

Włodzimierz Ogryczak  
Politechnika Warszawska, IAiIS

## MODELE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO W OPTYMALIZACJI PORTFELA INWESTYCJI\*

### WSTĘP

Problem optymalizacji portfela inwestycji finansowych jest zazwyczaj formalizowany w postaci dwukryterialnego modelu średniej i ryzyka, gdzie oczekiwana (średnia) stopa zwrotu jest maksymalizowana, a pewna skalarna miara ryzyka jest minimalizowana. W klasycznym podejściu Markowitza [9] jako miarę ryzyka przyjmuje się odchylenie standardowe lub wariancję, co prowadzi do zagadnienia programowania kwadratowego. Sam Markowitz wskazywał na potencjalnie większe możliwości wykorzystania modelu w przypadku wynikowego zadania programowania liniowego (PL). Postać PL problemu optymalizacji portfela jest bardzo istotna dla rzeczywistych aplikacji finansowych, gdzie przy konstrukcji portfeli rozpatruje się znaczną liczbę ograniczeń i bierze pod uwagę koszty transakcyjne [4].

Dokonano wiele prób mających na celu linearyzację procedury optymalizacji portfela inwestycji przez odpowiedni dobór miary ryzyka. Odchylenie przeciętne było bardzo wcześnie rozważane w analizie portfelowej (zob. [19] i cytowane tam prace), podczas gdy niedawno Konno i Yamazaki [5] wprowadzili i analizowali kompletny model wyboru portfela inwestycji z wykorzystaniem tej miary ryzyka. Yitzhaki [22] wprowadził model średniej i ryzyka wykorzystujący średnią różnicę Giniego jako miarę ryzyka. Young [23] analizował model PL opierający się na ryzyku zdefiniowanym przez najgorszy przypadek (podejście minimaksowe). Wszystkie powyższe modele PL można traktować jako szczególne przypadki wielokryterialnego modelu programowania liniowego opartego na krzywych Lorenza [11]. Rozwój badań w dziedzinie analizy portfelowej prowadzi do powstawania nowych miar ryzyka (por. [7,8] i cytowane tam prace) i odpowiednich modeli PL.

Celem tej pracy jest systematyzacja różnych modeli programowania liniowego. W szczególności wprowadzone jest jednolite wyróżnienie miar ryzyka i odpowiednich miar bezpieczeństwa. Przedstawione jest ścisłe powiązanie wszystkich miar z kryteriami przeciętnego niedoboru stanowiącymi podstawę relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu. Sformułowane są zadania PL dla wyznaczenia optymalnych portfeli rynkowych w poszczególnych modelach.

---

\* Praca częściowo wykonana w ramach grantu PBZ-KBN-016/P03/99 "Metody matematyczne w analizie rynków i instrumentów finansowych w Polsce".

## 1. MODEL ŚREDNIEJ I RYZYKA

Rozważane w tej pracy modele mają zastosowanie przy rozwiązywaniu różnych zagadnień zarządzania w warunkach ryzyka. Dla ustalenia uwagi skupiamy się tu jednak na jednookresowym zagadnieniu wyboru portfela inwestycji finansowych określonym następująco. Na początku okresu inwestor określa podział kapitału pomiędzy wybrane inwestycje. To znaczy, konstruowany jest portfel określony wielkościami udziałów poszczególnych inwestycji. W danym okresie, poszczególne inwestycje generują różne stopy zwrotu. Zatem wynikowa stopa zwrotu z całego zainwestowanego kapitału zależy od przyjętej na początku struktury portfela, czyli od udziałów poszczególnych inwestycji. Inwestor jest oczywiście zainteresowany maksymalizacją stopy zwrotu

Dla matematycznego sformułowania problemu przyjmujemy następujące oznaczenia. Przez  $J = \{1, \dots, n\}$  będziemy oznaczać zbiór dostępnych walorów (inwestycji, papierów wartościowych). Dla każdego waloru  $j \in J$  jest określona jego przyszła stopa zwrotu w postaci zmiennej losowej  $R_j$ . Zmienne decyzyjne  $x_j$  (dla  $j \in J$ ) reprezentują udziały poszczególnych walorów w portfelu inwestycji. Wektor zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1, \dots, n}$  będziemy nazywać portfelem. Każdemu portfelowi  $\mathbf{x}$  odpowiada zmienna losowa  $R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n R_j x_j$ , która reprezentuje przyszłą stopę zwrotu z portfela.

Aby właściwie reprezentować portfel inwestycji, zmienne decyzyjne  $x_j$  muszą spełniać odpowiednie ograniczenia definiujące zbiór dopuszczalny  $\mathcal{P}$ . Najprostszą definicją zbioru dopuszczalnego ogranicza się do wymagania sumowania się udziałów do jedności i warunków nieujemności udziałów (bez możliwości tzw. krótkiej sprzedaży). To znaczy,

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

W wielu przypadkach pojawiają się jednak pewne dodatkowe ograniczenia na zmienne  $x_j$ . Na przykład określonego typu fundusze mogą inwestować tylko pewne części kapitału w określone typy walorów. Ponadto dla pewnych ograniczeń dogodniejsze może być operowanie wielkością zainwestowanego kapitału, a nie tylko relatywnymi udziałami. Dlatego można założyć, że zbiór  $\mathcal{P}$  jest dowolnym (ograniczonym) wielościennym zbiorem wypukłym.

Zgodnie z koncepcją Markowitza [9] problem optymalizacji portfela inwestycji jest formalizowany w postaci dwukryterialnego modelu średniej i ryzyka:

$$\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}, \quad (2)$$

gdzie jedna funkcja celu  $\mu(\mathbf{x})$  wyrażająca średnią (oczekiwaną) stopę zwrotu z portfela jest maksymalizowana, a druga funkcja celu  $\varrho(\mathbf{x})$  wyrażająca pewną skalarną miarę ryzyka jest minimalizowana.

Wybór optymalnego portfela inwestycji powinien być realizowany w oparciu o zmienne losowe  $R_j$  odzwierciedlające przyszłe stopy zwrotu dla poszczególnych

walorów. Będziemy zakładać, że znane są realizacje  $r_{jt}$  zmiennej losowej  $R_j$  przy poszczególnych scenariuszach  $t = 1, \dots, T$ . Do tego celu opracowywane są odpowiednie prognozy np. w postaci  $T$  scenariuszy z określonymi prawdopodobieństwami  $p_t$  (gdzie  $t = 1, \dots, T$ ) [1]. Najprostszą wersją tego podejścia jest tzw. technika danych historycznych polegająca na przyjęciu  $T$  okresów historycznych i odpowiadających im realizacji stóp zwrotu jako odpowiednich scenariuszy o jednakowych prawdopodobieństwach  $p_t = 1/T$ . Lepsze wyniki daje na ogół zróżnicowanie prawdopodobieństw zgodnie z zasadami prognozowania [20]. Należy podkreślić, że wszystkie rozważane w tej pracy modele dopuszczają różne wartości prawdopodobieństw  $p_t$ .

