągnęły swoich poziomów rezerwacji. Model preferencji leksykograficznej przedziałowej metody punktu referencyjnego (4.88), w odróżnieniu od standardowych metod opartych na parametryzacji (3.13), spełnia warunek (3.65) i, co za tym idzie, warunek (4.89) dla dowolnych $J \subset I$. Bezpośrednio z twierdzenia 1.21 wynika bowiem następujący wniosek.

Wniosek 4.54 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, r_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (3.14) relacja preferencji definiowana przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.88) spełnia warunek (3.65).*

Z dotychczasowych rozważań wynika, że leksykograficzna metoda punktu referencyjnego (4.86) i leksykograficzna przedziałowa metoda punktu referencyjnego (4.88), nie wykorzystując technik programowania celowego implementują odpowiednio modele preferencji realizowane przez LRPC i LPRPC bez prioryteów (por. podrozdziały 3.3 i 3.4). O ile jednak spełnienie warunków (3.34) i odpowiednio (3.65) wynikało w modelach LRPC i LPRPC z odpowiedniej konstrukcji funkcji osiągnięcia, to w leksykograficznych metodach punktu referencyjnego są one konsekwencją ogólnej własności skalaryzacji minimaksimum leksykograficznego (twierdzenie 1.21). Dzięki temu leksykograficzne metody punktu referencyjnego rozszerzają te własności poza wektory poziomów aspiracji i rezerwacji, analogicznie jak standardowe metody punktu referencyjnego rozszerzają własności (3.1) i (3.8) (por. rozdział 3.1). W szczególności, ponieważ funkcje $s_i(a_i, r_i, y_i)$ zdefiniowane wzorem (3.11) lub (3.12) spełniają warunek

$$s_1(a_1, r_1, a_1 + t(r_1 - a_1)) = \cdots = s_m(a_m, r_m, a_m + t(r_m - a_m)) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq 1$$

to leksykograficzne przedziałowe metody punktu referencyjnego (4.88) z funkcjami (3.11) i (3.12) implementują model preferencji spełniający dla wszystkich $0 \leq t \leq 1$ i $J \subset I$ następujący warunek

$$(y_i)_{i \in J} \not\leqq (a_i + t(r_i - a_i))_{i \in J} \quad \Rightarrow \quad [(a_i + t(r_i - a_i))_{i \in J}, (y_i)_{i \in I \setminus J}] \prec \mathbf{y} \qquad (4.90)$$

Warunek (4.90) oznacza, że dla dowolnego wektora ocen postaci $\mathbf{a} + t(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, $0 \leq t \leq 1$ i dla dowolnego podzbioru J zbioru wszystkich ocen I, jeżeli przynajmniej jedna z ocen y_i, $i \in J$ jest większa od $a_i + t(r_i - a_i)$, to zastąpienie wszystkich ocen y_i dla $i \in J$ odpowiednimi wartościami $a_i + t(r_i - a_i)$ jest preferowane w stosunku do oryginalnych wartości ocen. Realizowany przez standardowe przedziałowe metody punktu referencyjnego warunek (3.15) jest ograniczeniem warunku (4.90) do przypadku $J = I$.

Rozważając różne modele preferencji na ogól ograniczamy się do ustalonej przestrzeni ocen Y. Przy analizie złożonych problemów decyzyjnych decydent często (czasowo) koncentruje uwagę na pewnym podzbiorze funkcji oceny. W takim przypadku model preferencji stanowi rodzinę relacji preferencji określonych na różnych podprzestrzeniach przestrzeni ocen. Naturalnym założeniem dotyczącym modelu preferencji jest warunek zgodności ze względu na rozszerzanie i zawężanie zbioru ocen, czyli wymaganie, aby dołączenie lub usunięcie oceny o tej samej wartości nie zmieniało relacji preferencji pomiędzy wektorami ocen.

Definicja 4.12 *Mówimy, że model preferencji $\preceq$ spełnia warunek zgodności ze względu na rozszerzanie i zawężanie zbioru ocen wtedy i tylko, gdy dla dowolnego $J \subset I$, $J \neq I$, spełniony jest warunek*

$$(y'_i)_{i \in J} \preceq (y''_i)_{i \in J} \quad \Leftrightarrow \quad [(y'_i)_{i \in J}, y^*] \preceq [(y''_i)_{i \in J}, y^*] \quad \text{dla } y^* \in R \qquad (4.91)$$

Rozważane w tej pracy skalaryzacje wielokryterialnych zadań programowania matematycznego definiują faktycznie modele preferencji będące rodzinami relacji preferencji dla dowolnych pozbiorów oryginalnego zbioru funkcji oceny I. Zauważmy, że model preferencji standardowych metod punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4) w ogólnym przypadku nie posiada własności zgodności ze względu na rozszerzanie i zawężanie zbioru ocen. Na przykład, w metodach punktu referencyjnego opartych na parametryzacji (3.4) z funkcjami skalującymi (3.5) lub (3.7) o jednostkowych współczynnikach λ_i, wektor ocen $(a_1{+}1, a_2{+}4, a_3{+}10)$ jest preferowany w stosunku do wektora $(a_1{+}3, a_2{+}3, a_3{+}10)$, podczas gdy $(a_1{+}3, a_2{+}3)$ jest preferowany w stosunku do $(a_1{+}1, a_2{+}4)$. Wady tej nie mają leksykograficzne metody punktu referencyjnego oparte na parametryzacji (4.86).

