Włodzimierz Ogryczak
Politechnika Warszawska, IAiIS

Andrzej Romaszkiewicz
Szkoła Główna Handlowa

WIELOKRYTERIALNE PODEJŚCIE DO OPTYMALIZACJI PORTFELA INWESTYCJI*

WSTĘP

Przedmiotem pracy jest klasyczne (jednookresowe) zagadnienie wyboru portfela inwestycji finansowych. Na początku okresu inwestor decyduje o podziale kapitału pomiędzy wybrane inwestycje konstruując portfel określony przez wielkości udziałów poszczególnych inwestycji. Poszczególne inwestycje generują różne losowe stopy zwrotu. W wyniku końcowa wielkość zysku z zainwestowanego kapitału zależy od przyjętych na początku wielkości udziałów poszczególnych inwestycji.

Model Markowitza optymalizacji portfela inwestycji finansowych sprowadza zagadnienie wyboru zmiennej losowej reprezentującej (przyszłe) zyski z portfela do dwukryterialnego wyboru na podstawie skalarnych wielkości: wartości oczekiwanej i miary ryzyka. Określenie ryzyka za pomocą pojedynczej wielkości skalarnej jest dalece uproszczone. Dlatego modele typu Markowitza w ogólnym przypadku mogą prowadzić do wyborów sprzecznych z zasadami dominacji stochastycznej.

Relacja dominacji stochastycznej porównuje rozkłady losowe zysku w oparciu o charakterystyki niedoboru dla wszystkich możliwych punktów odniesienia (celów). Dokładniej, relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu bierze pod uwagę prawdopodobieństwo niedoboru, podczas gdy relacja dominacji stochastycznej drugiego rzędu uwzględnia przeciętne niedobory. Istnieje możliwość wyboru skończonego zbioru punktów odniesienia i rozważania skończonego modelu wielokryterialnego jako przybliżenia odpowiedniej dominacji stochastycznej [7,9]. Celem pracy jest analiza podstawowych własności takiego modelu i możliwości jego efektywnego wykorzystania do wspomagania decyzji inwestycyjnych. Wybór niewielkiej liczby punktów odniesienia, spośród ich nieskończonej liczby definiującej relacje dominacji stochastycznej, może nastręczać poważne trudności w ogólnym przypadku.

---

* Praca częściowo wykonana w ramach grantu PBZ-KBN-016/P03/99 "Metody matematyczne w analizie rynków i instrumentów finansowych w Polsce".

Rozwiązanie jest tu możliwe dzięki rozmytemu formułowaniu punktów odniesienia. Naturalnym jest określenie niewielkiej liczby rozmytych klas wielkości stóp zwrotu. Model wielokryterialny uwzględnia wtedy funkcje przynależności do rozmytych celów mierząc odpowiadające im niedobory. W pracy pokazujemy, że przy naturalnym określeniu rozmytych celów model pozostaje zgodny z relacją dominacji stochastycznej. W przypadku tzw. analizy danych historycznych, czyli dyskretnych zmiennych losowych reprezentujących stopy zwrotu, model przyjmuje postać wielokryterialnego zadania programowania liniowego. Tym samym skalaryzacje modelu prowadzą do łatwo rozwiązywalnych zadań programowania liniowego.

PODSTAWOWE MODELE WIELOKRYTERIALNE

Niech $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ oznacza zbiór rozważanych walorów (inwestycji, papierów wartościowych). Stopa zwrotu dla j-tego waloru jest określona jako zmienna losowa R_j o średniej (wartości oczekiwanej) $z_j = \mathbb{E}\{R_j\}$. Zmienne decyzyjne reprezentujące udziały poszczególnych walorów w portfelu inwestycji będziemy oznaczać przez x_j. Aby reprezentować udziały, zmienne te muszą spełniać odpowiednie ograniczenia definiujące zbiór dopuszczalny:

$$Q = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \; x_j \geq 0 \; \forall j\}$$

Wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniający warunek $\mathbf{x} \in Q$ będziemy dalej nazywać portfelem.