Realizacje stóp zwrotu portfela  $R(\mathbf{x})$  przy poszczególnych scenariuszach są liniowymi funkcjami portfela  $\mathbf{x}$ , zgodnie ze wzorem:

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Wartość oczekiwana (średnia) zwrotu portfela  $\mu(\mathbf{x})$  może być wyrażona jako liniowa funkcja realizacji  $y_t$ :

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T p_t y_t = \sum_{t=1}^T p_t \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j$$

Analogicznie, miary ryzyka mogą być wyrażane jako funkcje realizacji  $y_t$  i w przypadku przedziałami liniowych funkcji wypukłych mogą być obliczalne za pomocą programowania liniowego. Najprostsze miary ryzyka obliczalne przez PL wykorzystują wzory podobne do wariancji  $\sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{(R(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}))^2\}$ , używając wartości bezwzględnych zamiast kwadratów. W szczególności *odchylenie przeciętne* od średniej jest określone jako  $\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|R(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})|\}$ . Dla dyskretnych zmiennych losowych opisanych przez realizacje  $y_t$ , miara  $\delta(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T |y_t - \mu(\mathbf{x})|p_t$  jest wypukłą, kawałkami liniową funkcją  $\mathbf{x}$  i dlatego jej wartość dla danego portfela  $\mathbf{x}$  (ustalonych  $y_t$ ) jest obliczalna jako wartość optymalna zadania PL:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}) &= \min \sum_{t=1}^T (d_t^- + d_t^+) p_t \\ \text{p.o. } & d_t^- - d_t^+ = \mu(\mathbf{x}) - y_t, \quad d_t^-, d_t^+ \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (4)$$

Zauważmy, że dzięki dodatnim prawdopodobieństwom  $p_t$  w rozwiązaniu optymalnym zadania (4) spełniony jest warunek komplementarności  $d_t^- d_t^+ = 0$ .

Konno i Yamazaki [5] wprowadzili model optymalizacji portfela inwestycji (model MAD) oparty na mierze ryzyka  $\delta(\mathbf{x})$ . Wcześniej Yitzhaki [22] badał model średniej i ryzyka (model GMD) wykorzystujący *średnią różnicę Giniego*:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T |y_{t'} - y_{t''}| p_{t'} p_{t''} \quad (5)$$

jest obliczalna przez zadanie PL. Zauważmy, że wzór (5) stanowi odpowiednik wzoru na wariancję  $\sigma^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T (y_{t'} - y_{t''})^2 p_{t'} p_{t''}$ . Należy podkreślić, że mimo podobieństwa wzorów matematycznych, miary odchylenia przeciętnego i średniej różnicy Giniego stanowią odrębne miary ryzyka alternatywne w stosunku do wariancji.

Model Markowitza jest często krytykowany jako niezgodny z aksjomatami wyboru w warunkach ryzyka. Aksjomatyczne modele wyboru w warunkach ryzyka prowadzą do porządku częściowego określonego przez relację dominacji stochastycznej [21]. Relacje dominacji stochastycznej pozwalają porównywać niepewne zyski (zmiennie losowe) na podstawie przebiegu odpowiednich skumulowanych funkcji rozkładów. Jako pierwszą funkcję  $F^{(1)}$  przyjmuje się prawostronnie ciągłą dystrybuantę rozkładu zysków  $F_R^{(1)}(\eta) = F_R(\eta) = \mathbb{P}\{R \leq \eta\}$  dla  $\eta \in \mathbb{R}$ . Druga funkcja jest określona przez całkę jako  $F_R^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_R(\xi) d\xi$ . Wyraża ona również przeciętny niedobór do bieżącego celu  $\eta \in \mathbb{R}$  [13]:

$$F_R^{(2)}(\eta) = \mathbb{E}\{R \leq \eta\} \mathbb{E}\{\eta - R | R \leq \eta\} = \mathbb{E}\{\max\{\eta - R, 0\}\} \quad \text{dla } \eta \in \mathbb{R}.$$

Odpowiednia (słaba) relacja *dominacji stochastycznej drugiego rzędu* (SSD) przyjmuje postać:  $R' \succeq_{SSD} R''$ , gdy  $F_{R'}^{(2)}(\eta) \leq F_{R''}^{(2)}(\eta)$  dla wszystkich  $\eta \in \mathbb{R}$ . Mówimy, że portfel  $\mathbf{x}'$  *dominuje*  $\mathbf{x}''$  w sensie SSD ( $R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$ ), gdy  $F_{R(\mathbf{x}')}^{(2)}(\eta) \leq F_{R(\mathbf{x}'')}^{(2)}(\eta)$  dla wszystkich  $\eta$ , z przynajmniej jedną nierównością ostrą. Portfel dopuszczalny  $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{P}$  nazywamy *SSD efektywnym*, gdy nie istnieje inny portfel dopuszczalny  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$  dominujący portfel  $\mathbf{x}^0$  w sensie SSD. Jeżeli  $R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$ , to  $R(\mathbf{x}')$  jest preferowane w stosunku do  $R(\mathbf{x}'')$  we wszystkich modelach preferencji zakładających maksymalizację stóp zwrotu i unikanie ryzyka (tzw. awersję do ryzyka). Odpowiada to większej oczekiwanej użyteczności dla wszystkich rosnących i wklęsłych funkcji użyteczności. Dlatego kluczowe znaczenie dla modeli wyboru portfeli inwestycji jest ich zgodność z relacjami dominacji stochastycznej drugiego rzędu.

Określenie ryzyka za pomocą wariancji, jak to ma miejsce w klasycznym modelu Markowitza, w ogólnym przypadku może prowadzić do wyborów zdominowanych stochastycznie przez inne rozwiązania dopuszczalne (por. [13] i cytowane tam prace). Niestety jest to wspólna wada wszystkich modeli typu Markowitza wykorzystujących pewne miary dyspersji jako miary ryzyka. W przypadku dowolnej miary dyspersji  $\varrho(\mathbf{x})$  może się zdarzyć, że  $R(\mathbf{x}') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}'')$  i jednocześnie  $\varrho(\mathbf{x}') > \varrho(\mathbf{x}'')$ . Zauważmy, że pozbawiony ryzyka portfel  $\mathbf{x}'$  z gwarantowaną stopą zwrotu 1.0% jest oczywiście gorszy od obciążonego ryzykiem portfela  $\mathbf{x}''$  przynoszącego z jednakowym prawdopodobieństwem 1/2 stopę zwrotu 3.0% albo stopę zwrotu 5.0%. Faktycznie  $R(\mathbf{x}'') \succ_{SSD} R(\mathbf{x}')$ . Jednocześnie w przypadku użycia dowolnej miary dyspersji  $\varrho(\mathbf{x})$ , oba portfele są efektywne w sensie dwukryterialnego modelu typu Markowitza (2), ponieważ  $\varrho(\mathbf{x}'') > 0$ , podczas gdy  $\varrho(\mathbf{x}') = 0$ .

W celu pokonania tej słabości modelu Markowitza można wprowadzić funkcję  $\mu_\varrho(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})$  nazywaną *miarą bezpieczeństwa*. O ile miara ryzyka  $\varrho(\mathbf{x})$  jest wypukłą funkcją  $\mathbf{x}$ , to odpowiednia miara bezpieczeństwa  $\mu_\varrho(\mathbf{x})$  jest wklęsła. W przeciwieństwie do miar ryzyka (typu dyspersji), odpowiednie miary bezpieczeństwa mogą być zgodne z formalnymi modelami awersji do ryzyka [13]. Powiemy, że miara bezpieczeństwa  $\mu_\varrho(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})$  jest *zgodna z SSD* lub miara ryzyka  $\varrho(\mathbf{x})$  jest *dopełnieniowo zgodna z SSD*, gdy

$$R(\mathbf{x}') \succeq_{SSD} R(\mathbf{x}'') \Rightarrow \mu_\varrho(\mathbf{x}') \geq \mu_\varrho(\mathbf{x}'') \quad (6)$$

Jeżeli miara ryzyka  $\varrho(\mathbf{x})$  jest dopełnieniowo zgodna z SSD, to z dokładnością do alternatywnych portfeli o identycznych wartościach  $\mu(\mathbf{x})$  i  $\varrho(\mathbf{x})$ , każde rozwiązanie efektywne dwukryterialnego problemu

$$\max\{[\mu(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\} \quad (7)$$

jest SSD efektywne. Z tego wynika, że dwukryterialny model średniej i miary bezpieczeństwa (7) może być atrakcyjnym zamiennikiem tradycyjnego modelu średniej i ryzyka (2). Portfele efektywne w sensie modelu (7) stanowią podzbiór całego zbioru portfeli efektywnych w sensie odpowiedniego modelu średniej i ryzyka (2) i ta część zbioru efektywnego reprezentuje portfele SSD efektywne. Ponadto, wiele modeli optymalizacji portfela inwestycji stosuje miary będące faktycznie miarami bezpieczeństwa a nie ryzyka interpretowanego w sensie dyspersji. Dotyczy to na przykład miary ryzyka określonej jako najgorsza realizacja stopy zwrotu (stosowanej w tzw. minimaxowym modelu optymalizacji portfela rozważanym przez Younga [23]). Dotyczy to również popularnych w zastosowaniach bankowych miar typu warunkowej wartości zagrożonej (CVaR) [17].