Twierdzenie 4.30 *Dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in R^k$ $(1 \leq k \leq m)$ i dowolnej liczby $u^* \in R$ prawdziwa jest zależność*

$$\Theta(\mathbf{u}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{u}', u^*) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*) \qquad (4.92)$$

Dowód. Niech i' będzie takim indeksem, że

$$\theta_i(\mathbf{u}') \geq u^* \quad \text{dla } 1 \leq i < i' \quad \text{i} \quad \theta_i(\mathbf{u}') < u^* \quad \text{dla } i' < i \leq m$$

i analogicznie, niech i'' będzie takim indeksem, że

$$\theta_i(\mathbf{u}'') \geq u^* \quad \text{dla } 1 \leq i < i'' \quad \text{i} \quad \theta_i(\mathbf{u}'') < u^* \quad \text{dla } i'' < i \leq m$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{lll} \theta_i(\mathbf{u}') = \theta_i(\mathbf{u}', u^*) \quad \text{i} \quad \theta_i(\mathbf{u}'') = \theta_i(\mathbf{u}'', u^*) & & \text{dla } 1 \leq i < \min\{i', i''\} \\ \theta_i(\mathbf{u}') = \theta_{i+1}(\mathbf{u}', u^*) \quad \text{i} \quad \theta_i(\mathbf{u}'') = \theta_{i+1}(\mathbf{u}'', u^*) & & \text{dla } \max\{i', i''\} < i \leq m \end{array}$$

z czego natychmiast wynika równoważność (4.92) w przypadku $i' = i''$.

Załóżmy, że $\Theta(\mathbf{u}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'')$. Jeżeli

$$(\theta_i(\mathbf{u}'))_{1 \leq i < \min\{i', i''\}} \;<_{lex}\; (\theta_i(\mathbf{u}''))_{1 \leq i < \min\{i', i''\}}$$

to oczywiście $\Theta(\mathbf{u}', u^*) <_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*)$. Przypuśćmy zatem, że $\theta_i(\mathbf{u}') = \theta_i(\mathbf{u}'')$ dla $1 \leq i < \min\{i', i''\}$. Wtedy $i' \leq i''$, czyli po pominięciu przypadku $i' = i''$ otrzymujemy $i' < i''$. Zatem

$$\theta_{i'}(\mathbf{u}', u^*) = u^* \leq \theta_{i'}(\mathbf{u}'', u^*) \quad \text{i} \quad \theta_{i'+1}(\mathbf{u}', u^*) < u^* \leq \theta_{i'+1}(\mathbf{u}'', u^*)$$

Stąd $\Theta(\mathbf{u}', u^*) <_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*)$, czyli prawdziwa jest implikacja

$$\Theta(\mathbf{u}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'') \quad \Rightarrow \quad \Theta(\mathbf{u}', u^*) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*)$$

Dla udowodnienia odwrotnej implikacji załóżmy, że $\Theta(\mathbf{u}', u^*) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*)$. Jeżeli $(\theta_i(\mathbf{u}', u^*))_{1 \leq i < \min\{i', i''\}} <_{lex} (\theta_i(\mathbf{u}'', u^*))_{1 \leq i < \min\{i', i''\}}$, to oczywiście $\Theta(\mathbf{u}') <_{lex} \Theta(\mathbf{u}'')$. Przypuśćmy zatem, że $\theta_i(\mathbf{u}', u^*) = \theta_i(\mathbf{u}'', u^*)$ dla $1 \leq i < \min\{i', i''\}$ i pomińmy udowodniony już przypadek $i' = i''$. Jeżeli $i' > i''$, to

$$\theta_{i''}(\mathbf{u}'', u^*) = u^* \leq \theta_{i''}(\mathbf{u}', u^*) \quad \text{i} \quad \theta_{i''+1}(\mathbf{u}'', u^*) < u^* \leq \theta_{i''+1}(\mathbf{u}', u^*)$$

co przeczy założeniu $\Theta(\mathbf{u}', u^*) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*)$. Zatem $i' < i''$, z czego wynika $\Theta(\mathbf{u}') <_{lex} \Theta(\mathbf{u}'')$. Tym samym prawdziwa jest implikacja

$$\Theta(\mathbf{u}', u^*) \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'', u^*) \quad \Rightarrow \quad \Theta(\mathbf{u}') \leq_{lex} \Theta(\mathbf{u}'')$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie 4.31 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i model preferencji definiowany przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.86) spełnia warunek (4.91).*

Dowód. Minimaksymalizacja leksykograficzna (4.86) stosowana do podzbioru funkcji oceny $J \subset I$ definiuje relację preferencji $\preceq$ określoną wzorem

$$(y'_i)_{i \in J} \preceq (y''_i)_{i \in J} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta((s_i(a_i, y'_i))_{i \in J}) \leq_{lex} \Theta((s_i(a_i, y''_i))_{i \in J})$$