Portfel x definiuje odpowiednią zmienną losową $R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$, która reprezentuje stopę zwrotu z portfela. Jej średnia jest określona wzorem:

$$z(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R(\mathbf{x})\} = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j$$

Począwszy od fundamentalnej pracy Markowitza [5] problem wyboru portfela inwestycji jest zazwyczaj formalizowany w postaci dwukryterialnego modelu średniej i ryzyka (MR)

$$\max\{[z(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1}$$

gdzie oczekiwana (średnia) stopa zwrotu $z(\mathbf{x})$ jest maksymalizowana, a pewna skalarna miara ryzyka $\varrho(\mathbf{x})$ jest minimalizowana. W klasycznym podejściu Markowitza jako miarę ryzyka $\varrho(\mathbf{x})$ przyjmuje się odchylenie standardowe lub wariancję zmiennej losowej $\sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{(z(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}))^2\}$ tworząc tzw. model MV [6]. Wiele innych parametrów zmienności było stosowanych jako miary ryzyka tworząc całą rodzinę modeli typu Markowitza. W szczególności Konno i Yamazaki [3] wprowadzili i analizowali kompletny model wyboru portfela inwestycji z wykorzystaniem odchylenia przeciętnego $\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|z(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x})|\}$ jako miary ryzyka, tzw. model MAD.

Model Markowitza jest często krytykowany jako niezgodny z aksjomatami wyboru w warunkach ryzyka. Aksjomatyczne modele wyboru w warunkach ryzyka prowadzą do porządku częściowego określonego przez relacje dominacji stochastycznej [11]. Relacje dominacji stochastycznej pozwalają porównywać niepewne zyski (zmienne losowe) na podstawie przebiegu odpowiednich skumulowanych funkcji rozkładów. Jako pierwszą funkcję $F^{(1)}$ przyjmuje się prawostronnie ciągłą dystrybuantę rozkładu zysków:

$$F_R^{(1)}(\eta) = F_R(\eta) = \mathbb{P}\{R \leq \eta\} \quad \text{dla} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Odpowiednia (słaba) relacja *dominacji stochastycznej pierwszego rzędu* (FSD) jest zdefiniowana następująco:

$$R' \succeq_{FSD} R'' \quad \Leftrightarrow \quad F_{R'}(\eta) \leq F_{R''}(\eta) \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}.$$

Druga funkcja jest określona przez całkowanie jako:

$$F_R^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_R(\xi)\, d\xi \quad \text{dla} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Wyraża ona również przeciętny niedobór do bieżacego celu $\eta \in \mathbb{R}$ [10]:

$$F_R^{(2)}(\eta) = \mathbb{E}\{R \leq \eta\}\mathbb{E}\{\eta - R|R \leq \eta\} = \mathbb{E}\{\max\{\eta - R, 0\}\} \quad \text{dla} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Odpowiednia (słaba) relacja *dominacji stochastycznej drugiego rzędu* (SSD) przyjmuje postać:

$$R' \succeq_{SSD} R'' \quad \Leftrightarrow \quad F_{R'}^{(2)}(\eta) \leq F_{R''}^{(2)}(\eta) \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}.$$

Podobnie, stosując dalej operacje całkowania, określa się relacje dominacji stochastycznej wyższych rzędów.

Mówimy, że portfel $\mathbf{x}'$ *dominuje* $\mathbf{x}''$ *w sensie FSD* ($R(\mathbf{x}') \succ_{FSD} R(\mathbf{x}'')$), gdy $F_{R(\mathbf{x}')}^{(1)}(\eta) \leq F_{R(\mathbf{x}'')}^{(1)}(\eta)$ dla wszystkich rzeczywistych η, przy czym przynajmniej jedna nierówność jest spełniona jako ostra. Podobnie mówimy, że portfel $\mathbf{x}'$ *dominuje* $\mathbf{x}''$ *w sensie SSD* ($R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$), gdy $F_{R(\mathbf{x}')}^{(2)}(\eta) \leq F_{R(\mathbf{x}'')}^{(2)}(\eta)$ dla wszystkich η, z przynajmniej jedną nierównością ostrą. Z dominacji stochastycznej pierwszego rzędu $R(\mathbf{x}') \succ_{FSD} R(\mathbf{x}'')$ wynika dominacja stochastycznego drugiego rzędu $R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$, ale nie odwrotnie. Portfel dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ nazywamy *FSD (SSD) effektywnym* gdy nie istnieje inny portfel dopuszczalny $\mathbf{x} \in Q$ dominujący portfel $\mathbf{x}^0$ w odpowiednim sensie, czyli spełniający warunek $R(\mathbf{x}) \succ_{FSD} R(\mathbf{x}^0)$ (lub odpowiednio $R(\mathbf{x}) \succ_{SSD} R(\mathbf{x}^0)$).