Dopełnieniowa zgodność z SSD była najwcześniej wykazana dla średniej różnicy Giniego [22]. Średnia różnica Giniego definiuje miarę bezpieczeństwa

$$\mu_\Gamma(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R(\mathbf{x}) \wedge R(\mathbf{x})\}, \quad (8)$$

gdzie  $R(\mathbf{x}) \wedge R(\mathbf{x})$  oznacza minimum z dwu niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach (i.i.d.r.v.)  $R(\mathbf{x})$  [22]. Ta miara bezpieczeństwa jest obliczalna z następującego zadania PL:

$$\mu_\Gamma(\mathbf{x}) = \max \left[ \sum_{t=1}^T p_t^2 y_t + 2 \sum_{t'=1}^{T-1} \sum_{t''=t'+1}^T p_{t'} p_{t''} u_{t't''} \right] \quad (9)$$

$$\text{p.o.} \quad u_{t't''} \leq y_{t'}, \quad u_{t't''} \leq y_{t''} \quad \text{dla } t' < t'' = 1, \dots, T.$$

## 2. MIARY PRZECIĘTNEGO NIEDOBORU

Z pojęciem dominacji stochastycznej ściśle wiążą się kryteria niedoboru. Jednym z nich jest *przeciętny niedobór* do celu  $\eta \in \mathbb{R}$ , który w przypadku danych scenariuszowych, wyraża się wzorem:

$$\bar{\delta}_\eta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\max\{\eta - R(\mathbf{x}), 0\}\} = \sum_{t=1}^T \max\{\eta - y_t, 0\} p_t. \quad (10)$$

Ze względu na (3) jest to przedziałami liniowa, wypukła funkcja portfela  $\mathbf{x}$  i jej wartości mogą być określone zadaniem PL:

$$\bar{\delta}_\eta(\mathbf{x}) = \min \sum_{t=1}^T d_t^- p_t \quad \text{p.o.} \quad d_t^- \geq \eta - y_t, \quad d_t^- \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \quad (11)$$

Funkcja  $F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}$ , użyta do definicji relacji SSD, wyraża przeciętny niedobór do celu  $\eta \in \mathbb{R}$  [13] i może być przedstawiona w następujący sposób:

$$F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\eta) = \mathbb{E}\{\max\{\eta - R(\mathbf{x}), 0\}\} = \bar{\delta}_\eta(\mathbf{x}).$$

Tak więc relacja SSD może być postrzegana jako dominacja w sensie przeciętnych niedoborów do wszystkich możliwych celów.

Miara przeciętnego niedoboru (10) dla ustalonego celu  $\eta$  reprezentuje pojedyncze kryterium SSD. W oparciu o wybór skończonego zbioru punktów odniesienia  $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_m$  i ważonej kombinacji odpowiednich kryteriów przeciętnego niedoboru możliwe jest sformułowanie zagregowanej skalarnej miary ryzyka [12]:

$$\sum_{k=1}^m w_k \bar{\delta}_{\eta_k}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^m w_k \max\{\eta_k - R(\mathbf{x}), 0\} \right\}, \quad (12)$$

gdzie  $w_k$  (dla  $k = 1, \dots, m$ ) są dodatnimi wagami. Miara (12) może być interpretowana jako pojedyncza miara przeciętnego niedoboru do celu  $\eta_1$ :  $\mathbb{E}\{u(\max\{\eta_1 - R(\mathbf{x}), 0\})\}$ , zastosowana z pewną rosnącą (wypukłą) przedziałami liniową funkcją kary  $u$  określoną przez węzły  $b_k = \eta_1 - \eta_k$  i nachylenia  $s_k = w_1 + \dots + w_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Taka przedziałami liniowa funkcja kary była użyta w modelu planowania finansowego Russel-Yasuda-Kasai [1] do definiowania odpowiedniej miary ryzyka.

Gdy strategia inwestycyjna zakłada osiąganie minimalnych akceptowalnych zwrotów, to przeciętny niedobór do celu i jego rozszerzenia są postrzegane jako dobre miary ryzyka. Niemniej jednak, gdy do definicji punktów odniesienia (celów) wykorzystywana jest średnia stopa zwrotu portfela, to odpowiednia miara ryzyka powinna być definiowana w oparciu o kryteria niedoboru w odniesieniu do średniej  $\mu(\mathbf{x})$ , zamiast do jakiegokolwiek ustalonego celu  $\eta$ . Takie charakterystyki dolnych odchyień od średniej zwane są *semiodchyleńiami*. W szczególności *semiodchYLENIE przeciętne* (od średniej) jest określone jako:

$$\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\max\{\mu(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\}\} = F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\mu(\mathbf{x})). \quad (13)$$

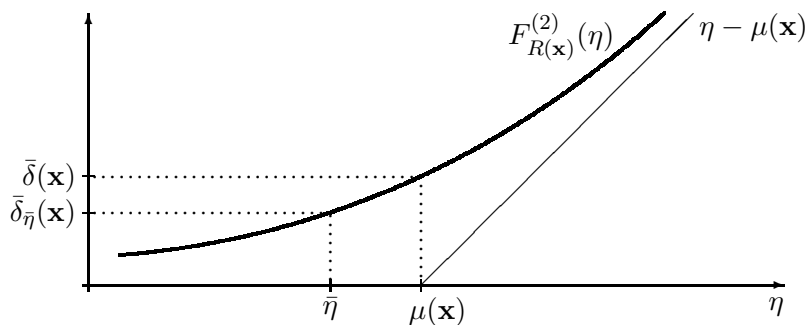
Zgodnie z (11), dla dyskretnych zmiennych losowych opisanych przez realizacje  $y_t$ , miara (13) jest obliczalna z następującego zadania PL:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\mathbf{x}) &= \min \sum_{t=1}^T d_t^- p_t \\ \text{p.o. } d_t^- &\geq \mu(\mathbf{x}) - y_t, \quad d_t^- \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned} \tag{14}$$

Zauważmy, że model MAD może być wyrażony z użyciem semiodchylenia przeciętnego  $\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\max\{\mu(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\}\} = 0.5\delta(\mathbf{x})$  jako miarą ryzyka. Jak zostało pokazane w pracy [13], semiodchylenie przeciętne jest miarą ryzyka dopełnieniowo zgodną z SSD, a odpowiednia miara bezpieczeństwa

$$\mu_\delta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\min\{R(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})\}\} \tag{15}$$

reprezentuje tzw. *dolną średnią*.