Funkcje $s_i(a_i, y_i)$ są ściśle rosnące względem y_i. Zatem, na mocy twierdzenia 4.30, model preferencji definiowany przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.86) spełnia warunek zgodności (4.91). ■

Wniosek 4.55 *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i, jeżeli $\mathbf{x}^0 \in Q$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (4.86), to dla dowolnego $J \subset I$, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania*

$$\text{lexmin } \{\Theta((s_i(a_i, f_i(\mathbf{x})_{i \in J}) \; : \; \mathbf{x} \in Q, \quad f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^0) \quad dla \ i \in I \setminus J\}$$

Udowodnione własności relacji preferencji definiowanej przez minimaksymalizację leksykograficzną (4.86) wskazują na atrakcyjność leksykograficznej metody punktu referencyjnego w porównaniu ze standardowymi metodami opartymi na parametryzacji (3.4). Z wniosku 4.53 i twierdzenia 4.31 wynika, że metoda ta ściślej realizuje quasi–zadowalający model preferencji definiowany przez poziomy aspiracji. W szczególności, spełnienie warunków (3.34) i (4.91) jest bardzo istotne dla dobrej sterowalności procesu analizy interaktywnej. Minimaksymalizacja leksykograficzna (1.38) jest oczywiście znacznie trudniejsza obliczeniowo niż minimaksymalizacja regularyzowana (1.36). Jednakże, jak pokazaliśmy w podrozdziałach 1.3 i 4.1, dla wielu klas zadań WPLD istnieją efektywne algorytmy wyznaczania leksykograficznego minimaksimum i, co za tym idzie, istnieje możliwość praktycznej implementacji leksykograficznej metody punktu referencyjnego opartej na parametryzacji (4.86) lub jej wersji przedziałowej (4.88).

Rozdział 5

Zakończenie

W tej pracy optymalizacja wielokryterialna jest traktowana jako narzędzie stosowane w szerzej pojmowanym procesie rozwiązania problemu decyzyjnego, czyli jako technika do wykorzystania w systemie wspomagania decyzji. Co więcej, skoncentrowano się na otwartych technikach interaktywnych nie narzucających decydentowi sztywnego scenariusza analizy problemu decyzyjnego i dopuszczających możliwość modyfikacji jego preferencji w trakcie analizy, w wyniku poznawania specyfiki problemu decyzyjnego. Jako matematyczną podstawę takiego systemu wspomagania decyzji przyjmuje się pewną parametryzację zbioru rozwiązań efektywnych (Wierzbicki, 1993). Parametry powinny reprezentować łatwo rozumiane przez decydenta wielkości rzeczywiste charakteryzujące jego preferencje. Na podstawie podawanych przez decydenta wartości parametrów (sterujących) system przedstawia odpowiednie rozwiązania efektywne do analizy. Tym samym system wspomaga decydenta w poszukiwaniu najbardziej satysfakcjonującego rozwiązania efektywnego. Istotne jest tu, aby system gwarantował spełnienie postulatu zupełności parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych, czyli aby dla każdego niezdominowanego wektora ocen istniał zestaw wartości parametrów sterujących, przy których system wyznaczy rozwiązanie efektywne generujące ten wektor ocen. Niniejsza praca koncentrowała się na analizie interaktywnych technik optymalizacji wielokryterialnej z punktu widzenia reprezentowanych przez nie modeli preferencji i ich przydatności w systemach wspomagania decyzji. W przyjętym modelu systemu wspomagania decyzji najlepiej sprawdzają się metody operujące poziomami aspiracji jako parametrami sterującymi. Dlatego też analiza koncentrowała się zasadniczo na różnorodnych metodach typu punktu referencyjnego (Wierzbicki, 1977; 1982) i programowania celowego (Charnes i Cooper, 1961).

Przedstawiona analiza dotyczy problemów wielokryterialnego programowania liniowego i dyskretnego. Jest to bardzo ogólna klasa zadań i większość wielokryterialnych problemów decyzyjnych, a w szczególności decyzyjnych problemów zarządzania, może być sformułowana w postaci odpowiednich zagadnień programowania liniowego i dyskretnego. Ponadto wiele przedstawionych tu wyników dotyczy dowolnych zadań optymalizacji wielokryterialnej, a ograniczenie do zadań liniowych i dyskretnych jest związane jedynie z przeprowadzoną analizą możliwości efektywnej implementacji odpowiednich metod i algorytmów. Uwzględnienie problemów dyskretnych stanowi istotny czynnik przedstawionej analizy. Wiele technik stosowanych w wielokryterialnym programowaniu liniowym (na przykład techniki oparte na ważeniu ocen) nie gwarantuje zupełnej parametryzacji zbioru rozwiązań efektywnych w przypadku problemów dyskretnych. W tej pracy koncentrowano się na technikach poprawnych zarówno w przypadku liniowym, jak i dyskretnym. Niemniej jednak zwracano uwagę na dodatkowe możliwości pojawiające w przypadku zadań czysto liniowych lub czysto dyskretnych. W szczególności wprowadzona w podrozdziale 2.2 symetryczna teoria dualności oraz dyskutowane w podrozdziale 2.3 techniki obliczeniowe dla programowania celowego wykorzystują specyfikę zadań programowania liniowego. Z kolei podejścia dystrybucyjne do problemów z jednorodnymi ocenami (punkty 4.1.3 i 4.2.3) wykorzystują specyfikę zadań czysto dyskretnych o skończonych zbiorach wartości ocen.

