Modele uwzględniające niepewność zapotrzebowania i dostaw towarów i usług

Włodzimierz Ogryczak

Raport Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej

Październik, 2012

Raport nr: 12–11

Politechnika Warszawska
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej
ul. Nowowiejska 15/19, 00–665 Warszawa
tel. 22-234-7397, fax 22-825-3719

Modele uwzględniające niepewność zapotrzebowania i dostaw towarów i usług*

Włodzimierz Ogryczak

ogryczak@elka.pw.edu.pl

Październik, 2012

Steszczenie

Niepewność zapotrzebowania i dostaw dóbr i usług. Innym istotnym elementem jest umożliwienie uczestnikom rynku zarządzania ryzykiem w warunkach niepewności, gdy określone są jedynie dane interwałowe, a nie są znane wartości miar ryzyka np. rozkładów prawdopodobieństwa. źródłami niepewności mogą być: nieznajomość zapotrzebowania, ryzyko cenowe itp. Typowymi produktami służącymi do zarządzania ryzykiem są różnego typu instrumenty pochodne: kontrakty terminowe (ang. forward, futures) oraz opcje (sprzedaży i kupna). Kontrakty dotyczą dostawy w przyszłości (w określonym momencie) określonej ilości towaru po określonej cenie, która może zostać określona jawnie lub może zostać określona formuła używana do wyznaczenia ceny np. kwota podwyższona o publikowany wskaźnik wzrostu cen, średnia cena giełdowa itp. Natomiast opcje dają ich nabywcy (pozycja długa) prawo nabycia (w przypadku opcji kupna, ang. call option) lub sprzedaży (w przypadku opcji sprzedaży, ang. put option) towaru po określonej cenie, nazywanej ceną wykonania opcji. W przypadku rynków infrastrukturalnych należy odpowiednio zarezerwować zasoby sieciowe, uwzględniając różne możliwości rozpływów w zależności od tego które opcje zostaną wykorzystane. W zadaniu będą rozwijane modele aukcji transgranicznych oraz modele łącznego bilansowania towarów, opcji i usług systemowych na rynkach bilansujących.

Słowa kluczowe. teoria mechanizmów, optymalizacja, efektywność, zgodność motywacji, niepewność.

1 Wprowadzenie

Wiele decyzji dotyczących sprzedaży, czy zakupu dóbr lub usług publicznych, podejmowanych z zastosowaniem przetargów lub aukcji, wymaga uwzględnienia preferencji wielokryterialnych oraz występowania wielu atrybutów opisujących wymagania, zasoby, towary, itp. Zarówno decydent, który przeprowadza przetarg lub aukcję jak i oferenci, podejmując decyzje kierują się swoimi niezależnymi złożonymi celami, które często są celami wielokryterialnymi. Istotne jest przy tym także uwzględnienie złożonych interesów i celów społeczeństwa. Wielokryterialność celów uczestników przetargów i aukcji nie jest w dotychczasowej praktyce uwzględniona w sposób dostateczny. Przedmiotem badań będą różne rodzaje reguł rozstrzygania przetargów i aukcji z bezpośrednim uwzględnieniem wielokryterialności celów uczestników. Budowane będą

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010–2013 jako projekt badawczy nr N N514 044438

różne modele decyzyjne i prowadzone symulacje działań możliwych reguł tak, aby otrzymywane rozwiązania były sprawiedliwe, efektywne oraz odporne na możliwe spekulacje uczestników. Przewiduje się zastosowanie podejścia punktu referencyjnego [Wierzbicki00], [Ogryczak01]. Wymagane jednak będzie przy tym opracowanie odpowiednich wariantów metody punktu referencyjnego uwzględniających specyfikę przetargów i aukcji, oraz konstruowanie odpowiednich interakcyjnych procedur z uwzględnieniem mechanizmów uczenia. Innym podejściem do analizy wielokryterialnej jest skalaryzacja poszczególnych kryteriów w jedno, o odpowiednich własnościach. W szczególności tzw. porządkowa średnia ważona (ang. ordered weighted average - OWA) [Yager95] używając wag preferencyjnych przypisywanych odpowiednio najgorszemu wynikowi, drugiemu najgorszemu itp. zachowując sumacyjny charakter umożliwia modelowanie różnych typów agregacji od egalitarnych po efektywnościowe. Porządkowe średnie ważone o odpowiednich własnościach monotoniczności wag preferencyjnych reprezentują koncepcje sprawiedliwej optymalizacji [Kostreva04] i mogą być wprowadzone do modeli optymalizacyjnych za pomocą prostych nierówności liniowych. Tym samym odpowiednie systemy opisywane zależnościami liniowymi (bilansowanie dóbr podzielnych) mogą być łatwo optymalizowane technikami programowania liniowego. Nie dotyczy to jednak systemów i zagadnień opisywanych za pomocą modeli dyskretnych (bilansowanie dóbr niepodzielnych), które wymagają opracowania nowych algorytmów dokładnych lub przybliżonych.

2 Modelowanie preferencji w warunkach niepewności

2.1 Niepewność i ryzyko

W rzeczywistych problemach decyzyjnych wiedza decydenta o konsekwencjach wyboru poszczególnych opcji jest często niepełna. Wynika to z faktu, że problem decyzyjny dotyczy zazwyczaj przyszłych działań i stanów natury oraz jest oceniany przyszłymi wynikami. Znaczna część parametrów określających warunki decyzji i ocenę wyników może ulec zmianie. Na przykład, mogą się zmienić ceny surowców, ceny produktów, kursy wymiany walut, oprocentowanie lokaty, zapotrzebowanie (możliwości sprzedaży danego produktu). Mogą też nastąpić zdarzenia o charakterze katastroficznym diametralnie zmieniające sytuację np. klęski żywiołowe, zamknięcie rynku zbytu lub dostaw (embargo), niewypłacalność klienta, utrata licencji itp. Innymi słowy, wynik decyzji (wartość funkcji oceny $f(\mathbf{x})$) jest zwykle niedeterministyczny.