Rysunek 1: O–R Diagram

Funkcja  $F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}$  jest ciągła, wypukła, nieujemna i niemalejąca. W przypadku dyskretnych zmiennych losowych  $R(\mathbf{x})$  jest to funkcja przedziałami liniowa. Wykres  $F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\eta)$  stanowi podstawę tzw. diagramu O–R (Outcome–Risk) [13]. Wykres ten (rys. 1) ma dwie asymptoty przecinające się w punkcie  $(\mu(\mathbf{x}), 0)$  — oś  $\eta$  jest lewą asymptotą, natomiast prosta  $\eta - \mu(\mathbf{x})$  prawą. W przypadku deterministycznego (wolnego od ryzyka) zwrotu ( $R(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ ), wykres  $F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\eta)$  pokrywa się z asymptotami. Natomiast jakkolwiek niepewny zwrot z tą samą wartością oczekiwaną  $\mu(\mathbf{x})$  generuje krzywą powyżej asymptot. Obszar pomiędzy krzywą  $(\eta, F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\eta))$  i jej asymptotami reprezentuje dyspersję (i tym samym ryzyko)  $R(\mathbf{x})$  w porównaniu z deterministycznym zwrotem  $\mu(\mathbf{x})$ , tzw. obszar dyspersji. Zauważmy, że przeciętne niedobory  $\bar{\delta}_\eta$  reprezentują odpowiednie średnice pionowe obszaru dyspersji, a semiodchylenie przeciętne jest maksymalną średnicą pionową.

Semiodchylenie przeciętne chociaż formalnie zdefiniowane jako dolne odchylenie od wartości oczekiwanej jest równe odchyleniu górnemu  $\bar{\delta}(\mathbf{x}) =$

$\mathbb{E}\{\max\{\mu(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\}\} = \mathbb{E}\{\max\{R(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}), 0\}\} = 0.5\delta(\mathbf{x})$ . Dlatego model MAD reprezentuje faktycznie pomiar ryzyka symetryczny względem wartości oczekiwanej. Dla lepszego modelowania awersji do ryzyka niedoboru można wprowadzać odpowiednimi przedziałami liniowe funkcje kary. Okazuje się, że dla zachowania struktury zadania PL i zgodności z relacją SSD [10], węzły funkcji powinny odpowiadać odpowiednim dolnym średnim (15). Dokładniej, używając  $m$  (zależnych od rozkładu) celów  $\mu_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x}), \dots, \mu_m(\mathbf{x})$  i odpowiednich semiodchyliń przeciętnych  $\bar{\delta}_1(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x})$  oraz  $\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\max\{\mu_k(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\}\}$  dla  $k = 2, \dots, m$ , zdefiniowanych rekurencyjnie:

$$\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\max\{\mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\}\},$$

$$\mu_{k+1}(\mathbf{x}) = \mu_k(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^k \bar{\delta}_i(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\min\{R(\mathbf{x}), \mu_k(\mathbf{x})\}\},$$

można wprowadzić miarę ryzyka zdefiniowaną jako kombinacja liniowa

$$\bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m w_k \bar{\delta}_k(\mathbf{x}), \quad 1 = w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m \geq 0 \quad (16)$$

jak modelu  $m$ -MAD [10]. Miara ta może być interpretowana jako pojedyncze semiodchylenie przeciętne:  $\bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{u(\max\{\mu(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}), 0\})\}$  z rosnącą, wypukłą, przedziałami liniową funkcją kary  $u$  określoną przez węzły  $b_k = \mu(\mathbf{x}) - \mu_k(\mathbf{x})$  i nachylenia  $s_k = w_1 + \dots + w_k, k = 1, \dots, m$ . Dlatego miara  $\bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x})$  jest nazywana *skalowanym semiodchyleniem przeciętnym*. Skalowane semiodchylenie przeciętne (16) definiuje odpowiednią miarę bezpieczeństwa  $\mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x})$ , która może być wyrażona bezpośrednio jako ważona suma dolnych średnich  $\mu_k(\mathbf{x})$ :

$$\mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x}) = (w_1 - w_2)\mu_2(\mathbf{x}) + \dots + (w_{m-1} - w_m)\mu_m(\mathbf{x}) + w_m\mu_{m+1}(\mathbf{x}),$$

gdzie współczynniki wagowe są nieujemne i sumują się do 1. Ta miara bezpieczeństwa jest zgodna z SSD [10], czyli  $R(\mathbf{x}') \succeq_{SSD} R(\mathbf{x}'')$  implikuje  $\mu(\mathbf{x}') - \bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x}') \geq \mu(\mathbf{x}'') - \bar{\delta}^{(m)}(\mathbf{x}'')$ .

Bezpośrednio z definicji średniej różnicy Giniego (5) wynika:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{t'=1}^T \left[ \sum_{t'': y_{t''} < y_{t'}} (y_{t'} - y_{t''}) p_{t''} \right] p_{t'} = \sum_{t=1}^T F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(y_t) p_t = \sum_{t=1}^T \bar{\delta}_{y_t}(\mathbf{x}) p_t.$$

Zatem miara  $\Gamma(\mathbf{x})$  może być interpretowana jako ważona suma wielu przeciętnych niedoborów (12), przy czym zarówno cele jak i odpowiednie wagi zależą od specyficznego rozkładu zwrotów. Tym samym, chociaż średnia różnica Giniego bezpośrednio nie reprezentuje żadnego przeciętnego niedoboru, to okazuje się być kombinacją takich miar.



### 3. KWANTYLOWE MIARY RYZYKA

Semiodchylenie przeciętne lub średnia różnica Giniego, podobnie jak odchylenie standardowe, definiują pewne miary średniego ryzyka nie pozwalając na odpowiednie wyróżnianie scenariuszy ekstremalnych. W wielu zastosowaniach potrzebujemy ekstremalnych miar ryzyka dla podkreślenia konsekwencji bardziej pesymistycznych scenariuszy. Dla dyskretnej zmiennej losowej reprezentowanej przez realizacje  $y_t$ , wartość najgorszej realizacji

$$M(\mathbf{x}) = \min_{t=1, \dots, T} y_t, \quad (17)$$

jest najbardziej pesymistycznym wskaźnikiem jakości. Maksymalizacja najgorszej realizacji odpowiada typowej koncepcji maksymimalizacji powszechnie stosowanej w optymalizacji wielokryterialnej [12] i jest obliczalna jako zadanie PL:

$$M(\mathbf{x}) = \max \eta \quad \text{p.o.} \quad \eta \leq y_t \quad \text{dla } t = 1, \dots, T.$$

Wartość najgorszej realizacji była stosowana do optymalizacji portfela inwestycji [23]. Wartość ta przedstawia możliwe ryzyko ale nie jest typową miarą dyspersji przyjmującą wartość zero przy braku ryzyka. W rozważanych tu kategoriach jest to typowa miara bezpieczeństwa, podczas gdy maksymalne (dolne) semiodchylenie określone jako:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}) = \max_{t=1, \dots, T} (\mu(\mathbf{x}) - y_t)$$

może być uważane za odpowiednią klasyczną miarę ryzyka podlegającą minimalizacji [11]. Maksymalne semiodchylenie jest dobrze zdefiniowane na diagramie O–R (rys. 1), gdzie stanowi maksymalną poziomą średnicę obszaru dyspersji. Najgorsza realizacja jest miarą bezpieczeństwa zgodną z SSD.