Jeżeli $R(\mathbf{x}') \succ_{FSD} R(\mathbf{x}'')$, to rozkład zwrotów reprezentowany przez $R(\mathbf{x}')$ jest preferowany w stosunku do $R(\mathbf{x}'')$ we wszystkich modelach preferencji zakładających maksymalizację zwrotów. W modelu oczekiwanej użyteczności odpowiada to większej wartości oczekiwanej użyteczności $R(\mathbf{x}')$ przy wszystkich rosnących funkcjach użyteczności. Jeżeli $R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$, to $R(\mathbf{x}')$ jest preferowane w stosunku do $R(\mathbf{x}'')$ we wszystkich modelach preferencji zakładających maksymalizację zwrotów i unikanie ryzyka (tzw. awersję do ryzyka). Odpowiada to większej oczekiwanej użyteczności dla wszystkich rosnących i wklęsłych funkcji użyteczności. Dlatego kluczowe znaczenie dla modeli wyboru portfeli inwestycji jest ich zgodność z relacjami dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu.

W przypadku stóp zwrotu o rozkładach normalnych model MV jest zgodny z relacją dominacji stochastycznej drugiego rzędu (SSD) [4,11]. W ogólnym przypadku nie ma takiej zgodności i stosowanie modelu MV może niekiedy prowadzić do wyborów portfeli zdominowanych w sensie SSD i FSD (por. [10] i cytowane tam prace). Niestety jest to wspólna wada wszystkich modeli typu Markowitza wykorzystujących pewne miary dyspersji jako miary ryzyka. Prawdziwa jest wprawdzie implikacja

$$R(\mathbf{x}') \succeq_{FSD} R(\mathbf{x}'') \quad \Rightarrow \quad R(\mathbf{x}') \succeq_{SSD} R(\mathbf{x}'') \quad \Rightarrow \quad z(\mathbf{x}') \geq z(\mathbf{x}'') \qquad (2)$$

ale to nie wystarcza dla zagwarantowania odpowiedniej dominacji w dwukryterialnym modelu MR (1). W przypadku dowolnej miary dyspersji $\varrho(\mathbf{x})$ może się zdarzyć, że $R(\mathbf{x}') \succ_{FSD} R(\mathbf{x}'')$ i jednocześnie $\varrho(\mathbf{x}') > \varrho(\mathbf{x}'')$. Ilustruje to przykład portfeli $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{x}''$ z rozkładami zwrotów (wyrażonych w procentach) określonymi następująco:

$$\mathbb{P}\{R(\mathbf{x}') = \xi\} = \begin{cases} 1, & \xi = 1.0 \\ 0, & \text{inne} \end{cases} \qquad \mathbb{P}\{R(\mathbf{x}'') = \xi\} = \begin{cases} 1/2, & \xi = 3.0 \\ 1/2, & \xi = 5.0 \\ 0, & \text{inne} \end{cases}$$

Zauważmy, że pozbawiony ryzyka portfel $\mathbf{x}'$ z gwarantowanym zwrotem 1.0 jest oczywiście gorszy od obarczonego ryzykiem portfela $\mathbf{x}''$ przynoszącego zwrot 3.0 lub 5.0. Faktycznie $R(\mathbf{x}'') \succ_{FSD} R(\mathbf{x}')$. Jednocześnie w przypadku użycia dowolnej miary dyspersji $\varrho(\mathbf{x})$, oba portfele są efektywne w sensie dwukryterialnego modelu typu Markowitza (1), ponieważ $\varrho(\mathbf{x}'') > 0$, podczas gdy $\varrho(\mathbf{x}') = 0$.