Ogólnie można powiedzieć, że dla danej decyzji nie jest znany konkretny wynik a znane są jedynie możliwe realizacje wyniku decyzji. To znaczy, znane są *scenariusze* reprezentujące możliwe stany natury (środowiska) jako zdarzenia losowe, z których zrealizuje się dokładnie jedno. Zdarzenia te są powodowane i charakteryzowane przez czynniki niezależne od decydenta. Jednocześnie każdy konkretny scenariusz określa jednoznacznie realizacje wyników dla poszczególnych decyzji (wariantów decyzyjnych).
Mówimy, że występuje *niepewność właściwa (strukturalna)*, gdy znana jest co najwyżej lista potencjalnych skutków decyzji, czyli lista scenariuszy i realizacji wyników dla poszczególnych scenariuszy.

Dla scenariuszy może być dodatkowo określony pewiem model probabilistyczny, czyli może być zdefiniowany rozkład prawdopodobieństwa występowania poszczególnych scenariuszy.

Jeżeli znana jest lista potencjalnych skutków decyzji (scenariuszy) oraz prawdopodobieństwo zaistnienia każdego z nich, to mówimy o *niepewności stochastycznej (parametrycznej)*.

W przypadku niepewności stochastycznej pojawia się pojęcie ryzyka. Ryzyko może być różnie określane i mierzone. Najbardziej ogólna definicja określa *ryzyko* jako rosnącą funkcję dwóch zmiennych: prawdopodobieństwa poniesienia straty i wielkości tej straty. Nie jest to bardzo ścisłe rozróżnienie, ale na ogół przyjmuje się, że w przypadku znajomości jedynie scenariuszy (niepewności strukturalnej) mówimy o decyzji w *warunkach niepewności.* Natomiast w przypadku, gdy znane są scenariusze i ich prawdopodobieństwa (niepewność parametryczna) mówimy o decyzji w *warunkach ryzyka.* Zauważmy, że w przypadku decyzji w warunkach ryzyka wynik decyzji jest formalnie dokładnie określony w kategoriach matematycznych: jest konkretną zmienną losową o znanym rozkładzie. Decydującym dla określenia preferencji decydenta jest wtedy jego odbiór (model) ryzyka.

Załóżmy, że mamy zidentyfikowane m scenariuszy S_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Określonym scenariuszom odpowiadają odpowiednie realizacje funkcji oceny $y_i = f_i(\mathbf{x})$. Przy każdym scenariuszu jesteśmy zainteresowani lepszą (większą) wartością oceny. Problem decyzji w warunkach niepewności można zatem zapisać w postaci

$$\max\{(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \;\;:\;\; \mathbf{x} \in Q\}$$

Jednakże istotny jest tu fakt, że $f_i(\mathbf{x})$ reprezentują różne realizacje tej samej oceny (w szczególności wyrażone w tej samej skali jednostek) a nie całkowicie niezależne oceny. Jest to formalny zapis, jaki stosowaliśmy do sformułowania modelu optymalizacji wielokryterialnej. Operator max użyty w modelu wskazuje jedynie, że dla każdej funkcji f_i jesteśmy zainteresowani większą wartością oceny. Nie ma natomiast jednoznacznej definicji najlepszego (optymalnego) rozwiązania, co wynika z konieczności uwzględniania indywidualnych preferencji w określaniu rozwiązania, a co za tym idzie potrzeba raczej wspomagania decyzji niż arbitralnego wyznaczenia rozwiązania. Powyższy zapis modelu jest też poprawny dla problemów decyzji w warunkach ryzyka nie uwzględnia on jednak prawdopodobieństw jako atrybutów scenariuszy. Problem decyzji w warunkach ryzyka prowadzi zasadniczo do modeli optymalizacji stochastycznej

$$\max\{(f(\xi, \mathbf{x}) \;\;:\;\; \mathbf{x} \in Q\}$$

gdzie ξ jest określoną zmienną losową.

2.2 Decyzje w warunkach niepewności

Kryterium średniej polegające na maksymalizacji wyniku średniego jest bardzo często stosowanym modelem preferencji dla wyboru decyzji w warunkach niepewności. Kryterium średniej (Laplace'a) opiera się na założeniu: "jeżeli nie wiadomo nic o stanach natury, to można przyjąć, że są one jednakowo prawdopodobne". Prowadzi to wyboru decyzji o największej średniej arytmetycznej (lub sumie) wyników dla poszczególnych scenariuszy. Zauważmy, że przy wielokryterialnej interpretacji scenariuszy jako odrębnych ocen f_i podejście to odpowiada maksymalizacji sumy ocen

$$\max\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \;\;:\;\; \mathbf{x} \in Q\} = \max\{\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \;\;:\;\; \mathbf{x} \in Q\}$$

Zauważmy, że stosowanie średniej arytmetycznej jako kryterium wyboru ma interpretację opartą na sztucznym założeniu występowania rozkładu jednostajnego scenariuszy. Jest to rzadko przyjmowane założenie, chociaż samo kryterium średniej jest to dość powszechnie akceptowane. W wielu przypadkach stosowane jest raczej założenie: "jeżeli nie wiadomo nic o stanach natury, to można przyjąć, że są one próbką rozkładu normalnego". Odpowiednio zdefiniowana średnia byłaby tu znacznie bardziej skomplikowana i rzadko jest akceptowana jako model preferencji dla wspomagania decyzji w warunkach niepewności.