Najważniejszym narzędziem analizy jest zdefiniowana aksjomatycznie racjonalna relacja preferencji. Rozwiązania efektywne są określane jako elementy minimalne dla różnych racjonalnych relacji preferencji. Techniki interaktywne analizy problemów wielokryterialnych są definiowane przez parametryczne racjonalne relacje preferencji (parametryczne skalaryzacje). Praca stanowi pierwsze konsekwentne ujęcie zagadnień optymalizacji wielokryterialnej i interaktywnych technik ich rozwiązywania w kategoriach racjonalnej relacji preferencji. W tym sensie praca jako całość stanowi nowe ujęcie teorii i metod optymalizacji wielokryterialnej.

Zastosowane podejście umożliwiło dokładniejsze porównanie metod punktu referencyjnego z programowaniem celowym. W wyniku tej analizy rozwinięto metody punktu referencyjnego wykorzystujące techniki programowania celowego (podrozdziały 3.3 i 3.4), co pozwoliło na wprowadzenie hierarchii priorytetów poziomów aspiracji do metod punktu referencyjnego i na ściślejszą realizację quasi–zadowalającego modelu procesu decyzyjnego.

Aksjomatyczna definicja racjonalnej relacji preferencji pozwoliła na rozważanie zadań wielokryterialnych z pewnymi dodatkowymi własnościami relacji preferencji. W rozdziale 4 analizowane były modele preferencji uwzględniające elementy równości kryteriów. Rozwinięta została teoria symetrycznie efektywnych i wyrównująco efektywnych rozwiązań zagadnień wielokryterialnych, jako rozwiązań minimalnych w sensie relacji preferencji anonimowo racjonalnych i odpowiednio wyrównująco racjonalnych. Zagadnienia tego typu rozpatrywane były dotychczas niezależnie w różnych dziedzinach zastosowań, przy czym jedynie dla problemów podejmowania decyzji w warunkach ryzyka została rozwinięta kompletna metodologia uwzględniająca aspekty wielokryterialności (por. Levy, 1992). Metodologia ta ogranicza się jednak do teorii funkcji użyteczności. Wyprowadzone w tej pracy odpowiednie wersje metod punktu referencyjnego, przyjmujące postać interaktywnych technik referencyjnej dystrybucji ocen, stanowią pierwszą próbę wprowadzenia interaktywnych metod typu punktu referencyjnego do zagadnień wielokryterialnych z jednorodnymi ocenami, a w szczególności do zagadnień podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Ponadto w podrozdziale 4.3 pokazano, jak koncepcja wyrównująco racjonalnej relacji preferencji może być wykorzystana do konstrukcji leksykograficznej metody punktu referencyjnego ściśle implementującej quasi–zadowalający model procesu decyzyjnego dla standardowych zadań optymalizacji wielokryterialnej.

Niezależnie od nowego całościowego ujęcia teorii i metod optymalizacji wielokryterialnej praca zawiera wiele szczegółowych oryginalnych wyników autora, z których część była prezentowana w innej formie w artykułach i na konferencjach naukowych, a część jest publikowana tu po raz pierwszy (rozdział 4). Jako najważniejsze wyniki teoretyczne należy wymienić: metody zupełnej parametryzacji zbiorów rozwiązań anonimowo i wyrównująco efektywnych bez wykorzystywania teorii funkcji użyteczności (podrozdziały 4.1 i 4.2); nowe warianty metody punktu referencyjnego implementujące dodatkowe własności relacji preferencji w ramach quasi–zadowalającego modelu procesu decyzyjnego (podrozdziały 3.3, 3.4 i 4.3); symetryczną teorię dualności dla liniowych leksykograficznych zadań programowania celowego obejmującą odpowiedniki klasycznych zależności dualnych w programowaniu liniowym, łącznie z własnością punktu siodłowego i wzorami na wartości krańcowe (podrozdział 2.2). Praca zawiera również wyniki przeprowadzanych przez autora eksperymentów obliczeniowych i implementacji metod. W szczególności autor projektował i implemtował moduł analizy wielokryterialnej w systemie DINAS (podrozdział 3.2), który stanowił pierwszą implemetację metod punktu referencyjnego dla mieszanych zadań dyskretnych.

Badania w zakresie optymalizacji wielokryterialnej przeżywają w ostatnich latach intensywny rozwój (Steuer i inni, 1996). Wiele metod optymalizacji wielokryterialnej zostało zaproponowanych w literaturze i zaimplementowanych do rozwiązywania praktycznych problemów decyzyjnych. Niniejsza praca nie stanowi pełnego przeglądu teorii i różnorodnych podejść do optymalizacji wielokryterialnej. Skoncentrowano się w niej na klasycznym pojęciu rozwiązania efektywnego zadania wielokryterialnego, nie zajmując się pojęciami pochodnymi, jak na przykład rozwiązaniami właściwie efektywnymi (Geoffrion, 1968). W rozważanej tu klasie zadań WPL i WPLD te dwa pojęcia efektywności rozwiązania pokrywają się ze sobą. Niemniej jednak rozważanie rozwiązań właściwie efektywnych z ograniczonymi a priori współczynnikami wymiany może prowadzić do interesujących technik "zgrubnego" przeglądu zbioru rozwiązań efektywnych (Kaliszewski, 1994). Sugeruje to jeden z możliwych dalszych kierunków badań nad rozszerzaniem rozwiniętego w tej pracy ujęcia optymalizacji wielokryterialnej.