Wyboru optymalnego portfela inwestycji dokonuje się na podstawie zmiennych losowych R_j odzwierciedlających przyszłe stopy zwrotu dla poszczególnych walorów. Oznacza to konieczność opracowania odpowiednich prognoz. Dlatego najczęściej używane są dyskretne zmienne losowe R_j opisane przez realizacje r_{jt} dla T scenariuszy o określonych prawdopodobieństwach p_t $(t = 1, \ldots, T)$ [1]. Uproszczoną wersją tego podejścia jest tzw.

technika danych historycznych polegająca na przyjęciu T okresów historycznych i odpowiadających im realizacji stóp zwrotu jako odpowiednich scenariuszy o jednakowym prawdopodobieństwie $1/T$. Realizacja portfela $\mathbf{x}$ przy scenariuszu t jest określona jako kombinacja liniowa $r_t(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j$. Takie określenie zmiennych losowych R_j w żaden sposób nie upraszcza zadania programowania kwadratowego wynikającego z klasycznego modelu MV. Umożliwia ono jednak podanie efektywnych wzorów obliczeniowych dla kryteriów dominacji stochastycznej.

Stosowany w relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu przeciętny niedobór do zadanego poziomu $\eta \in \mathbb{R}$, w przypadku danych scenariuszowych, wyraża się wzorem:

$$F^{(2)}_{R(\mathbf{x})}(\eta) = \mathbb{E}\{\max\{\eta - R(\mathbf{x}), 0\}\} = \sum_{t=1}^{T} \max\{\eta - r_t(\mathbf{x}), 0\} p_t$$

Jest to zatem przedziałami liniowa, wypukła funkcja portfela $\mathbf{x}$ i jej wartości mogą być określone zadaniem programowania liniowego:

$$F^{(2)}_{R(\mathbf{x})}(\eta) = \min\ \{\sum_{t=1}^{T} d_t p_t \mid d_t \geq \eta - \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j,\ d_t \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \ldots, T\}$$

Pozwala to na sformułowanie liniowego wielokryterialnego modelu optymalizacji portfela inwestycji w oparciu o wybór skończonego zbioru punktów odniesienia i odpowiednich kryteriów przeciętnego niedoboru. Rozważmy m wartości stopy zwrotu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ jako punkty odniesienia do pomiaru niedoborów. Dla ustalenia uwagi można przyjąć, że $\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_m$. Wprowadzając odpowiednie m kryteriów $\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = F^{(2)}_{R(\mathbf{x})}(\eta_k)$ dla $k = 1, \ldots, m$ otrzymujemy model wielokryterialny:

$$\min\ [\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_m] \tag{3}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$\bar{\delta}_k = \sum_{t=1}^{T} d_{kt} p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{4}$$

$$d_{kt} \geq \eta_k - \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{5}$$

$$d_{kt} \geq 0 \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{6}$$

Stosowane w relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu wartości prawostronnie ciągłej dystrybuanty w przypadku danych scenariuszowych wyrażają się wzorem:

$$F^{(1)}_{R(\mathbf{x})}(\eta) = \mathbb{P}\{R(\mathbf{x}) \leq \eta\} = 1 - \sum_{t=1}^{T} \operatorname{sign}(\max\{r_t(\mathbf{x}) - \eta, 0\}) p_t$$

W rozważanym przypadku danych scenariuszowych możliwe jest również wyrażenie relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu przez stosowanie lewostronnie ciągłej dystrybuanty, której wartości są określone wzorem:

$$\overline{F}_{R(\mathbf{x})}(\eta) = \mathbb{P}\{R(\mathbf{x}) < \eta\} = \sum_{t=1}^{T} \mathrm{sign}(\max\{\eta - r_t(\mathbf{x}), 0\})p_t \tag{7}$$

Pozwala to na sformułowanie wielokryterialnego modelu optymalizacji portfela inwestycji w oparciu o wybór skończonego zbioru punktów odniesienia i odpowiednich kryteriów prawdopodobieństwa niedoboru. Rozważając m wartości stopy zwrotu $\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_m$ jako punkty odniesienia do pomiaru niedoborów i wprowadzając odpowiednie m kryteriów $\beta_k(\mathbf{x}) = \overline{F}_{R(\mathbf{x})}(\eta_k)$ dla $k = 1, \ldots, m$ otrzymujemy wielokryterialny model programowania liniowo-całkowitoliczbowego:

$$\min\ [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m] \tag{8}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$\beta_k = \sum_{t=1}^{T} b_{kt} p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{9}$$

$$M b_{kt} \geq \eta_k - \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{10}$$

$$b_{kt} \in \{0, 1\} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{11}$$

gdzie M jest dostatecznie dużą stałą dodatnią ($M \geq \eta_1 - \min_{j,t} r_{jt}$).