Kryterium optymistyczne i pesymistyczne to dwa krańcowo różneThe final outcome is uncertain and only its realizations under various

podejścia koncentrujące się odpowiednio na najlepszych i najgorszych realizacjach. To znaczy, w modelu optymistycznym wszystkie decyzje oceniane są z perspektywy wyników przy najlepszych możliwych dla nich scenariuszach. Odpowiada to optymizmowi w sensie zakładania wystąpienia najkorzystniejszych stanów natury. Z kolei, w modelu pesymistycznym wszystkie decyzje oceniane są z perspektywy wyników przy najgorszych możliwych dla nich scenariuszach. Odpowiada to pesymizmowi w sensie zakładania wystąpienia najbardziej niekorzystnych stanów natury. Przy wielokryterialnej interpretacji scenariuszy jako odrębnych ocen f_i podejścia te odpowiadają odpowiednio maksymalizacji najlepszej i najgorszej oceny:

$$\max\{\max_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

$$\max\{\min_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

Podejście pesymistyczne odpowiada interpretacji problemu jako antagonistycznej gry przeciw naturze i zakłada, że celem natury jako przeciwnika jest minimalizacja naszych zysków. Prowadzi to często do nadmiernie pasywnych rozwiązań. Zauważmy, że dopuszczając dodatkową możliwość decyzji: "nie budować motelu" (wiersz złożony z samych zer) wybieralibyśmy właśnie ten wariant jako rozwiązanie. Tym niemniej, w odróżnieniu od podejścia optymistycznego, jest to dość powszechnie stosowany model preferencji przy wyborze z ograniczonej grupy wariantów.

Kryterium Hurwicza stanowi próbę kompromisu pomiędzy skrajnym optymizmem a skrajnym pesymizmem. W tym celu maksymalizuje się kombinację najlepszego i najgorszego możliwego wyniku:

$$H = \alpha O + (1-\alpha)P, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

gdzie O oznacza wartość optymistyczną (najlepszą realizację przy danym wyborze), a P wartość pesymistyczną (najgorszą przy danym wyborze). Parametr α (subiektywny współczynnik optymizmu) określa charakter kryterium. Przy $\alpha = 0$ jest to standardowe kryterium pesymistyczne, przy $\alpha = 1$ jest to standardowe kryterium optymistyczne, dla pośrednich wartości stanowi odpowiedni kompromis pomiędzy tymi dwoma kryteriami. Przy wielokryterialnej interpretacji scenariuszy jako odrębnych ocen f_i podejście to odpowiada:

$$\max\{\alpha \max_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) + (1-\alpha) \min_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

Minimalizacja maksymalnego żalu (kryterium Savage'a). Decyzję o wyborze rozwiązania podejmujemy nie wiedząc jaki scenariusz będzie faktycznie realizowany. Post factum jeden ze scenariuszy staje się rzeczywistością i wtedy można ocenić trafność decyzji. Naturalną oceną jest tu różnica pomiędzy zyskami z rozwiązania najlepszego dla danego (faktycznie realizowanego) scenariusza a faktycznie osiągniętymi zyskami (z wcześniej wybranego rozwiązania). Tę wielkość określa się jako *żal* (ang. *regret*) za utraconymi dochodami. Nie znając wcześniej właściwego scenariusza możemy dążyć do minimalizacji żalu niezależnie od scenariusza, czyli minimalizacji maksimum po scenariuszach. Takie pesymistyczne podejście zastosowane do wartości żalu zamiast bezpośrednio do wypłat gwarantuje nam możliwie najlepszą ocenę dokonanego wyboru post factum niezależnie od stanu natury. Jest to formalny model preferencji wyjątkowo dobrze oddający psychologiczne aspekty oceny decyzji.

Kryterium minimalizacji maksymalnego żalu zapisuje się następująco:

$$\min\{\max_{i=1,\dots,m} (y_i^* - f_i(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \quad \text{gdzie } y_i^* = \max\{f_i(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

3 Modele odporne

3.1 Koncepcje rozwiązań

Rozpatrzmy problem decyzyjny w warunkach niepewności. Najprostsza reprezentacja niepewności polega na skończonym zbiorze scenariuszy I ($|I| = m$). Końcowy wynik jest niepewny i znane są jedynie jego realzacje przy poszzcególnych scenariuszach. scenarios $i \in I$ are known. Problem decyzji w warunkach niepewności można zatem zapisać w postaci [Haimes (1993), Ogryczak (2002)]

$$\max \{ \ (y_1, y_2, \ldots, y_m) \ : \ \mathbf{y} \in A \ \}. \tag{1}$$

Model (1) określa jedynie, ę preferowane są większe wartości przy każdym scenariuszu $i \in I$.

Konserwatywna koncepcja rozwiązań odpornych jest skupiona na maksymalizacji najgorszego wyniku (scenariusza)

$$M(\mathbf{y}) = \min_{i \in I} y_i$$

i jest całkowicie niezależna od ważności poszczególnych scenariuszy lub ich możliwych prawdopodobieństw.

W obszarze decyzji w warunkach ryzyka zakłada się znajomość prawdopodobieństw scenariuszy p_i $(i \in I)$ [Ruszczyński i Shapiro(2003)], co stanowi podstawę optymalizacji stochastycznej, gdzie maksymalizuje się wartość oczekiwaną (wynik średni)

$$\mu(\mathbf{y}) = \sum_{i \in I} y_i p_i \tag{2}$$

lub odpowiednie funkcje ryzyka. W szczególności, kwantyle drugiegorzędu są ostatnio używane jako takie kryteria. Wprowadzone przez wielu autorów [Embrechts et al. (1997), Artzner et al. (1999), Ogryczak (1999), Rockafellar i Uryasev (2000)], generalnie reprezentują dolneśrednie kwantylowe.