Literatura dotycząca optymalizacji wielokryterialnej jest bardzo obszerna. Dlatego załączony w pracy spis literatury nie stanowi kompletnej bibliografii optymalizacji wielokryterialnej. Poza pozycjami o charakterze ogólnym (monografie i artykuły przeglądowe cytowane w podrozdziale 1.1) zawiera on jedynie cytowane w tekście pozycje literatury bezpośrednio związane z problemami dyskutowanymi w tej pracy.

Literatura

Abernathy W.J., Hershey J.C. (1972), “A spatial–allocation model for regional health–services planning”, *Operations Research*, **20**, 629–642.

Allison P.D. (1978), “Measures of inequality”, *American Sociological Review*, **43**, 865–880.

Ameljańczyk A. (1980), *Teoria gier i optymalizacja wektorowa*, Wyd. WAT, Warszawa.

Bell D.E., Raiffa H. (1988), “Risky choice revisited”, w: *Decision Making: Descriptive, Normative and Prescriptive Interactions*, Bell D.E., Raiffa H., Tversky A. (red.), Cambridge University Press, Cambridge, 99–112.

Benson H.P. (1992), “A finite nonadjacent extreme–point search algorithm for optimization over the efficient set”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **73**, 47–64.

Bogetoft P., Pruzan P. (1991), *Planning with Multiple Criteria: Investigation, Communication, Choice*, North–Holland, Amsterdam.

Budnick F.S, McLeavey D., Mojena R. (1988), *Principles of Operations Research for Management*, IRWIN, Homewood.

Burkard R.E., Rendl F. (1991), “Lexicographic bottleneck problems”, *Operations Research Letters*, **10**, 303–308.

Chankong V., Haimes Y.Y. (1983), *Multiobjective Decision Making*, North–Holland, Amsterdam.

Charnes A., Cooper W.W. (1961), *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York.

Crowder L.J., Sposito V.A. (1987), “Comments on: An algorithm for solving the linear goal–programming problem by solving its dual”, *Journal of Operational Research Society*, **38**, 335–340.

DeSanctis G., Gallupe R.B. (1987), “A foundation for the study of group decision support systems”, *Management Science*, **33**, 589–609.

Erkut E. (1993), “Inequality measures for location problems”, *Location Science*, **1**, 199–217.

Fishburn P.C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley & Sons, New York.

Galas Z. (1986), "O mierzeniu konfliktowości celów", *Monografie i Opracowania SGPiS*, **200**, 168–180.

Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z. (1987), *Programowanie wielokryterialne*, PWE, Warszawa.

Geoffrion A.M. (1968), "Proper efficiency and the theory of vector maximization", *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, **22**, 618–630.

Geoffrion A.M. (1992), "Forces, trends and opportunities in MS/OR", *Operations Research*, **40**, 423–445.

Grauer M., Lewandowski A., Wierzbicki A.P. (1984), "DIDAS — theory, implementation and experience", w: *Interactive Decision Analysis*, Grauer M., Wierzbicki A.P. (red.), Springer–Verlag, New York.

Gray P. (1988), *Guide to IFPS/Personal: The Interactive Financial Planning System for Personal Computers*, McGraw–Hill, New York.

Hallefjord A., Jörnsten K. (1988), "A critical comment on integer goal programming", *Journal of Operational Research Society*, **39**, 101–104.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1934), *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hwang Ch.L., Masud A.S. (1979), *Multiple Objective Decision Making — Methods and Applications. A State–of–the–Art Survey*, Springer–Verlag, Berlin.

Hwang Ch.L., Yoon K. (1981), *Multiple Attribute Decision Making — Methods and Applications. A State–of–the–Art Survey*, Springer–Verlag, Berlin.

Ignizio J.P. (1976), *Goal Programming and Extensions*, Heath, Lexington.

Ignizio J.P. (1982), *Linear Programming in Single and Multiple Objective Systems*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs.

Ignizio J.P. (1984), "A note on the multidimesional dual", *European Journal of Operational Research*, **17**, 116–122.

Ignizio J.P. (1985), "An algorithm for solving the linear goal programming problem by solving its dual", *Journal of Operational Research Society*, **36**, 507–515.

Ijiri Y. (1965), *Management Goals and Accounting for Control*, Rand-McNally, Chicago.

Isermann H. (1982), "Linear lexicographic optimization", *OR Spektrum*, **4**, 223–228.

Isermann H., Steuer R.E. (1987), "Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set", *European Journal of Operational Research*, **33**, 91–97.

Jaszkiewicz A., Słowiński R. (1992), "Cone contraction method with visual interaction for multiple–objective nonlinear programmes", *Journal of Multi–Criteria Decision Analysis*, **1**, 29–46.