Wielokryterialne modele (8)–(11) i (3)–(6) pozwalają na konstrukcję różnych modeli preferencji decydenta zachowując przy tym zgodność z relacją dominacji stochastycznej pierwszego lub odpowiednio drugiego rzędu. Na przykład, stosując technikę ważenia kryteriów w modelu (3)–(6), otrzymujemy zagregowaną funkcję celu:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \mathbb{E}\{\max\{\eta_k - R(\mathbf{x}), 0\}\}$$

gdzie w_k (dla $k = 1, \ldots, m$) są dowolnymi dodatnimi wagami. Tak określona zagregowana fukcja celu może być interpretowana jako odchylenie przeciętne od punktu odniesienia η_1 z uwzględnieniem funkcji kary, czyli $\mathbb{E}\{u(\max\{\eta_1 - R(\mathbf{x}), 0\})\}$, gdzie u jest rosnącą przedziałami liniową funkcją kary o węzłach $b_k = \tau_1 - \tau_k$ i nachyleniach $s_k = w_1 + \ldots + w_k$, $k = 1, \ldots, m$. Taka przedziałami liniowa funkcja kary była użyta w modelu planowania finansowego Russel-Yasuda Kasai [1] dla zdefiniowania odpowiedniej miary ryzyka.

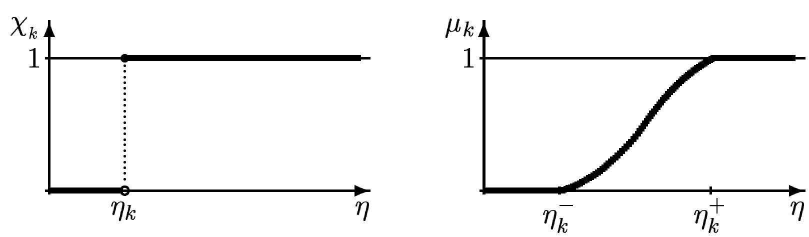
ROZMYTE PUNKTY ODNIESIENIA

Wybór niewielkiej liczby punktów odniesienia, spośród ich nieskończonej liczby definiującej relacje dominacji stochastycznej, może nastręczać poważne trudności w ogólnym przypadku. Rozwiązanie jest tu możliwe dzięki rozmytemu formułowaniu punktów odniesienia. Naturalnym jest określenie niewielkiej liczby rozmytych klas wielkości stóp zwrotu. Model wielokryterialny uwzględnia wtedy funkcje przynależności do rozmytych celów mierząc odpowiadające im niedobory. Dokładnie przedstawimy tu konsekwenkcje wprowadzenia rozmytych punktów odniesienia do wielokryterialnego modelu odpowiadającego dominacji stochastycznej pierwszego rzędu.

Zauważmy, że lewostronnie ciągła dystrybuanta (7) służąca do określenia funkcji celu w modelu wielokryterialnym (8)–(11) dla ustalonego punktu odniesienia η_k mierzy prawdopodobieństwo nieosiągnięcia co najmniej tego poziomu. Pojedyncza funkcja celu β_k może być zatem wyrażona w postaci

$$\beta_k(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{t=1}^{T} \chi_{_k}(r_t(\mathbf{x}))p_t$$

gdzie $\chi_{_k}$ jest funkcją charakterystyczną celu określonego jako zbiór $\{\eta \in \mathbb{R} \mid \eta \geq \eta_k\}$. Zastępując funkcję charakterystyczną odpowiednią funkcją przynależności μ_k dla celu rozmytego C_k możemy określić bardziej elastyczne kryteria. To znaczy, będziemy rozważać m celów rozmytych $C_1, \ldots, C_m$ określonych przez odpowiednie funkcje przynależności $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Ze względu na charakter rozmytych celów reprezentujących rozmyte progi osiąganych zysków możemy przyjąć, że wszystkie funkcje przynależności są niemalejące. Dokładniej będziemy zakładać, że $\mu_k(\eta) = 0$ dla $\eta \leq \eta_k^-$, $\mu_k(\eta)$ jest rosnąca w przedziale (η_k^-, η_k^+) i $\mu_k(\eta) = 1$ dla $\eta \geq \eta_k^+$ (por. rys. 1). W przypadku $\eta_k^+ = \eta_k$ i $\eta_k^- = \eta_k - \varepsilon$, funkcja przynależności μ_k zbiega do funkcji charakterystycznej χ_k przy $\varepsilon > 0$ dążącym do zera.