Dla dowolnych prawdopodobieństw p_i i poziomu tolerancji β odpowiednia (dolna) β-średnia jest matematycznie formalizowana następująco [Ogryczak (2002), Ogryczak and Ruszczyński (2002)]. Najpierw, wprowadzamy dystrybuantę (cdf):

$$F_{\mathbf{y}}(\eta) = \sum_{i \in I} p_i \kappa_i(\eta) \quad \text{where} \quad \kappa_i(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } y_i \leq \eta \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{3}$$

Następnie, wprowadzamy fukcję kwantylową $F_{\mathbf{y}}^{(-1)}$ jako odwrotność dystrybuanty $F_{\mathbf{y}}$:

$$F_{\mathbf{y}}^{(-1)}(\beta) = \inf \ \{\eta : F_{\mathbf{y}}(\eta) \geq \beta\} \quad \text{dla } 0 < \beta \leq 1.$$

całkując $F_{\mathbf{y}}^{(-1)}$ otrzymujemy (dolne) średnie kwantylowe

$$\mu_\beta(\mathbf{y}) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F_{\mathbf{y}}^{(-1)}(\alpha) d\alpha \quad \text{dla } 0 < \beta \leq 1, \tag{4}$$

punktowe wartości krzywej Lorenza [Ogryczak (2000)]. Faktycznie średnie kwantylowe są ściśle związane dualną teorią wyboru w warunkach ryzyka [Quiggin (1982), Roell (1987), Yaari (1987)]. W literaturze decyzji w warunkach ryzyka dolne średnie kwantylowe są zwykle nazywane warunkowymi wartościami zagrożonymi (Conditional VaR, gdzie VaR oznacza Value-at-Risk $F_{\mathbf{y}}^{(-1)}(\beta)$) [Pflug (2000)]. Jednakże, ponieważ koncentrujemy się na niepewności bez formalnie zdefiniowanej przestrzeni probabilistycznej stosujemy dalej termin (dolna) średnia kwantylowa lub β-średnia. Poza obszarem decyzji w warunkach ryzyka średnie kwantylowe były stosowane w zagadnieniach lokalizacyjnych [Ogryczak i Zawadzki (2002)], do sprawiedliwej alokacji zasobów sieciowych [Ogryczak i Śliwiński (2002), Ogryczak et al. (2008)], jak również do planowania modulacji w terapii radiacyjnej [Romeijn et al. (2005)] i uczenia maszynowego [Takeda i Kanamori (2009)].

Maksymalizacja β-średniej

$$\max_{\mathbf{y}\in A} \mu_\beta(\mathbf{y}) \tag{5}$$

definiuje koncepcję rozwiązania odpornego β-średniej. Dzięki skończonej liczbie scenariuszy β-średnia jest dobrze określana przez optymalizację

$$\mu_\beta(\mathbf{y}) = \min_{u_i}\{\frac{1}{\beta}\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = \beta,\ 0 \le u_i \le p_i\ \forall\ i \in I\}. \tag{6}$$

Problem (6) jest zadaniem programowania liniowego (PL) dla danego wektora $\mathbf{y}$ ale staje się nieliniowy dla $\mathbf{y}$ będącego wektorem zmiennych jak w (5). Ta trudność jest pokonywana przez alternatywne dualne sformułowanie PL.

Twierdzenie 1 *Dla dowolnego wektora* $\mathbf{y}$ *i odpowiednich prawdopodobieństw* p_i*, oraz dowolnej rzeczywistej wartości* $0 < \beta \le 1$, β*-średnia jest określona przez PL:*

$$\mu_\beta(\mathbf{y}) = \max_{t,d_i}\ \{t - \frac{1}{\beta}\sum_{i\in I} p_i d_i : y_i \ge t - d_i,\ d_i \ge 0\ \forall\ i \in I\}. \tag{7}$$

Dowód. Twierdzenie może być udowodnione przez teorię dualności zastosowaną do (6). Wprowadzając zmienną dualną t odpowiadającą równaniu $\sum_{i\in I} u_i = \beta$ i zmienne d_i odpowiadające górnym limitom na u_i otrzymuje się dualne zadanie PL (7). □

Niepewność może być reprezentowana przez przedziały możliwych wartości prawdopodobieństw zmieniających się niezależnie [Dupacova (1987), Jaffray (1989), Yager i Kreinovich (1999), Guo i Tanaka (2010)], definiując odpowiednie rozwiązania odporne. Rozważamy niepewność kostkową:

$$\mathbf{u} \in U = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ \Delta_i^l \le u_i \le \Delta_i^u\ \forall\ i \in I\} \tag{8}$$

gdzie oczywiście $\sum_{i\in I} \Delta_i^l \le 1 \le \sum_{i\in I} \Delta_i^u$. Taki model obejmuje również przypadek, gdy prawdopodobieństw znanych $\bar{p}_i$ ale nieprecyzyjnie, które mogą podlegać zaburzeniom w przedziałach $[-\delta_i^-, \delta_i^+]$. To jest faktycznie szczególny przypadek zbioru U z $\Delta_i^l = \bar{p}_i - \delta_i^-$ i $\Delta_i^u = \bar{p}_i + \delta_i^+$ dla $i \in I$. Jednakże, wyróżniamy oddzielnie przypadek danych prawdopodobieństw $\bar{\mathbf{p}}$ z możliwymi zaburzeniami ograniczonymi proporcjonalnie $\Delta_i^l = (1 - \delta^-)\bar{p}_i$ i $\Delta_i^u = (1 + \delta^+)\bar{p}_i$ dla $i \in I$ przy danych $\delta^+ \ge 0$ i $0 \le \delta^- \le 1$.

$$\mathbf{u} \in U(\bar{\mathbf{p}}) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ \bar{p}_i(1 - \delta^-) \le u_i \le \bar{p}_i(1 + \delta^+)\ \forall\ i \in I\}.$$

Koncentrując się na średnim wyniku jako podstawowym kryterium otrzymujemy koncepcję rozwiązania odpornego

$$\max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{u}}\{\sum_{i\in I} u_i y_i : \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{y} \in A\}. \tag{9}$$

Dalej, biorąc pod uwagę niezmienione ograniczenia zbioru A, rozwiązanie odporne może być zapisane jako

$$\max_{\mathbf{y}\in A} \min_{\mathbf{u}\in U} \sum_{i\in I} u_i y_i = \max_{\mathbf{y}\in A}\{\min_{\mathbf{u}\in U} \sum_{i\in I} u_i y_i\} = \max_{\mathbf{y}\in A} \mu^U(\mathbf{y}) \tag{10}$$

gdzie

$$\mu^U(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{u}\in U} \sum_{i\in I} u_i y_i = \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ \Delta_i^l \le u_i \le \Delta_i^u\ \forall\ i \in I\} \tag{11}$$

lub odpowiednio

$$\mu^U(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{u}\in U(\bar{\mathbf{p}})} \sum_{i\in I} u_i y_i = \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ \bar{p}_i - \delta_i^- \le u_i \le \bar{p}_i + \delta_i^+\ \forall\ i\} \tag{12}$$

representują odporne rozwiązania $\mathbf{y} \in A$ ze względu na prawdopodobieństwa ze zbioru U.