Justmann M. (1977), "Iterative processes with nucleolar restriction", *International Journal of Game Theory*, **6**, 189–212.

Kaliszewski I. (1994), *Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique*, Kluwer, Dodrecht.

Keeney R.L., Raiffa H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley & Sons, New York.

Kendall M. (1958), *The Advanced Theory of Statistics, Volume 1*, Griffin, London.

Klein R.S., Luss H., Smith D.R. (1992), "A lexicographic minimax algorithm for multiperiod resource allocation", *Mathematical Programming*, **55**, 213–234.

Klepikowa M.G. (1985), "Woprosy ustojcziwosti lieksikograficzieskich zadacz optimizacii", *Żurnał Wyczislitielnoj Matiematiki i Matiematiczieskoj Fiziki*, **25**, 32–44.

Konarzewska–Gubała E. (1980), *Programowanie przy wielorakości celów*, PWN, Warszawa.

Korhonen P. (1992), "Multiple criteria decision support: the state of research and future directions", *Computers & Operations Research*, **19**, 549–552.

Korhonen P., Laakso J. (1986), "A visual interactive method for solving multiple criteria problem", *European Journal of Operational Research*, **24**, 277–287.

Korhonen P., Wallenius J. (1989), "Observations regarding choice behaviour in interactive multiple criteria decision–making environments: An experimental investigation", w: *Methodology and Software for Interactive Decision Support*, Lewandowski A., Stanchev I. (red.), Springer–Verlag, Berlin, 163–170.

Korycki, J., Ogryczak, W. (1997), "A Spreadsheet Implementation of Aspiration/Reservation Based Decision Support", *Central European Journal for Operations Research and Economics*, **5**, 111–129.

Krarup J.K., Pruzan P.M. (1981), "Reducibility of minimax to minisum 0–1 programming problems", *European Journal of Operational Research*, **5**, 125–132.

Krawczyk S. (1980), *Matematyczna analiza sytuacji decyzyjnych*, PWE, Warszawa.

Kręglewski T., Paczyński J., Granat J., Wierzbicki A.P. (1988), "IAC–DIDAS–N: A dynamic interactive decision analysis and support system for multicriteria analysis of nonlinear models with nonlinear model generator supporting model analysis", WP–88–112, IIASA, Laxenburg.

Lee S. (1972), *Goal Programming for Decision Analysis*. Auerbach, Philadelphia.

Levy H. (1992), "Stochastic dominance and expected utility: Survey and analysis", *Management Science*, **38**, 555–593.

Lewandowski A., Kręglewski T., Rogowski T., Wierzbicki A.P. (1989), "Decision support systems of DIDAS family (Dynamic interactive decision analysis & support)", w: Lewandowski i Wierzbicki (1989), 21–47.

Lewandowski A., Wierzbicki A.P. (1988), "Aspiration based decision analysis support systems. Part I: Theoretical and methodological backgrounds", WP–88–03, IIASA, Laxenburg.

Lewandowski A., Wierzbicki A.P. (red.) (1989), *Aspiration Based Decision Support Systems — Theory, Software and Applications*, Springer–Verlag, Berlin.

Lewandowski A., Wierzbicki A.P. (1989a), "Decision support systems using reference point optimization", w: Lewandowski i Wierzbicki (1989), 3–20.

Lindo Systems (1990), *A BestCase! Scenario Library: Financial Management*, Lindo Systems Inc., Chicago.

Lindo Systems (1992), *What'sBest!: Release 1.77*, Lindo Systems Inc., Chicago.

Luc D.T. (1989), *Theory of Vector Optimization*, Springer–Verlag, Berlin.

Malczewski J., Ogryczak W. (1988), "A Multiobjective Approach to Reorganization of Health Service Areas: A Case Study", *Environment & Planning A*, **20**, 1461–1470.

Malczewski J., Ogryczak W. (1990), "An interactive approach to the central facility location problem: locating pediatric hospitals in Warsaw", *Geographical Analysis*, **22**, 244–258.

Malczewski J., Ogryczak W. (1995), "Multiple Criteria Location Problem: 1. A Generalized Network Model and the Set of Efficient Solutions", *Environment & Planning A*, **27**, 1931–1960.

Malczewski J., Ogryczak W. (1996), "Multiple Criteria Location Problem: 2. Preference–Based Techniques and Intertactive Decision Support", *Environment & Planning A*, **28**, 69–98.

Mandell M.B. (1991), "Modelling effectiveness–equity trade–offs in public service delivery systems", *Management Science*, **37**, 467–482.

Marchi E., Oviedo J. A. (1992), "Lexicographic optimality in the multiple objective linear programming: the nucleolar solution", *European Journal of Operational Research*, **57**, 355–359.

Markowski C.A., Ignizio J.P. (1983), "Duality and transformations in multiphase and sequential linear goal programming", *Computers & Operations Research*, **10**, 321–333.

Marsh M.T., Schilling D.A. (1994), "Equity measurement in facility location analysis: A review and framework", *European Journal of Operational Research*, **74**, 1–17.

Maschler M., Potters J.A.M., Tijs S.H. (1992), "The general nucleolus and the reduced game property", *International Journal of Game Theory*, **21**, 85–106.