Naturalnym uogólnieniem miary  $M(\mathbf{x})$  jest *najgorsza średnia warunkowa* definiowana jako średnia z danej porcji (kwantyla) najgorszych realizacji. Podobnie uogólnieniem miary  $\Delta(\mathbf{x})$  jest *warunkowe semiodchylenie przeciętne*. Dla najprostszego przypadku jednakowo prawdopodobnych scenariuszy ( $p_t = 1/T$ ) najgorsza średnia warunkowa  $M_{\frac{k}{T}}(\mathbf{x})$  może być definiowana jako średni zwrot przy realizacji  $k$  najgorszych scenariuszy. W szczególności, dla  $k = 1$  oznacza to najgorszą możliwą realizację, czyli  $M_{\frac{1}{T}}(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})$ . W ogólności najgorsze średnie warunkowe są związane z tzw. kwantylami drugiego rzędu definiowanymi za pomocą funkcji

$$F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}(p) = \int_0^p F_{R(\mathbf{x})}^{(-1)}(\alpha) d\alpha \quad \text{dla } 0 < p \leq 1 \quad \text{i} \quad F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}(0) = 0, \quad (18)$$

gdzie  $F_{R(\mathbf{x})}^{(-1)}(p) = \inf \{ \eta : F_{R(\mathbf{x})}(\eta) \geq p \}$  jest lewostronnie ciągłą, uogólnioną odwrotnością dystrybuanty  $F_{R(\mathbf{x})}$ , określającą wartość dolnego kwantyla pierwszego

rzędu. Za pomocą funkcji  $F^{(-2)}$  można zdefiniować najgorszą średnią warunkową i warunkowe semiodchylenie przeciętne dla każdego rzeczywistego poziomu tolerancji  $0 < \beta \leq 1$  jako:

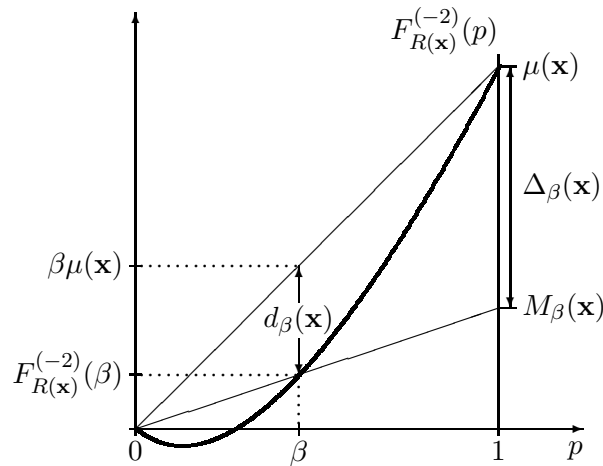
$$M_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}(\beta) \quad \text{i} \quad \Delta_\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{dla } 0 < \beta \leq 1. \quad (19)$$

Przy czym  $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$  oraz  $M_\beta(\mathbf{x})$  zbiega do  $M(\mathbf{x})$  przy  $\beta$  dążącym do 0.

Funkcja  $F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}$  jest funkcją dualną (sprzężoną) do  $F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}$  [16], dlatego też najgorsze średnie warunkowe  $M_\beta(\mathbf{x})$  wprowadzają alternatywną charakteryzację relacji SSD w sensie następującej równoważności:

$$R(\mathbf{x}') \succeq_{SSD} R(\mathbf{x}'') \Leftrightarrow M_\beta(\mathbf{x}') \geq M_\beta(\mathbf{x}'') \quad \text{dla każdego } 0 < \beta \leq 1.$$

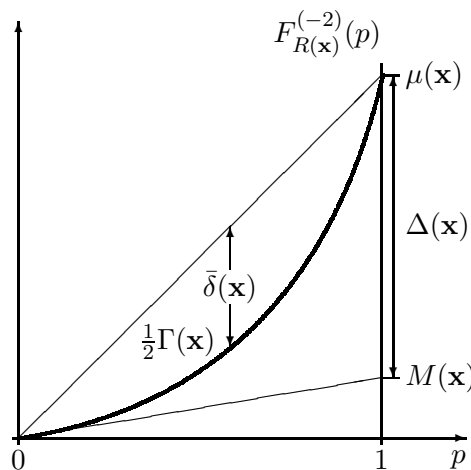
Najgorsza średnia warunkowa jako miara bezpieczeństwa i warunkowe semiodchylenie przeciętne jako miara ryzyka reprezentują model tak zwanej warunkowej wartości zagrożonej (Conditional Value-at-Risk — CVaR) postrzeganej odpowiednio w kategoriach bezwzględnych lub względnych. Dlatego będziemy używać skrótu CVaR do nazywania odpowiednich miar i modeli. Należy podkreślić jednak, że rozważana tu miara najgorszej średniej warunkowej określona przez (19) jest niekiedy traktowana [17] jako przybliżona wartość CVaR, podczas gdy za dokładną miarę przyjmuje się tzw. kwantylową średnią warunkową (Expected Shortfall – ES) [3], określoną jako  $ES_\beta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R(\mathbf{x}) | R(\mathbf{x}) \leq Q_\beta(\mathbf{x})\}$  gdzie  $Q_\beta(\mathbf{x})$  jest  $\beta$ -kwantylem. Faktycznie, jeżeli  $\mathbb{P}\{R(\mathbf{x}) \leq Q_\beta(\mathbf{x})\} = \beta$ , to  $M_\beta(\mathbf{x}) = ES_\beta(\mathbf{x})$ . W ogólności,  $F_{R(\mathbf{x})}(Q_\beta(\mathbf{x})) = \beta' \geq \beta$  i  $M_\beta(\mathbf{x}) \leq M_{\beta'}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R(\mathbf{x}) | R(\mathbf{x}) \leq Q_{\beta'}(\mathbf{x})\}$ . O ile miara  $M_\beta$  jest zawsze zgodna z SSD, to nie jest to prawdą dla miary ES [14].



Rysunek 2: Bezwzględna krzywa Lorenza i miary CVaR

Wykresem  $F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}$  jest tzw. *bezwzględna krzywa Lorenza* (rys. 2). Na wykresie  $F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}$  niedeterministyczne zwroty  $R(\mathbf{x})$  tworzą ciągłą i wypukłą krzywą

rozpoczynającą się w punkcie  $(0, 0)$  i kończącą w  $(1, \mu(\mathbf{x}))$ , podczas gdy deterministyczny zwrot z tą samą wartością oczekiwaną  $\mu(\mathbf{x})$  jest reprezentowany przez cięciwę (prostą) łączącą powyższe punkty. Tak więc obszar pomiędzy krzywą  $(p, F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}(p))$ ,  $0 \leq p \leq 1$  i jej cięciwą reprezentuje dyspersję (i tym samym ryzyko)  $R(\mathbf{x})$  w porównaniu z deterministycznym zwrotem  $\mu(\mathbf{x})$ . Obszar ten zwany jest *obszarem dyspersji Lorenza*. Można zauważyć, że  $\Delta_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta}d_\beta(\mathbf{x})$ , gdzie  $d_\beta(\mathbf{x})$  oznacza pionową średnicę obszaru dyspersji Lorenza w punkcie  $p = \beta$ . Obszar dyspersji Lorenza umożliwia też interpretację wielu innych miar ryzyka (rys. 3). W szczególności semiodchylenie przeciętne  $\bar{\delta}(\mathbf{x})$  jest największą średnicą pionową, a średnia różnica Giniego  $\Gamma(\mathbf{x})$  wyraża podwojone pole obszaru. Z kolei maksymalne semiodchylenie  $\Delta(\mathbf{x})$  jako graniczna wartość CVaR reprezentuje średnicę pionową trójkątnej obwiedni obszaru dyspersji Lorenza. Zarówno  $\bar{\delta}(\mathbf{x})$  jak i  $\Delta(\mathbf{x})$  mogą też być interpretowane jako (podwojone) miary powierzchni odpowiednich trójkątów aproksymujących obszar. Wynika stąd oczywista nierówność  $\bar{\delta}(\mathbf{x}) \leq \Gamma(\mathbf{x}) \leq \Delta(\mathbf{x})$ .