3.2 Rozwiązania odporne i dolne średnie kwantylowe

Rozpatrzmy rozwiązanie odporne (10) w przypadku nieograniczonych zaburzeń prawdopodobieństw ($\Delta_i^l = 0$ and $\Delta_i^u = 1$). Rozwiązanie odporne (11) okrywa się wtedy z najgorszym

$$\mu^U(\mathbf{y}) = \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ 0 \le u_i \le 1\ \forall\ i \in I\} = \min_{i\in I} y_i$$

prowadząc do konserwatywnej koncepcji maksyniwych rozwiązań odpornych.

W przypadku niepewności kostkowej z pominiętymi dolnymi limitami ($\Delta_i^l = 0\ \forall\ i \in I$) rozwiązanie odporne (10) może być reprezentowane jako odpowiednia β-średnia z prawdopodobieństwami $p_i = \Delta_i^u / \sum_{i\in I} \Delta_i^u$ i poziomem tolerancji $\beta = 1/\sum_{i\in I} \Delta_i^u$.

Twierdzenie 2 *Rozwiązanie odporne (11) z pominiętymi dolnymi limitami może być representowane jako β-średnia z prawdopodobieństwami $p_i = \Delta_i^u / \sum_{i\in I} \Delta_i^u$ oraz $\beta = 1/\sum_{i\in I} \Delta_i^u$, i może być wyznaczana przez optymalizację z pomocniczymi zmiennymi i ograniczeniami liniowymi:*

$$\max_{\mathbf{y},\mathbf{d},t} \{t - \sum_{i\in I} \Delta_i^u d_i : \quad \mathbf{y} \in A; \quad y_i \ge t - d_i,\ d_i \ge 0\ \forall\ i \in I\}. \tag{13}$$

Dowód. Proste przeskalowanie zmiennych $s^u = \sum_{i\in I} \Delta_i^u$ prowadzi do

$$\begin{aligned} \mu^U(\mathbf{y}) &= \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ 0 \le u_i \le \Delta_i^u\ \forall\ i \in I\} \\ &= s^u \min_{u_i'}\{\sum_{i\in I} y_i u_i' : \sum_{i\in I} u_i' = \frac{1}{s^u}, 0 \le u_i' \le \frac{\Delta_i^u}{s^u}\ \forall\ i \in I\}. \end{aligned}$$

Zatem, rozwi'azanie odpornemoże być reprezentowane jako $(1/s^u)$-średnia z prawdopodobieństwami $p_i = \Delta_i^u / s^u$. Na podstawie Twierdzenia 1, może być wyznaczana przez rozwiązanie zadania (13). □

Zauważmy, że z $\Delta_i^u = 1$ for $i \in I$ reprezentujemy rozwiązanie odporne (11) jako β-średnią z $p_i = 1/m$ i $\beta = 1/m$ wyrażając rozwiąnie maksyminowe.

Wniosek 1 *β-średnia representuje rozwiązanie odporne (12) dla proporcjonalnych górnych limitów zaburzeń $\Delta_i^u = (1 + \delta^+)\bar{p}_i$ z $\delta^+ = (1 - \beta)/\beta$ i braku dolnych limitów $\Delta_i^l = 0$ dla $i \in I$, i może być wyznaczone przez proste rozszerzenie problemu maksymalizacji średniej o dpowiednie liniowe zmienne i ograniczenia:*

$$\max_{\mathbf{y},\mathbf{d},t} \{t - (1 + \delta^+) \sum_{i\in I} \bar{p}_i d_i : \quad \mathbf{y} \in A; \quad y_i \ge t - d_i,\ d_i \ge 0\ \forall\ i\}. \tag{14}$$

Dowód. Dla proporcjonalnych górnych limitów zaburzeń $\Delta_i^u = (1+\delta^+)\bar{p}_i$ z $\delta^+ = (1-\beta)/\beta$ i braku dolnych limitów $\Delta_i^l = 0$ dla $i \in I$, odpowiednie rozwiązanie odporne (12) może być wyrażone jako:

$$\begin{aligned}\mu^U(\mathbf{y}) &= \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ 0 \le u_i \le \bar{p}_i(1+\delta^+)\ \forall\ i\}\\ &= (1+\delta^+)\min_{u'_i}\{\sum_{i\in I} y_i u'_i : \sum_{i\in I} u'_i = \frac{1}{1+\delta^+},\ 0 \le u'_i \le \bar{p}_i\ \forall\ i\} = (1+\delta^+)\mu_{\frac{1}{1+\delta^+}}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Dzięki $\delta^+ = (1-\beta)/\beta$, otrzymuje się $(1+\delta^+) = 1/\beta$ and $\mu^U(\mathbf{y}) = \mu_\beta(\mathbf{y})/\beta$, gdzie za Twierdzeniem 1 $\mu_\beta(\mathbf{y})$ może byż wyrażana przez PL (14). □

W ogólnym przypadku możliwych dolnych limitów rozwiązanie odporne nie może być wyrażone jako odpowiednia średnia. Okazuje się jednak, że może być wyrażone przez optymalizację odpowiedniej kombinacji wypukłej średniej i β-średniej.