Rysunek 1: Funkcja charakterystyczna celu nierozmytego i funkcja przynależności celu rozmytego

W modelu wielokryterialnym (8)–(11) dla ustalonego punktu odniesienia η_k minimalizowaliśmy prawdopodobieństwo nieosiągnięcia co najmniej tego poziomu. Rozważając rozmyte cele C_k z funkcjami przynależności μ_k, zamiast odpowiednich funkcji charakterystycznych otrzymujemy kryteria wyrażające maksymalizację oczekiwanych stopni przynależności do rozmytych celów

$$\min\ [1 - \sum_{t=1}^{T} \mu_k(r_t(\mathbf{x}))p_t] = 1 - \max \sum_{t=1}^{T} \mu_k(r_t(\mathbf{x}))p_t$$

Tym samym, rozmyty odpowiednik wielokryterialnego modelu (8)–(11) może być zapisany w postaci:

$$\max\ [y_1, y_2, \ldots, y_m] \tag{12}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_k = \sum_{t=1}^{T} \mu_k(\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j)p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{13}$$

Najprostszą reprezentacją rozważanych rozmytych celów C_k są przedziałami liniowe funkcje przynależności:

$$\mu_k(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \eta < \eta_k^- \\ \frac{\eta - \eta_k^-}{\eta_k^+ - \eta_k^-} & \text{dla} \quad \eta_k^- \leq \eta < \eta_k^+ \\ 1 & \text{dla} \quad \eta \geq \eta_k^+ \end{cases} \tag{14}$$

Dla tak zdefiniowanych funkcji przynależności rozmyty model wielokryterialny (12)–(13) może być zapisany w postaci zadania liniowo-całkowitoliczbowego:

$$\max\ [y_1, y_2, \ldots, y_m] \tag{15}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_k = \sum_{t=1}^{T} v_{kt}p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{16}$$

$$v_{kt} \leq 1 - b_{kt} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{17}$$

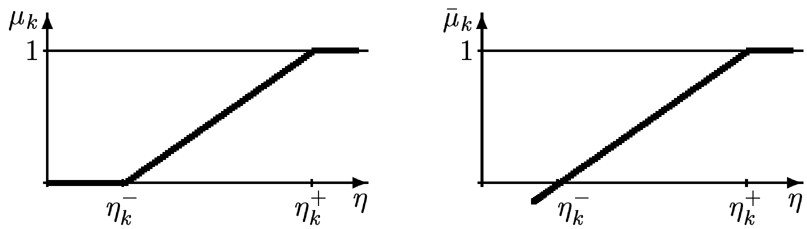
$$v_{kt} - Mb_{kt} \leq \frac{r_t(\mathbf{x}) - \eta_k^-}{\eta_k^+ - \eta_k^-} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{18}$$

$$b_{kt} \in \{0, 1\} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{19}$$

gdzie M jest dostatecznie dużą stałą dodatnią ($M \geq \frac{\eta_k^- - \min_{j,t} r_{jt}}{\eta_k^+ - \eta_k^-}\ \forall k$).

Zadanie (15)–(19) może być dalej uproszczone, jeżeli wszystkie funkcje przynależności (14) zastąpimy ich wklęsłymi rozszerzeniami (por. rys. 2):

$$\bar{\mu}_k(\eta) = \begin{cases} \frac{\eta - \eta_k^-}{\eta_k^+ - \eta_k^-} & \text{dla} \quad \eta < \eta_k^+ \\ 1 & \text{dla} \quad \eta \geq \eta_k^+ \end{cases} \tag{20}$$



Rysunek 2: Przedziałami liniowa funkcja przynależności i jej wklęsłe rozszerzenie