Michalowski W., Szapiro T. (1992), "A bi–reference procedure for interactive multiple criteria programming", *Operations Research*, **40**, 247–258.

Mills H.D. (1956), "Marginal values of matrix games and linear programming", w: *Linear Inequalities and Related Systems*, Kuhn H.W, Tucker A.W. (red.), Princeton University Press, Princeton, 183–193.

Nakayama H. (1992), "Trade–off analysis using parametric optimization techniques", *European Journal of Operational Research*, **60**, 87–98.

Nakayama H., Sawaragi Y. (1984), "Satisficing trade–off method for interactive multiobjective programming methods", w: *Interactive Decision Analysis*, Grauer M., Wierzbicki A.P. (red.), Springer–Verlag, New York, 113–122.

Nemhauser G.L., Wolsey L.A. (1988), *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York.

Nykowski I. (1977), "Rozwiązania kompromisowe w wielokryteriowym programowaniu liniowym", *Przegląd Statystyczny*, **24**, 3–19.

Ogryczak W. (1986), "A Symmetric Duality Concept for Linear Goal Programming: Principal Results", *Control and Cybernetics*, **15**, 413–423.

Ogryczak W. (1987), "On Practical Stopping Rules for the Simplex Method", *Mathematical Programming Study*, **31**, 167–174.

Ogryczak W. (1988), "Symmetric duality theory for linear goal programming", *Optimization*, **19**, 373–396.

Ogryczak W. (1988a), "A counterexample to transformations in multiphase and sequential linear goal programming", *Control and Cybernetics*, **17**, 79–84.

Ogryczak W. (1988b), "Simplex Method is not Always Well–behaved", *Linear Algebra and Its Applications*, **109**, 41–57.

Ogryczak W. (1989), *Programowanie matematyczne w pakiecie MPSX*, Wyd. UW, Warszawa.

Ogryczak W. (1992), "An implementation of variable upper bounds via SUB methodology", *Journal of Information & Optimization Sciences*, **13**, 29–47.

Ogryczak W. (1994), "A goal programming model for the reference point method", *Annals of Operations Research*, **51**, 33–44.

Ogryczak W. (1995), "Dual simplex algorithm with implicit representation of variable upper bounds", *Optimization*, **33**, 321–338.

Ogryczak W. (1996), "A Note on Modeling Multiple Choice Requirements for Simple Mixed Integer Programming Solvers", *Computers & Operations Research*, **23**, 199–205.

Ogryczak W. (1997), "On the Lexicographic Minimax Approach to Location Problems", *European Journal of Operational Research*, **100**, 566–585.

Ogryczak W. (1997a), "On Cent-Dians of General Networks", *Location Science*, **5**, 15–28.

Ogryczak W. (1997b), "Preemptive Reference Point Method", w: *Multicriteria Analysis*, J.Climaco (red.), Springer Verlag, Berlin 1997, 156–167.

Ogryczak W. (1997c), "Reference Distribution — An Interactive Approach to Multiple Homogeneous and Anonymous Criteria", w: *Multiple Criteria Decision Making*, G. Fandel, T. Gal (Eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **448**, Springer Verlag, Berlin 1997, 156–165.

Ogryczak W., Lahoda S. (1992), "Aspiration/reservation decision support — a step beyond goal programming", *Journal of Multi–Criteria Decision Analysis*, **1**, 101–117.

Ogryczak W., Malczewski J. (1987), "Health care districts planning by multiobjective analysis with the MPSX/370 package", *Arch. Automatyki i Telemechaniki*, **XXXII**, 369–381.

Ogryczak W., Studziński K., Zorychta K. (1988), "Dynamic interactive network analysis system — DINAS version 2.1 (1988): user's manual", WP–88–114, IIASA, Laxenburg.

Ogryczak W., Studziński K., Zorychta K. (1989), "A solver for the multi–objective transshipment problem with facility location", *European Journal of Operational Research*, **43**, 53–64.

Ogryczak W., Studziński K., Zorychta K. (1991), "DINAS — dynamic interactive network analysis system v.3.0", CP–91–012, IIASA, Laxenburg.

Ogryczak W., Studziński K., Zorychta K. (1992), "DINAS — a computer–assisted analysis system for multiobjective transshipment problems with facility location", *Computers & Operations Research*, **19**, 637–647.

Ogryczak W., Studziński K., Zorychta K. (1992a), "EDINET — a network editor for transshipment problems with facility location", w: *Computer Science & Operations Research: New Developments in their Interfaces*, Balci O., Sharda R., Zenios S.A. (red.), Pergamon Press, Oxford, 197–212.

Ogryczak W., Zorychta K. (1994), "On solving multiobjective linear programs with implicit representation of minimax scalarizing function", *Archives of Control Sciences*, **3 (XXXIX)**, 193–209.

Parker B.R. (1985), "A multiple goal programming methodology for evaluation management information systems", *Omega*, **13**, 313–330.

Podinowski W.W. (1975), "Mnogokriterialnyje zadaczi s odnorodnymi rawnocennymi kriteriami", *Żurnał Wyczislitielnoj Matiematiki i Matiematiczieskoj Fiziki*, **15**, 330–344.