Twierdzenie 3 *Rozwiązanie odporne (10) jest równoważne wypukłej kombinacji średnich:*

$$\max_{\mathbf{y}\in A}\mu^U(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\in A}\ [\lambda\mu(\mathbf{y}) + (1-\lambda)\mu_\beta(\mathbf{y})] \tag{15}$$

z

$$\lambda = \sum_{i\in I}\Delta_i^l \quad \textit{and} \quad \beta = (1 - \sum_{i\in I}\Delta_i^l)/\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l),$$

gdzie średnia $\mu_\beta(\mathbf{y})$ jest definiowana zgodnie z prawdopodobieństwami p'_i podczas gdy średnia $\mu(\mathbf{y})$ jest definiowana zgodnie z prawdopodobieństwami p''_i:

$$p'_i = (\Delta_i^u - \Delta_i^l)/\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l) \quad \textit{and} \quad p''_i = \Delta_i^l/\sum_{i\in I}\Delta_i^l \quad \textit{for } i \in I.$$

Dowód. Wprowadzając współczynniki skalujące $s^u = \sum_{i\in I}\Delta_i^u$ i $s^l = \sum_{i\in I}\Delta_i^l$ otrzymuje się $\lambda = s^l$ and $\beta = (1-s^l)/(s^u - s^l)$. Rozwiązanie odporne (11) może być wtedy wyrażone jako

$$\begin{aligned}\mu^U(\mathbf{y}) &= \min_{u_i}\{\sum_{i\in I} y_i u_i : \sum_{i\in I} u_i = 1,\ \Delta_i^l \le u_i \le \Delta_i^u\ \forall\ i\in I\}\\ &= \min_{u'_i}\{\sum_{i\in I} y_i u'_i : \sum_{i\in I} u'_i = 1 - s^l, 0 \le u'_i \le \Delta_i^u - \Delta_i^l\ \forall\ i \in I\} + \sum_{i\in I} y_i\Delta_i^l\\ &= (s^u - s^l)\min_{u''_i}\{\sum_{i\in I} y_i u''_i : \sum_{i\in I} u''_i = \frac{1-s^l}{s^u-s^l},\ 0 \le u''_i \le \frac{\Delta_i^u - \Delta_i^l}{s^u - s^l}\ \forall\ i\in I\} + s^l\sum_{i\in I} y_i\frac{\Delta_i^l}{s^l}\\ &= (1-s^l)\min_{u''_i}\{\frac{1}{\beta}\sum_{i\in I} y_i u''_i : \sum_{i\in I} u''_i = \beta,\ 0 \le u''_i \le p'_i\ \forall\ i \in I\} + s^l\sum_{i\in I} y_i p''_i\\ &= (1-s^l)\mu_\beta(\mathbf{y}) + s^l\mu(\mathbf{y}) = (1-\lambda)\mu_\beta(\mathbf{y}) + \lambda\mu(\mathbf{y})\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 2 *W szczególnym przypadku ustalonych prawdopodobieństw $\bar{\mathbf{p}}$ z możliwymi zaburzeniami ograniczonymi proporcjonalnie $\Delta_i^l = (1-\delta^-)\bar{p}_i$ i $\Delta_i^u = (1+\delta^+)\bar{p}_i$ dla $i \in I$, rozwiązanie odporne (10) jest równoważne wypukłej kombinacji średnich*

$$\max_{\mathbf{y}\in A}\mu^U(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\in A}\ [\delta^-\mu_\beta(\mathbf{y}) + (1-\delta^-)\mu(\mathbf{y})] \tag{16}$$

z $\beta = \delta^-/(\delta^+ + \delta^-)$, gdzie obie średnie $\mu(\mathbf{y})$ i $\mu_\beta(\mathbf{y})$ są obliczane dla oryginalnych prawdopodobieństw $\bar{p}_i$.

Dowód. Z Twierdzenia 3, dla proporcjonalnie ograniczonych zaburzeń $\Delta_i^l = (1-\delta^-)\bar{p}_i$ i $\Delta_i^u = (1+\delta^+)\bar{p}_i$ równanie (15) jest spełnione z

$$\beta = \frac{1-\sum_{i\in I}\Delta_i^l}{\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l)} = \frac{\delta^-}{\delta^+ + \delta^-} \quad \text{i} \quad \lambda = \sum_{i\in I}\Delta_i^l = 1-\delta^-.$$

Dalej, β-średnia jest obliczana z prawdopodobieństwami

$$p_i' = \frac{\Delta_i^u - \Delta_i^l}{\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l)} = \frac{(\delta^+ + \delta^-)\bar{p}_i}{\delta^+\sum_{i\in I}\bar{p}_i + \delta^-\sum_{i\in I}\bar{p}_i} = \bar{p}_i$$

jak również, sama średnia jest obliczana z prawdopodobieństwami

$$p_i'' = \frac{\Delta_i^l}{\sum_{i\in I}\Delta_i^l} = \frac{(1-\delta_i^l)\bar{p}_i}{(1-\delta_i^l)\sum_{i\in I}\bar{p}_i} = \bar{p}_i$$

co kończy dowód. □

Zgodnie z Twierdzeniami 1 i 3, rozwiązanie odporne (10) może być wyrażone przez proste rozszerzenie problemu maksymalizacji średniej.

Wniosek 3 *Rozwiązanie odporne (10) może być wyznaczone przez proste rozszerzenie problemu maksymalizacji średniej o dpowiednie liniowe zmienne i ograniczenia:*

$$\max_{\mathbf{y},\mathbf{d},t}\ \{\sum_{i\in I}\Delta_i^l y_i + (1-\sum_{i\in I}\Delta_i^l)t - \sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l)d_i :\ \mathbf{y}\in A;\quad y_i \ge t - d_i,\ d_i \ge 0\ \forall\ i\}. \tag{17}$$

Dowód. Zgodnie ze wsorem (15) z Twierdzenia 3

$$\max_{\mathbf{y}\in A}\mu^U(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\in A}\ [\sum_{i\in I}\Delta_i^l y_i + (1-\sum_{i\in I}\Delta_i^l)\mu_\beta(\mathbf{y})]$$

gdzie średnia $\mu_\beta(\mathbf{y})$ jest zdefiniowana z $\beta = (1-\sum_{i\in I}\Delta_i^l)/\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l)$ i prawdopodobieństwami $p_i = (\Delta_i^u - \Delta_i^l)/\sum_{i\in I}(\Delta_i^u - \Delta_i^l)$. Stąd, stosując Twierdzenie 1 do wyrażenia $\mu_\beta(\mathbf{y})$ w postaci PL (7) otrzymuje się wzór (17). □

W szczególnym przypadku ustalonych prawdopodobieństw $\bar{\mathbf{p}}$ z możliwymi zaburzeniami ograniczonymi proporcjonalnie wzór (17) upraszcza się odpowiednio prowadząc do następującego wyrażenia rozwiązania odpornego (12).