Wielokryterialny model

$$\max\ [y_1, y_2, \ldots, y_m] \tag{21}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_k = \sum_{t=1}^{T} \bar{\mu}_k(\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j)p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{22}$$

dzięki wklęsłości funkcji $\bar{\mu}_k$ może być wyrażony bez użycia zmiennych dyskretnych (z przyjęciem $b_{kt} = 0$). To znaczy, zastosowanie rozszerzonej funkcji przynależności (20) pozwala na redukcję zadania liniowo-całkowitoliczbowego (15)–(19) do zadania programowania liniowego:

$$\max\ [y_1, y_2, \ldots, y_m] \tag{23}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_k = \sum_{t=1}^{T} v_{jt}p_t \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m \tag{24}$$

$$v_{kt} \leq 1 \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{25}$$

$$v_{kt} \leq \frac{r_t(\mathbf{x}) - \eta_k^-}{\eta_k^+ - \eta_k^-} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T \tag{26}$$

Wielokryterialne zadanie (15)–(19) i jego rozszerzenie do wielokryterialnego zadania programowania liniowego (23)–(26) nie są wzajemnie równoważne. Zauważmy, że

$$\begin{array}{lcl} \mu_k(\eta') \geq \mu_k(\eta'') & \Leftrightarrow & \bar{\mu}_k(\eta') \geq \bar{\mu}_k(\eta'') \\ \mu_k(\eta') > \mu_k(\eta'') & \Rightarrow & \bar{\mu}_k(\eta') > \bar{\mu}_k(\eta'') \end{array} \tag{27}$$

Dlatego, jak pokazuje poniższe twierdzenie, wielokryterialny model liniowy określa podzbiór rozwiązań efektywnych dokładnego modelu binarnego.

Twierdzenie 1 *Jeżeli portfel* $\mathbf{x}$ *jest rozwiązaniem efektywnym rozszerzonego zadania (23)–(26), to jest on również rozwiązaniem efektywnym zadania (15)–(19).*

Rozpatrzmy szczególny przypadek rozszerzonych funkcji przynależności (20) określonych przez przyjęcie $\eta_k^+ = \eta_k$ i $\eta_k^- = \eta_k - 1$, gdzie η_k jest ustalonym punktem odniesienia. Zauważmy, że dokonując podstawień

$$1 - v_{kt} = d_{kt} \quad \text{oraz} \quad 1 - y_k = \bar{\delta}_k$$

możemy wyrazić odpowiedni rozszerzony liniowy model wielokryterialny (23)–(26) w postaci równoważnego modelu (3)–(6). Tym samym, standardowy wielokryterialny model wyboru portfela inwestycji zgodnie z relacją dominacji stochastycznej drugiego rzędu jest szczególnym przypadkiem rozszerzenia rozważanego tu modelu rozmytego.

Ogólnie dla dowolnych $\eta_k^+ > \eta_k^-$, przyjmując $\eta_k^+ = \eta_k$ jako ustalone punkty odniesienia w liniowym modelu rozszerzonym (23)–(26), otrzymujemy wielkości $1 - v_{kt} = d_{kt}/(\eta_k^+ - \eta_k^-)$ i ostatecznie

$$1 - y_k = \frac{\bar{\delta}_k}{\eta_k^+ - \eta_k^-} = \frac{1}{\eta_k^+ - \eta_k^-}\mathbb{E}\{\max\{\eta_k - R(\mathbf{x}), 0\}\}$$

Tym samym, liniowy model rozszerzony jest zawsze zgodny z relacją dominacji stochastycznej rzędu drugiego.

Standardowe podejście do agregacji wielu rozmytych celów [13] polega na maksymalizacji funkcji przynależności do przecięcia odpowiednich zbiorów rozmytych. Ta funkcja przynależności jest zdefiniowana przez najmniejszą wartość spośród pojedynczych funkcji przynależności. To znaczy

$$\mu(\eta) = \min_{k=1,\dots,m} \mu_k(\eta)$$

Zastosowanie tego podejścia do rozważanych modeli wielokryterialnych prowadzi do agregacji typu maksyminimalizacji:

$$\max\ y_0 \tag{28}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_0 \le \sum_{t=1}^{T} \mu_k(\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j)p_t \quad \text{dla } k = 1, \dots, m \tag{29}$$

i odpowiednio

$$\max\ y_0 \tag{30}$$

pod warunkiem, że $x \in Q$ oraz

$$y_0 \le \sum_{t=1}^{T} \bar{\mu}_k(\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j)p_t \quad \text{dla } k = 1, \dots, m \tag{31}$$

W tym przypadku zależność (27) powoduje, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 *Jeżeli portfel* $\mathbf{x}$ *jest rozwiązaniem optymalnym zadania (30)–(31), to jest on również rozwiązaniem optymalnym zadania (28)–(29).*