Rysunek 3: Bezwzględna krzywa Lorenza i miary ryzyka

Ze względu na relacje dualności, bezwzględna krzywa Lorenza może być definiowana przez optymalizację [15]:

$$F_{R(\mathbf{x})}^{(-2)}(\beta) = \max_{\eta \in \mathbb{R}} [\beta\eta - F_{R(\mathbf{x})}^{(2)}(\eta)] = \max_{\eta \in \mathbb{R}} [\beta\eta - \bar{\delta}_\eta(\mathbf{x})], \quad (20)$$

gdzie  $\eta$  jest zmienną rzeczywistą. W rozwiązaniu optymalnym  $\eta$  przyjmuje wartość  $\beta$ -kwantyla  $Q_\beta(\mathbf{x})$ . Ze wzoru (20) wynika, że bezwzględna krzywa Lorenza i związane z nią miary ryzyka wyrażają charakterystyki, które można przedstawić w diagramie O–R jako wyniki optymalizacji przy nachyleniu  $\beta$  (rys. 4).

Dla dyskretnych zmiennych losowych bezwzględna krzywa Lorenza jest prze-

działami liniowa. Zgodnie z (11), problem (20) staje się zadaniem PL:

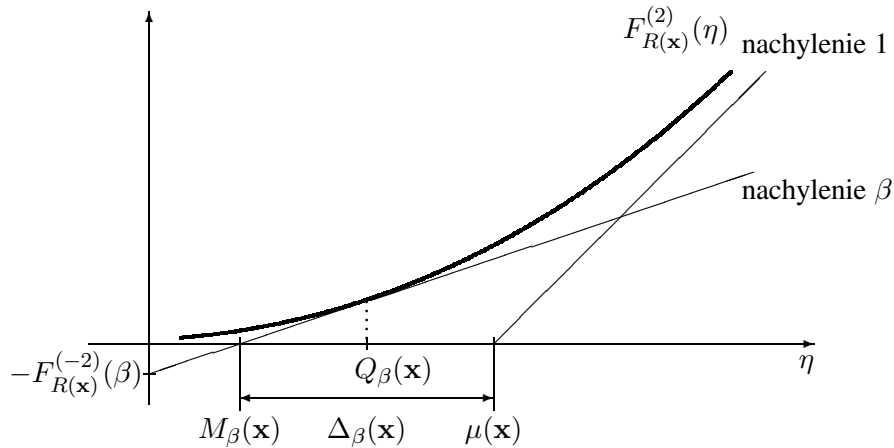
$$M_\beta(\mathbf{x}) = \max \left[ \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T d_t^- p_t \right] \quad (21)$$

p.o.  $d_t^- \geq \eta - y_t, \quad d_t^- \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T,$

gdzie  $\eta$  jest zmienną pomocniczą, nieograniczoną co do znaku. Natomiast warunkowe semiodchylenie przeciętne można wyznaczać jako różnicę  $\Delta_\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M_\beta(\mathbf{x})$  lub bezpośrednio z następującego zadania PL:

$$\Delta_\beta(\mathbf{x}) = \min \sum_{t=1}^T \left( d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^- \right) p_t \quad (22)$$

p.o.  $d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t, \quad d_t^+, d_t^- \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T.$



Rysunek 4: Kwantylowe miary ryzyka w diagramie O-R

Można zauważyć, że dla  $\beta = 0.5$  dostajemy  $1 - \beta = \beta$ . Zatem  $\Delta_{0.5}(\mathbf{x})$  reprezentuje odchylenie przeciętne od mediany — miarę typu MAD proponowaną przez Sharpe'a [19]. Odpowiednie zadanie PL dla tej miary przybiera postać:

$$\Delta_{0.5}(\mathbf{x}) = \min \sum_{t=1}^T (d_t^+ + d_t^-) p_t$$

p.o.  $d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t, \quad d_t^+, d_t^- \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T.$

To zadanie PL różni się od odpowiedniego zadania dla modelu MAD (4) jedynie użyciem swobodnej zmiennej  $\eta$  zamiast wartości średniej  $\mu(\mathbf{x})$ .

Miara CVaR dla ustalonego poziomu tolerancji  $\beta$  reprezentuje pojedyncze dualne kryterium SSD. W oparciu o wybór skończonego zbioru poziomów tolerancji  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m \leq 1$  i ważonej kombinacji odpowiednich miar CVaR

możliwe jest sformułowanie zagregowanej skalarnej miary bezpieczeństwa [12]:

$$M_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m w_k M_{\beta_k}(\mathbf{x}), \quad \sum_{k=1}^m w_k \leq 1, \quad w_k > 0 \quad \text{dla } k = 1, \dots, m \quad (23)$$

i odpowiedniej miary ryzyka

$$\Delta_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m w_k \Delta_{\beta_k}(\mathbf{x}).$$

#### 4. MODELE OBLICZENIOWE

Model średniej i ryzyka umożliwia proste modelowanie preferencji wyboru w warunkach ryzyka za pomocą odpowiednich technik optymalizacji dwukryterialnej. Najprostszym podejściem jest tu określanie wymaganego poziomu średniej  $\mu_0$  i minimalizacja miary ryzyka. Jak jednak było wcześniej wskazywane, często mamy do czynienia z maksymalizacją odpowiedniej miary bezpieczeństwa. Dlatego dla rozważanych miar ryzyka zostaną zbudowane modele PL w parametrycznej postaci:

$$\max\{\alpha\mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}, \quad (24)$$

gdzie dla  $\alpha = 0$  będzie realizowana minimalizacja miary ryzyka  $\varrho(\mathbf{x})$ , natomiast dla  $\alpha = 1$  maksymalizacja miary bezpieczeństwa  $\mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})$ . Wszystkie modele będą zawierały następujące ograniczenia ogólne:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{P} \quad \text{i} \quad z \geq \mu_0, \quad (25)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t - z = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - y_t = 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T, \quad (26)$$

gdzie  $z$  i  $y_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) są zmiennymi nieograniczonymi reprezentującymi odpowiednio średnią stopę zwrotu portfela  $\mathbf{x}$  oraz realizację stopy zwrotu portfela w  $t$ -tym scenariuszu. Ponadto każdy model zawiera ograniczenia definiujące specyficzne miary ryzyka i bezpieczeństwa. Tabela 1 zawiera zestawienie najważniejszych modeli.

**Modele MAD.** Standardowy model MAD [5], implementowany z semiodchyleciem przeciętnym (13) jako miarą ryzyka, prowadzi do następującego zadania PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha z - z_1 \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26) \text{ i} \\ & z_1 - \sum_{t=1}^T p_t d_{1t} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$d_{1t} - z + y_t \geq 0, \quad d_{1t} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T, \quad (28)$$

gdzie nieujemne zmienne  $d_{1t}$  reprezentują dolne odchylenia od średniej dla scenariuszy  $t$ , a  $z_1$  jest zmienną określającą wartość przeciętnego odchylenia. Tak sformułowane zadanie PL używa  $T + 1$  zmiennych i  $T + 1$  ograniczeń liniowych dla określenia semiodchylenia przeciętnego.

Dla uszczegółowienia modelowania semiodchylenia zgodnie z techniką  $m$ -MAD [10], trzeba powtórzyć ograniczenia typu (27)–(28) dla każdego poziomu  $k = 2, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha z - z_1 - \sum_{k=2}^m w_k z_k \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26), (27)\text{--}(28) \text{ i dla } k = 2, \dots, m : \\ & \sum_{t=1}^T p_t d_{kt} = z_k, \\ & d_{kt} + \sum_{i=1}^{k-1} z_i + y_t \geq z, \quad d_{kt} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

W wyniku otrzymujemy zadanie PL zawierające  $m(T + 1)$  zmiennych i  $m(T + 1)$  ograniczeń liniowych dla wymodelowania  $m$ -poziomowego skalowanego odchylenia przeciętnego.