Wniosek 4 *W szczególnym przypadku ustalonych prawdopodobieństw $\bar{\mathbf{p}}$ z możliwymi zaburzeniami ograniczonymi proporcjonalnie $\Delta_i^l = (1-\delta^-)\bar{p}_i$ i $\Delta_i^u = (1+\delta^+)\bar{p}_i$ dla $i\in I$, rozwiązanie odporne (10) może być wyznaczone przez proste rozszerzenie problemu maksymalizacji średniej o dpowiednie liniowe zmienne i ograniczenia:*

$$\max_{\mathbf{y},\mathbf{d},t}\ \{(1-\delta^-)\sum_{i\in I}\bar{p}_i y_i + \delta^- t - (\delta^+ + \delta^-)\sum_{i\in I}\bar{p}_i d_i :\ \mathbf{y}\in A;\quad y_i \ge t - d_i,\ d_i \ge 0\ \forall\ i\}. \tag{18}$$

Zamiennie do wzoru (16) z Wniosku 2, można zbudować bezpośrednio model PL korzystając z faktu, że struktura problemu (11) do problemu β-średniej (6).

Twierdzenie 4 *Dla dowolnych przedziałów prawdopodobieństw $[\Delta_i^l, \Delta_i^u]$ $(i\in I)$, odpowiednie rozwiązanie odporne (10) może być określone optymalizacją:*

$$\max_{\mathbf{y},t,d_i^u,d_i^l}\ \{t - \sum_{i\in I}\Delta_i^u d_i^u + \sum_{i\in I}\Delta_i^l d_i^l :\ \mathbf{y}\in A;\quad y_i = t - d_i^u + d_i^l,\ d_i^u, d_i^l \ge 0\quad \forall\ i\in I\}. \tag{19}$$

Dowód. Twierdzenie wynika z zastosowania dualności PL do (11). Wprowadzając zmienną dualną t odpowiadającą równaniu $\sum_{i\in I} u_i = 1$ i zmienne d_i^u and d_i^l odpowiadające górnym i dolnym limitom na u_i, otrzymujemy:

$$\mu^U(\mathbf{y}) = \max_{t,d_i^u,d_i^l} \{t - \sum_{i\in I} \Delta_i^u d_i^u + \sum_{i\in I} \Delta_i^l d_i^l : \; y_i = t - d_i^u + d_i^l, \; d_i^u, d_i^l \geq 0 \quad \forall\, i \in I\} \tag{20}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 5 *W szczególnym przypadku ustalonych prawdopodobieństw* $\bar{\mathbf{p}}$ *z możliwymi zaburzeniami ograniczonymi proporcjonalnie* $\Delta_i^l = (1-\delta^-)\bar{p}_i$ *i* $\Delta_i^u = (1+\delta^+)\bar{p}_i$ *dla* $i \in I$*, rozwiązanie odporne (10) może być wyznaczone przez proste rozszerzenie problemu maksymalizacji średniej o dpowiednie liniowe zmienne i ograniczenia:*

$$\max_{\mathbf{y},t,d_i^u,d_i^l} \{t - (1+\delta^+)\sum_{i\in I} \bar{p}_i d_i^u + (1-\delta^-)\sum_{i\in I} \bar{p}_i d_i^l : \; \mathbf{y} \in A; \quad y_i \geq t - d_i^u + d_i^l, \; d_i^u, d_i^l \geq 0 \quad \forall\, i \in I\}.$$

Bibliografia

[Artzner et al. (1999)] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999), "Coherent measures of risk," *Mathematical Finance* 9, 203–228.

[Ben-Tal et al. (2009)] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., Nemirovski, A. (2009), *Robust Optimization*, Princeton Univ. Press.

[Bertsimas i Thiele (2006)] Bertsimas, D., Thiele, A. (2006), "Robust and data-driven optimization: modern decision making under uncertainty," in *Tutorials on Operations Research, INFORMS*, Chapter 4, 95–122.

[Dupacova (1987)] Dupacova, J. (1987), "Stochastic programming with incomplete information: A survey of results on postoptimization and sensitivity analysis," *Optimization* 18, 507–532.

[Embrechts et al. (1997)] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* New York: Springer.

[Guo i Tanaka (2010)] Guo, P., Tanaka, H. (2010), "Decision making with interval probabilities," *European Journal of Operational Research* 203, 444–454.

[Gupta i Rosenhead (1968)] Gupta, S., Rosenhead, J. (1968), "Robustness in sequential investment decisions," *Management Science* 15, 18–29.

[Haimes (1993)] Haimes, Y.Y. (1993), "Risk of Extreme Events and the Fallacy of the Expected Value," *Control and Cybernetics* 22, 7–31.

[Hites et al. (2006)] Hites, R., De Smet, Y., Risse, N., Salazar-Neumann, M., Vincke, Ph. (2006), "About the applicability of MCDA to some robustness problems," *European Journal of Operational Research* 174, 322–332.

[Jaffray (1989)] Jaffray, J.-Y. (1989), "Linear utility theory for belief functions," *Operations Research Letters*, 8, 107–112.

[Kostreva et al. (2004)] Kostreva, M.M., Ogryczak, W., Wierzbicki, A. (2004), "Equitable Aggregations and Multiple Criteria Analysis," *European Journal of Operational Research* 158, 362–367.

[Kouvelis i Yu (1997)] Kouvelis, P., Yu, G. (1997), *Robust Discrete Optimization and Its Applications*, Kluwer, Dordrecht.