Zauważmy, że model maksyminimalizacji z rozszerzoną funkcją przynależności (30)–(31) jest zgodny z relacją dominacji stochastycznej rzędu drugiego i jednocześnie może być traktowany jako implementacja metody punktu referencyjnego [12]. Dokładnie, realizuje on przedziałową wersję metody punktu referencyjnego [8] z poziomem aspiracji η_k^+ i poziomem rezerwacji η_k^-. Wskazuje to na nowe możliwości wykorzystania dobrze rozwiniętej metodologii punktu referencyjnego przy optymalizacji portfela inwestycji.

PODSUMOWANIE

Relacja dominacji stochastycznej porównuje rozkłady losowe zysku w oparciu o charakterystyki niedoboru dla wszystkich możliwych punktów odniesienia (celów). Istnieje możliwość wyboru skończonego zbioru punktów odniesienia i rozważania skończonego modelu wielokryterialnego jako przybliżenia odpowiedniej dominacji stochastycznej. Wybór niewielkiej liczby punktów odniesienia, spośród ich nieskończonej liczby definiującej relacje dominacji stochastycznej, może nastręczać poważne trudności w ogólnym przypadku. Rozwiązanie jest tu możliwe dzięki rozmytemu formułowaniu punktów odniesienia.

Przy wyborze portfela inwestycji naturalnym jest określenie niewielkiej liczby rozmytych klas wielkości stóp zwrotu jako odpowiednich celów. Model wielokryterialny uwzględnia wtedy funkcje przynależności do rozmytych celów mierząc odpowiadające im niedobory. W pracy pokazujemy, że przy naturalnym określeniu rozmytych celów model pozostaje zgodny z relacją dominacji stochastycznej. W przypadku tzw. analizy danych historycznych, czyli dyskretnych zmiennych losowych reprezentujących stopy zwrotu, model przyjmuje postać wielokryterialnego zadania programowania liniowo-całkowitoliczbowego.

Zastosowanie rozszerzonej funkcji przynależności upraszcza dalej model do postaci wielokryterialnego zadania programowania liniowego. Model rozmyty z rozszerzoną funkcją przynależności jest zgodny z relacją dominacji stochastycznej rzędu drugiego. Standardowa agregacja rozmytych celów prowadzi do minimaksowego zadania programowania liniowego. Zadanie to może być traktowane jako implementacja metody punktu referencyjnego z odpowiednio zdefiniowanym indywidualnymi funkcjami osiągnięcia. Wskazuje to na nowe możliwości wykorzystania dobrze rozwiniętej metodologii wielokryterialnych metod punktu referencyjnego przy optymalizacji portfela inwestycji. Celowa jest zatem dalsza analiza własności rozważanych modeli i możliwości ich efektywnego wykorzystania do wspomagania decyzji inwestycyjnych.

LITERATURA

1. Carino D.R., Myers D.H., Ziemba W.T. (1998). Concepts, Technical Issues and Uses of the Russel-Yasuda Kasai Financial Planning Model. Operations Research, 46, 450-463.
2. Elton E.J., Gruber M.J. (1998). Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych. WIG Press, Warszawa.
3. Konno H., Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. Management Science, 37, 519-531.
4. Levy H. (1992). Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis. Management Science, 38, 555-593.
5. Markowitz H.M. (1952). Portfolio Selection. Journal of Finance, 7, 77-91.
6. Markowitz H.M. (1987). Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Blackwell, Oxford.
7. McNamara J.R. (1998). Portfolio Selection Using Stochastic Dominance Criteria. Decision Science, 29, 785–801.
8. Ogryczak W. (1997). Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.
9. Ogryczak W. (2000). Multiple Criteria Linear Programming Model for Portfolio Selection. Annals of Operations Research, 97, 143-162.
10. Ogryczak W., Ruszczyński A. (1999). From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models: Semideviations as Risk Measures. European Journal of Operational Research, 116, 33-50.
11. Whitmore G.A., Findlay M.C. (1978). Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk. D.C.Heath, Lexington, MA.
12. Wierzbicki A.P. (1982). A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making. Mathematical Modelling, 3, 391–405.
13. Zimmermann H.-J. (1996) Fuzzy Sets Theory and Its Applications — Third Edition. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.