

Symulacja dynamiki płaskich łańcuchów kinematycznych

Raport nr 05-06 Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej

Paweł Wawrzyński
listopad 2005
Wersja zremasterowana w sierpniu 2009

Spis treści

1	Sformułowanie problemu i założenia	3
I	Endogeniczne przyspieszenia kątowe	4
2	Oznaczenia	4
3	Symulacja	5
4	Siły działające na obiekt poza jego dynamiką, obliczanie F_i^e	6
4.1	Grawitacja	6
4.2	Przykładane momenty	6
4.3	Opór	7
5	Iteracja	7
5.1	Krok 1. Funkcja \tilde{f}_i	8
5.2	Krok 2. Funkcja \tilde{a}_i	10
6	Przypadki szczególne	10
6.1	Złącze prowadzone	10
6.2	Złącze kończące	11
6.3	Złącze poruszające się po prostej	12
6.4	Złącze kończące i poruszające się po prostej	13
7	Zderzenia	14
7.1	Wbicie się w punkt	14
7.2	Odrywanie się od punktu	16

8	Wyznaczanie sił powodujących zadane przyspieszenie	16
8.1	Zależność momenty – przyspieszenia kątowne	18
8.2	Wymuszenie przyspieszenia kątownego	18
II	Egzogeniczne przyspieszenia kątowne	20
9	Złącze aktywne	20
10	Iteracja	22
11	Przypadki szczególne	25
11.1	Złącze prowadzone i aktywne następne	26
11.2	Złącze prowadzone i nieaktywne następne	29
11.3	Złącze nieprowadzone i nieaktywne następne	31
12	Symulacja z ograniczeniami na kąty	33
12.1	Kąt trafia na ograniczenie, zwarcie	33
12.2	Anomalie	34
III	Przykładowe obiekty	40
13	Wahadła z jednym nieruchomym złączem	40
13.1	Jedno ogniwo	40
13.2	Dwa ogniwa	41
13.3	Trzy ogniwa	42
14	Wahadła z jednym złączem na prostej	44
14.1	Jedno ogniwo	44
14.2	Dwa ogniwa	46
14.3	Trzy ogniwa	47
	Literatura	50

1 Sformułowanie problemu i założenia

W niniejszym dokumencie zostanie przedstawiony pewien algorytm symulowania płaskich łańcuchów kinematycznych. Jest on oparty na metodzie Eulera-Newtona. Przyjmuje się, że w ciągu kwantu czasu przyspieszenia w obiekcie są stałe. Istotą algorytmu jest zatem znalezienie tych przyspieszeń. Koszt obliczeniowy tej operacji jest liniowy w liczbie elementów obiektu.

Rozważamy płaski łańcuch kinematyczny w postaci prętów (ogniw) połączonych obrotowymi stopniami swobody (złączami). Ogniwa są sztywne, a cała masa obiektu jest rozlokowana w złączach. Przeanalizowane są złącza kilku typów: poruszające się bez ograniczeń, poruszające się po prostej, poruszające się z zadaniem przyspieszeniem. Ponadto kąt między ogniwami sąsiadującymi ze złączem może być stały lub zmieniać stosowanie do indukowanych w łańcuchu przyspieszeń złącz.

Napisanie niniejszego dokumentu było stymulowane potrzebą sformułowania metodologii pozwalającej symulowanie złożonych obiektów dynamicznych do testowania algorytmów uczenia się przez wzmacnianie. Powstaje pytanie dlaczego tymi obiektami mają być dwuwymiarowe łańcuchy kinematyczne. Czy nie lepiej aby były to ogólne trójwymiarowe objekty? Otóż po pierwsze, symulowanie ogólnych trójwymiarowych układów dynamicznych jest znacznie bardziej skomplikowane. Po drugie, dla mechanizmu uczenia się przez wzmacnianie nie jest istotne, czy ma on do czynienia z obiektami dwu- czy trójwymiarowym o ile ich dynamika ma podobną złożoność.

Część I

Endogeniczne przyspieszenia kątowe

W Części I będziemy rozważać problem symulacji obiektu, w którym nie istnieją ograniczenia na kąty między ogniwami. Istnienie takich ograniczeń tworzy nowe problemy, które przedyskutujemy w Części II.

2 Oznaczenia

Indeksy:

$i = 1, 2, \dots, n$ — indeksy złącz,

Stałe:

l_i — odległość między i -tym a $i + 1$ -szym złączem, długość i -tego ogniwa,

m_i — masa i -tego złącza.

Stan obiektu na początku kwantu czasu:

x_i — położenie i -tego złącza w stałym układzie odniesienia (SUO),

r_i — jednostkowy wektor wskazujący kierunek od i -tego do $i+1$ -szego złącza,

v_i — prędkość i -tego złącza w SUO,

F_i^e — siła *zewnątrzna*, działająca na złącze poza dynamiką obiektu: grawitacja, siły oporu, przykładane momenty itd.,

F_i^d — siła *naprężenia* przykładana do i -tego złącza poprzez $i - 1$ -sze ogniwo; ponieważ każda siła indukuje siłę działającą przeciwnie, więc całkowita siła działająca na i -te złącze wynosi $F_i^e + F_i^d - F_{i+1}^d$.