[Krzemienowski i Ogryczak (2005)] Krzemienowski, A., Ogryczak, W. (2005), "On extending the LP computable risk measures to account downside risk," *Computational Optimization and Applications* 32, 133–160.

[Liesiö et al. (2007)] Liesiö, J., Mild, P., Salo, A. (2007), "Preference programming for robust portfolio modeling and project selection," *European Journal of Operational Research Volume* 181, 1488–1505.

[Mansini et al. (2003)] Mansini, R., Ogryczak, W., Speranza, M.G. (2003), "On LP solvable models for portfolio selection," *Informatica* 14, 37–62.

[Mansini et al. (2007)] Mansini, R., Ogryczak, W., Speranza, M.G. (2007), "Conditional Value at Risk and Related Linear Programming Models for Portfolio Optimization," *Annals of Operations Research* 152, 227–256.

[Miettinen et al. (2008)] Miettinen, K., Deb, K., Jahn, J., Ogryczak, W., Shimoyama, K., Vetchera, R. (2008), Future Challenges (Chapter 16). In: *Multi-Objective Optimization Evolutionary and Interactive Approaches*, *Lecture Notes in Computer Science*, 5252, Springer, New York, 435–461.

[1] gryczak W.: A goal programming model for the reference point method, Annals of Operations Research, **51** (1994), 33–44.

[Ogryczak (1999)] Ogryczak, W. (1999), "Stochastic dominance relation and linear risk measures," in *Financial Modelling – Proc. 23rd Meeting EURO WG Financial Modelling, Cracow, 1998*, AMJ Skulimowski (ed.), 191–212. Cracow: Progress & Business Publisher.

[Ogryczak (2000)] Ogryczak, W. (2000), "Multiple criteria linear programming model for portfolio selection," *Annals of Operations Research* 97, 143–162.

[2] Ogryczak, W.: On Goal Programming Formulations of the Reference Point Method. J. Opnl. Res. Soc. **52** (2001) 691–698.

[Ogryczak (2002)] Ogryczak, W. (2002), "Multiple Criteria Optimization and Decisions under Risk," *Control and Cybernetics* 31, 975–1003.

[3] Ogryczak W., Kozłowski B.: Reference Point Method with Importance Weighted Ordered Partial Achievements. TOP **19** (2011), 380–401.

[4] Ogryczak, W., Lahoda, S.: Aspiration/Reservation Decision Support – A Step Beyond Goal Programming. J. MCDA **1** (1992), 101–117.

[Ogryczak i Ruszczyński (2001)] Ogryczak, W., Ruszczyński, A. (2001), "On Consistency of Stochastic Dominance and Mean-Semideviation Models," *Mathematical Programming* 89, 217–232.

[Ogryczak and Ruszczyński (2002)] Ogryczak, W., Ruszczyński, A. (2002), "Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures," *International Transactions on Operational Research* 9, 661–680.

[Ogryczak i Śliwiński (2002)] Ogryczak, W., Śliwiński, T. (2002), "On Equitable Approaches to Resource Allocation Problems: The Conditional Minimax Solution," *Journal of Telecommunication and Information Technology* 3/2002, 40–48.

[Ogryczak i Śliwiński (2009)] Ogryczak, W., Śliwiński, T. (2009), "On Efficient WOWA Optimization for Decision Support under Risk," *International Journal of Approximate Reasoning* 50, 915–928.

[Ogryczak et al. (2008)] Ogryczak, W., Wierzbicki, A., Milewski, M. (2008). "A multi-criteria approach to fair and efficient bandwidth allocation," *OMEGA* 36, 451–463.

[Ogryczak i Zawadzki (2002)] Ogryczak, W., Zawadzki, M. (2002), "Conditional median: a parametric solution concept for location problems," *Annals of Operations Research* 110, 167–181.

[Perny et al. (2006)] Perny, P., Spanjaard, O., Storme, L.-X. (2006), "A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graphs," *Annals of Operations Research* 147, 317–341.

[Pflug (2000)] Pflug, G.Ch. (2000), "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk," in: S.Uryasev (ed.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer, Dordrecht.

[Quiggin (1982)] Quiggin, J. (1982), "A theory of anticipated utility." *Journal of Economic Behavior and Organization* 3, 323–343.

[Rockafellar i Uryasev (2000)] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk," *Journal of Risk* 2, 21–41.

[Rockafellar i Uryasev (2002)] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002), "Conditional Value-at-Risk for general distributions," *Journal of Banking & Finance* 26, 1443–1471.

[Roell (1987)] Roell, A. (1987), "Risk aversion in Quiggin and Yaari's rank-order model of choice under uncertainty," *Economic Journal* 97, 143–159.

[Romeijn et al. (2005)] Romeijn, H.E., Ahuja, R.K., Dempsey, J.F., Kumar, A. (2005), "A column generation approach to radiation therapy treatment planning using aperture modulation," *SIAM Journal on Optimization* 15, 838–862.

[Roy (1998)] Roy, B. (1998), "A missing link in OR-DA: Robustness analysis," *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 23, 141–160.

[Ruszczyński i Shapiro(2003)] Ruszczyński, A., Shapiro, A. (eds) (2003), *Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 10. Elsevier.

[Takeda i Kanamori (2009)] Takeda, A., Kanamori, T. (2009), "A robust approach based on conditional value-at-risk measure to statistical learning problems," *European Journal of Operational Research* 198, 287–296.

[Toczyłowski (2003)] Toczyłowski, E.: Optymalizacja procesw rynkowych przy ograniczeniach. Wydanie II zmienione i poszerzone, 2003, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT,

[Yaari (1987)] Yaari, M.E. (1987), "The dual theory of choice under risk," *Econometrica* 55, 95–115.

[Yager (1988)] Yager, R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Trans. Systems, Man Cyber. **18** (1988) 183–190.

[Yager i Kreinovich (1999)] Yager, R.R., Kreinovich, V. (1999), "Decision making under interval probabilities," *International Journal of Approximate Reasoning* 22, 195–215.