Podinowski W.W., Nogin W.D. (1982), *Parieto–Optimalnyje Rieszenija Mnogokriterialnych Zadacz*, Nauka, Moskwa.

Potters J.A.M., Tijs S.H. (1992), "The nucleolus of a matrix game and other nucleoli", *Mathematics of Operations Research*, **17**, 164–174.

Prasad S.Y., Karwan M.H. (1992), "A note on solving bicriteria linear programming problems using single criteria software", *Computers & Operations Research*, **19**, 169–173.

Rietveld P. (1980), *Multiple Objective Decision Methods and Regional Planning*, North–Holland, Amsterdam.

Ringuest J.L. (1992), *Multiobjective Optimization: Behavioral and Computational Considerations*, Kluwer, Boston.

Rogowski T., Sobczyk J., Wierzbicki A.P., (1988), "IAC–DIDAS–L: Dynamic interactive decision analysis and support system linear version", WP–88–110, IIASA, Laxenburg.

Romero C. (1991), *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*, Pergamon Press, Oxford.

Roy B. (1990), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa.

Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985), *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orlando.

Schmeidler D. (1969), "The nucleolus of a characteristic function game", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **17**, 1163–1170.

Sen A. (1973), *On Economic Inequality*, Clarendon Press, Oxford.

Sharda R. (1985), "Optimization using spreadsheets on a microcomputer", *Annals of Operations Research*, **5**, 599–612.

Shogan A.W. (1988), *Management Science*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs.

Shorrocks A.F., Foster J.E. (1987), "Transfer sensitive inequality measures", *Review of Economic Studies*, **LIV**, 485–497.

Simon H.A. (1957), *Models of Man*, MacMillan, New York.

Słowiński R. (1984), "Przegląd metod wielokryterialnego programowania liniowego", *Przegląd Statystyczny*, **30**, cz. I: 47–64, cz. II: 303–318.

Stadler W. (1979), "A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem, Part I: 1776–1960", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **29**, 1–52.

Steuer R.E. (1986), *Multiple Criteria Optimization — Theory, Computation & Applications*, John Wiley & Sons, New York.

Steuer R.E. (1993), "A combined Tchebycheff/aspiration criterion vector interactive multiobjective programming procedure", *Management Science*, **39**, 1255-1260.

Steuer R.E., Choo E.U. (1983), "An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming", *Mathematical Programming*, **26**, 326–344.

Steuer R.E., Gardiner L.R., Gray J. (1996), "A bibliographic survey of the activities and international nature of multiple criteria decision making", *Journal of Multi–Criteria Decision Analysis*, **5**, 195–217.

Stewart T.J. (1992), "A critical survey on the status of multiple criteria decision making theory and practice", *OMEGA*, **20**, 569–586.

Storm Software (1992), *STORM personal version 3.0*, Storm Systems Inc., Cleveland.

Troutt M.D., Tadisina S.K., Clinton R.J. (1991), "Interactive optimization aspects of electronic spreadsheet models for design and planning", *Journal of Operational Research Society*, **42**, 349–355.

Vincke Ph. (1992), *Multicriteria Decision–Aid*, John Wiley & Sons, New York.

Walukiewicz S. (1986), *Programowanie dyskretne*, PWN, Warszawa.

Wessels J., Wierzbicki A.P. (red.) (1993), *User–Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support*, Springer–Verlag, Berlin.

White D.J. (1990), "A bibliography on the applications of mathematical programming multiple–objective methods", *Journal of Operational Research Society*, **41**, 669–691.

Wierzbicki A.P. (1977), "Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization", *Optimization*, **8**, 55–60.

Wierzbicki A.P. (1982), "A mathematical basis for satisficing decision making", *Mathematical Modelling*, **3**, 391–405.

Wierzbicki A.P. (1986), "On completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems", *OR Spektrum*, **8**, 73–87.

Wierzbicki A.P. (1993), "Types of decision support systems and Polish contributions to their development", w: Wessels i Wierzbicki (1993), 158–175.

Williams A.C. (1963), "Marginal values in linear programming", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **11**, 82–94.

Williams H.P. (1993), *Model Building in Mathematical Programming — Third Edition*, John Wiley & Sons, New York.

Yager R.R. (1988), "On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **18**, 183–190.

Yager R.R., Filev D.P. (1995), *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa.

Young H.P. (1994), *Equity in Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton.

Yu P.L. (1974), "Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decisions problems with multiobjectives", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **14**, 319–377.

Yu P.L. (1985), *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum Press, New York.

Yu P.L., Zeleny M. (1974), "The set of all non–dominated solutions in linear cases and multicriteria simplex method", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **49**, 430–469.

Zeleny M. (1974), "A concept of compromise solutions and the method of displaced ideal", *Computers & Operations Research*, **1**, 479–496.

Zimmermann H. (1985), *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Kluwer, Dordrecht.

Zionts S., Wallenius I. (1976), "An interactive programming method for solving the multiple criteria problem", *Management Science*, **22**, 652–663.

Zionts S., Wallenius I. (1983), "An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions", *Management Science*, **29**, 519–529.

Zorychta K., Ogryczak W. (1981), *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe*, WNT, Warszawa.

Indeks