**Modele CVaR.** Dla dowolnego  $0 < \beta < 1$  model CVaR [17], z najgorszą średnią warunkową (19) jako miarą bezpieczeństwa, może być zaimplementowany w formie następującego zadania PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\alpha - 1)z + q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26) \text{ i } d_t - q + y_t \geq 0, \quad d_t \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Model jest bardzo podobny do modelu MAD z tą różnicą, że tutaj dolne odchylenia są definiowane przy użyciu zmiennej niezależnej, nieograniczonej  $q$ , zamiast zmiennej  $z$  reprezentującej wartość średnią w (28).

Dla wzbogacenia modelu przez możliwość stosowania ważonej kombinacji miar CVaR (23) trzeba odpowiednio powtórzyć ograniczenia definiujące zmienne odchylenia. Prowadzi to do zadania PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\alpha - 1)z + \sum_{k=1}^m w_k (q_k - \frac{1}{\beta_k} \sum_{t=1}^T p_t d_{kt}) \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26) \text{ i} \\ & d_{kt} - q_k + y_t \geq 0, \quad d_{kt} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T; \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Tabela 1

Sformułowania PL dla modeli minimalizacji miary ryzyka ( $\alpha = 0$ )  
i maksymalizacji miary bezpieczeństwa ( $\alpha = 1$ )

Model	$\max\{\alpha\mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$
Ograniczenia ogólne	$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ $\sum_{t=1}^T p_t y_t = z \quad \text{i} \quad z \geq \mu_0$ $\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j = y_t \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model MAD	$\max \alpha z - z_1$ przy ograniczeniach ogólnych i $\sum_{t=1}^T p_t d_{1t} = z_1$ $d_{1t} + y_t \geq z, d_{1t} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model $m$ -MAD	$\max \alpha z - z_1 - \sum_{k=2}^m w_k z_k$ przy ograniczeniach MAD i dla $k = 2, \dots, m$ : $\sum_{t=1}^T p_t d_{kt} = z_k$ $d_{kt} + \sum_{i=1}^{k-1} z_i + y_t \geq z, d_{kt} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model CVaR	$\max (\alpha - 1)z + q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t$ przy ograniczeniach ogólnych i $d_t + y_t \geq q, d_t \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model Minimaksowy	$\max (\alpha - 1)z + q$ przy ograniczeniach ogólnych i $y_t \geq q \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model GMD	$\max \alpha z - \sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'} p_{t'} p_{t''} d_{t' t''}$ przy ograniczeniach ogólnych i $d_{t' t''} \geq y_{t'} - y_{t''}, d_{t' t''} \geq 0 \quad \text{dla } t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t'$

Jako graniczny przypadek modelu CVaR przy  $\beta$  dążącym do 0 otrzymujemy model Minimaksowy [23]. Może on być sformułowany w uproszczonej postaci z pominięciem zmiennych reprezentujących odchylenia:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\alpha - 1)z + q \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26) \text{ i } y_t \geq q \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Dzięki temu potrzebne są tu tylko  $T$  ograniczenia i jedna pomocnicza zmienna dla wymodelowania miary najgorszej realizacji.

**Model GMD.** Model wykorzystujący średnią różnicę Giniego ( $\varrho(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x})$ ) [22], bezpośrednio z definicji (5) może być sformułowany w postaci:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha z - \sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'} p_{t'} p_{t''} d_{t't''} \\ \text{p.o.} \quad & (25)\text{--}(26) \text{ i } d_{t't''} \geq y_{t'} - y_{t''}, d_{t't''} \geq 0 \quad \text{dla } t' \neq t'' = 1, \dots, T \end{aligned}$$

zawierającej  $T(T - 1)$  nieujemnych zmiennych  $d_{t't''}$  i  $T(T - 1)$  nierówności. Zmienne  $d_{t't''}$  odpowiadają tu jednoelementowym kolumnom współczynników zadania PL i w zadaniu dualnym odpowiednie ograniczenia stanowią proste górne ograniczenia na zmienne. Dlatego dualna postać odpowiedniego zadania PL jest tu łatwiejsza do rozwiązywania.

Ścisłe wyróżnienie miar ryzyka i odpowiednich miar bezpieczeństwa umożliwia dla wszystkich rozważanych miar formułowanie odpowiednich modeli ilorazowych, gdzie poszukuje się ryzykownego portfela oferującego maksymalny przyrost stopy zwrotu w stosunku do przyrostu miary ryzyka (w odniesieniu do inwestycji w walory pozbawione ryzyka). Mianowicie przy danej stopie zwrotu wolnej od ryzyka  $r_0$  poszukujemy ryzykownego portfela  $\mathbf{x}$ , który maksymalizuje stosunek  $(\mu(\mathbf{x}) - r_0)/\varrho(\mathbf{x})$ . To prowadzi do następującego zadania optymalizacji:

$$\max \left\{ \frac{\mu(\mathbf{x}) - r_0}{\varrho(\mathbf{x})} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \right\}. \quad (29)$$

Rozwiązanie optymalne problemu (29) jest nazywane *portfelem stycznym* lub *portfelem rynkowym* [2]. Zadanie (29) wykorzystuje miarę ryzyka typu dyspersji, taką że  $\varrho(\mathbf{x}) = 0$  dla portfela  $\mathbf{x}$  pozbawionego ryzyka. Okazuje się, że w przypadku miar ryzyka wyznaczanych przez zadania PL również model ilorazowy (29) może być wyrażony w postaci zadania PL [8]. Aby sprowadzić model ilorazowy (29) do postaci zadania programowania liniowego należy wykonać następujące przekształcenia: wprowadzić nowe zmienne  $v = \mu(\mathbf{x})/\varrho(\mathbf{x})$  i  $v_0 = 1/\varrho(\mathbf{x})$  oraz dokonać podstawienia zastępując oryginalne zmienne  $x_j$  przez  $\tilde{x}_j = x_j/\varrho(\mathbf{x})$ . W wyniku otrzymuje się liniową funkcję celu  $\max v - r_0 v_0$  i zbiór dopuszczalny PL. Poniżej będą pokazane szczegółowo przykładowe przekształcenia dla ilorazowych modeli MAD i CVaR. Więcej sformułowań jest zestawionych w tabeli 2.



Tabela 2

Sformułowania PL dla modeli ilorazowych

Model	$\max \left\{ \frac{\mu(\mathbf{x}) - r_0}{\varrho(\mathbf{x})} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \right\}$
Ograniczenia ogólne	$\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j = v_0, \quad \tilde{x}_j \geq 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, n$ $\sum_{t=1}^T p_t \tilde{y}_t = v, \quad \sum_{j=1}^n r_{jt} \tilde{x}_j = \tilde{y}_t \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model MAD	$\max v - r_0 v_0$ <p>przy ograniczeniach ogólnych i</p> $\sum_{t=1}^T p_t \tilde{d}_{1t} = 1$ $\tilde{d}_{1t} + \tilde{y}_t \geq v, \quad \tilde{d}_{1t} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model CVaR	$\max v - r_0 v_0$ <p>przy ograniczeniach ogólnych i</p> $v - \tilde{q} + \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t \tilde{d}_t = 1$ $\tilde{d}_t + \tilde{y}_t \geq \tilde{q}, \quad \tilde{d}_t \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model Minimaksowy	$\max v - r_0 v_0$ <p>przy ograniczeniach ogólnych i</p> $\tilde{y}_t \geq v - 1 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T$
Model GMD	$\max v - r_0 v_0$ <p>przy ograniczeniach ogólnych i</p> $\sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'} p_{t'} p_{t''} \tilde{d}_{t't''} = 1$ $\tilde{d}_{t't''} \geq \tilde{y}_{t'} - \tilde{y}_{t''}, \quad \tilde{d}_{t't''} \geq 0 \quad \text{dla } t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t'$
Rozwiązanie	$x_j = \frac{\tilde{x}_j}{v_0} \quad \text{dla } j = 1, \dots, n, \quad \mu(\mathbf{x}) = \frac{v}{v_0}, \quad \varrho(\mathbf{x}) = \frac{1}{v_0}$

Wszystkie rozważane tu sformułowania dotyczą najprostszego zbioru portfeli dopuszczalnych (1), ale prezentowane przekształcenie może być również skutecznie stosowane do bardziej złożonych ograniczeń PL. Po rozwiązaniu przekształconego problemu, wartości oryginalnych zmiennych  $x_j$  mogą być wyznaczone w wyniku dzielenia  $\tilde{x}_j$  przez  $v_0$ , podczas gdy  $\varrho(\mathbf{x}) = 1/v_0$  i  $\mu(\mathbf{x}) = v/v_0$  (jak to zostało zestawione w ostatnim wierszu tabeli 2).

**Ilorazowy model MAD.** W modelu MAD miara ryzyka  $\varrho(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x})$  jest bezpośrednio wyrażona za pomocą zmiennej  $z_1$  definiowanej w równaniu (27). Stąd, ilorazowy model MAD może być zapisany jako

$$\max \frac{z - r_0}{z_1} \quad \text{p.o. } \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \quad (25)\text{--}(26) \text{ i } (27)\text{--}(28).$$

Wprowadzając zmienne  $v = z/z_1$  i  $v_0 = 1/z_1$  otrzymujemy liniowe kryterium  $v - r_0 v_0$ . Dalej, dzielimy wszystkie ograniczenia przez  $z_1$  i dokonujemy podstawienia:  $\tilde{d}_{1t} = d_{1t}/z_1$ ,  $\tilde{y}_t = y_t/z_1$  dla  $t = 1, \dots, T$ , oraz  $\tilde{x}_j = x_j/z_1$ , dla  $j = 1, \dots, n$ . W rezultacie otrzymujemy następujące zadanie PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & v - r_0 v_0 \\ \text{p.o.} \quad & \sum_{t=1}^T p_t \tilde{d}_{1t} = 1 \\ & \tilde{d}_{1t} + \tilde{y}_t \geq v, \quad \tilde{d}_{1t} \geq 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T, \\ & \sum_{t=1}^T p_t \tilde{y}_t = v, \quad \sum_{j=1}^n r_{jt} \tilde{x}_j = \tilde{y}_t \quad \text{dla } t = 1, \dots, T, \\ & \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j = v_0, \quad \tilde{x}_j \geq 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**Ilorazowy model CVaR.** W modelu CVaR odpowiednia miara ryzyka  $\varrho(\mathbf{x}) = \Delta_\beta(\mathbf{x})$  nie jest bezpośrednio reprezentowana. Można jednak wprowadzić równanie:

$$z - q + \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t = z_1$$

wyrażające miarę ryzyka  $\Delta_\beta(\mathbf{x})$  w postaci zmiennej  $z_1$ , co pozwala na dalsze transformacje analogiczne jak w modelu MAD.

## PODSUMOWANIE

Problem optymalizacji portfela inwestycji finansowych jest tradycyjnie formalizowany w postaci dwukryterialnego modelu średniej i ryzyka, gdzie oczekiwana (średnia) stopa zwrotu jest maksymalizowana, a pewna skalarna miara ryzyka jest minimalizowana. W klasycznym podejściu Markowitza jako miarę ryzyka przyjmuje się odchylenie standardowe lub wariancję, co prowadzi do zagadnienia programowania kwadratowego. O wiele większe możliwości skutecznego wykorzystania modelu pojawiają się w przypadku wynikowego zadania programowania liniowego.

Ze względu na konieczność zapewnienia dywersyfikacji portfela, żadna miara ryzyka nie może być liniową funkcją portfela. Tym niemniej może ona być przedziałami liniową wypukłą funkcją realizacji stopy zwrotu  $i$ , co za tym idzie, być wyznaczana za pomocą programowania liniowego w przypadku dyskretnych zmiennych losowych. Zaproponowano wiele różnych miar ryzyka umożliwiających taką linearyzację procedury optymalizacji portfela inwestycji.

Celem tej pracy była pewna systematyzacja różnych modeli programowania liniowego dla optymalizacji portfela inwestycji. W szczególności wprowadzone zostało jednolite wyróżnienie miar ryzyka i odpowiednich miar bezpieczeństwa dla wszystkich rozważanych modeli. Umożliwiło to odpowiednie sformułowanie zadań PL do wyznaczenia optymalnych portfeli rynkowych dla poszczególnych modeli. Ponadto zostało wykazane ściśle powiązanie wszystkich miar z kryteriami przeciętnego niedoboru stanowiącymi podstawę relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu.

**LITERATURA**

1. Carino D.R., Myers D.H., Ziemba W.T. (1998). Concepts, Technical Issues and Uses of the Russel-Yasuda Kasai Financial Planning Model. *Operations Research*, 46, 450–463.
2. Elton E.J., Gruber M.J. (1998). *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*. WIG Press, Warszawa.
3. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, New York.
4. Konno H., Wijayanayake A. (2001). Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. *Mathematical Programming*, 89, 233–250.
5. Konno H., Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37, 519–531.
6. Levy H. (1992). Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis. *Management Science*, 38, 555–593.
7. Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G. (2001). LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, Raport 01–25, IAIIS, Politechnika Warszawska. (*IMA J. of Management Mathematics*, w druku)
8. Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G. (2003). On LP Solvable Models for Portfolio Selection, *Informatica*, 14, 37–62.
9. Markowitz H.M. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7, 77–91.
10. Michalowski W., Ogryczak W. (1999). A Recursive Procedure for Selecting Optimal Portfolio According to the MAD Model. *Control and Cybernetics*, 28, 725–738.
11. Ogryczak W. (2000). Multiple Criteria Linear Programming Model for Portfolio Selection. *Annals of OR*, 97, 143–162.
12. Ogryczak W. (2002). Multiple Criteria Optimization and Decision under Risk. *Control and Cybernetics*, 31, 975–1003.
13. Ogryczak W., Ruszczyński A. (1999). From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models. *European Journal of OR*, 116, 33–50.
14. Ogryczak W., Ruszczyński A. (2002). Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures. *Int. Trans. in OR*, 9, 661–680.

15. Ogryczak W., Ruszczyński A. (2002). Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models. *SIAM Journal on Optimization*, 13, 60–78.
16. Rockafellar R.T. (1970) *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, Princeton.
17. Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2, 21–41.
18. Sharpe W.F. (1971). A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem. *J. of Fin. and Quant. Anal.*, 6, 1263–1275.
19. Sharpe W.F. (1971). Mean-Absolute Deviation Characteristic Lines for Securities and Portfolios. *Management Science*, 18, B1–B13.
20. Speranza M.G. (1993). Linear Programming Models for Portfolio Optimization. *Finance*, 14, 107–123.
21. Whitmore G.A., Findlay M.C. (1978). *Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk*. Heath, Lexington, MA.
22. Yitzhaki S. (1982). Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini's Mean Difference. *American Economic Review*, 72, 178–185.
23. Young M.R. (1998). A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution. *Management Science*, 44, 673–683.