Funkcje oddziaływań w obiekcie:

$\tilde{a}_i(\cdot)$ — wektor przyspieszenia i -tego złącza jako funkcja siły działającej z $i - 1$ -szego złącza,

$\tilde{f}_i(\cdot)$ — wektor siły, którą i -te złącze działa na $i + 1$ -sze jako funkcja siły działającej z $i - 1$ -szego złącza. Zachodzi

$$F_{i+1}^d = \tilde{f}_i(F_i^d).$$

Cały problem polega w istocie na tym, aby wyprowadzić \tilde{a}_i oraz \tilde{f}_i jako funkcje liniowe:

$$\tilde{a}_i(F) = A_i F + b_i \quad (1)$$

$$\tilde{f}_i(F) = C_i F + d_i \quad (2)$$

Będzie się to odbywało iteracyjnie: \tilde{a}_i oraz \tilde{f}_i będzie wyznaczane na podstawie \tilde{a}_{i+1} oraz \tilde{f}_{i+1} .

Rzutowanie wektora na kierunek.

Niech r jest wektorem o jednostkowej długości. Wyznacza on pewien kierunek. Długość rzutu dowolnego wektora y na ten kierunek wynosi

$$y^T r = r^T y.$$

Wartą uwagi zależnością jest

$$(y^T r)r = r r^T y,$$

która wyznacza rzut wektora y na wektor jednostkowy r . Pozwala ona niekiedy zamienić mnożenie przez skalar na mnożenie czysto wektorowe.

3 Symulacja

Celem symulacji jest obliczenie aproksymacji położenia i prędkości złącz w dyskretnych momentach czasu $0, \delta, 2\delta, \dots$, gdzie δ to gęstość dyskretyzacji czasu. Położenia i prędkości w kolejnej chwili obliczane są w następującej pętli:

1. Dla $i = n, n-1, \dots, 1$ wyznacz \tilde{a}_i, \tilde{f}_i czyli A_i, b_i, C_i, d_i .
2. Przyjmij $F_1^d = 0$ i dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oblicz $F_{i+1}^d = \tilde{f}(F_i^d)$.
3. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ oblicz

$$\begin{aligned} x_i &:= x_i + \delta v_i + \frac{1}{2} \delta^2 \tilde{a}_i(F_i^d) \\ v_i &:= v_i + \delta \tilde{a}_i(F_i^d). \end{aligned}$$

4. Dla $i = 1, 2, \dots, n-1$, oblicz $r_i := (x_{i+1} - x_i) / \|x_{i+1} - x_i\|$.
5. Ewentualnie popraw błędy numeryczne.

Niedokładności numeryczne mogą sprawić, że przestaną być spełnione warunki, które stan obiektu musi spełniać, mianowicie

$$\|x_{i-1} - x_i\| = l_i, \quad (v_{i+1} - v_i)^T(x_{i+1} - x_i) = 0.$$

W zasadzie należałoby po każdej iteracji przywracać spełnienie powyższych równań. Jest to jednak kosztowne obliczeniowo. Dlatego rozwiązaniem, które zazwyczaj wystarcza jest modyfikacja x_i oraz v_i tak aby błędy powyższych równości nieco zmniejszyć np. w przybliżeniu 2-krotnie. Systematyczne podejście do zagadnienia błędów numerycznych zostanie zaproponowane w sekcji 12.2.

4 Siły działające na obiekt poza jego dynamiką, obliczanie F_i^e

Poza dynamiką obiektu istnieje kilka źródeł sił działających na i -te złącze. Te źródła to grawitacja, przykładane momenty, opór i być może inne, zaprojektowane przez konstruktora. F_i^e jest sumą takich sił.

4.1 Grawitacja

Siła grawitacyjna oddziałująca i -te złącze wynosi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -gm_i \end{bmatrix}$$

gdzie $g = 9.81ms^{-2}$ to ziemskie przyspieszenie grawitacyjne.

4.2 Przykładane momenty

Zdefiniujmy

$$r_i^*$$

jako taki wektor jednostkowy, że kąt między r_i^* a r_i wynosi $\pi/2$. r_i^* jest to więc wektor r_i skręcony o kąt prosty w lewo. Jednocześnie zdefiniujmy

$$L_i = r_i^*/l_i.$$

Przyłożenie momentu τ_i do i -tego złącza jest równoznaczne z przyłożeniem następujących sił (Góra Rysunku 1):

1. Do złącza $i - 1$, siła $r_i^*\tau_i/l_i = L_{i-1}\tau_i$.
2. Do złącza i , siła $-r_i^*\tau_i/l_i = -L_{i-1}\tau_i$.
3. Do złącza i , siła $-r_i^*\tau_i/l_i = -L_i\tau_i$.
4. Do złącza $i + 1$, siła $r_i^*\tau_i/l_i = L_i\tau_i$.

4.3 Opór

Zdefiniujmy *prędkość kątową i -tego ogniwa* jako

$$\omega_i^o = (r_i^*)^T(v_{i+1} - v_i)/l_i = L_i^T(v_{i+1} - v_i).$$

Prędkość kątowa i -tego złącza jest różnicą prędkości kątowych sąsiednich ogniw i wynosi

$$\omega_i^z = \omega_i^o - \omega_{i-1}^o.$$

Można rozważać siłę oporu toczonego związaną z prędkością kątową i -tego złącza. Jest ona równoznaczna przyłożeniu do tegoż złącza momentu o wielkości

$$-k_\omega \omega_i^z$$

gdzie k_ω jest pewnym dodatnim skalarzem.

Można także rozważać opór związany z bezwzględną prędkością i -tego złącza, np. opór powietrza. Siła taka wynosi

$$-k_v v_i \|v_i\|$$

gdzie k_v to dodatni skalar.

5 Iteracja

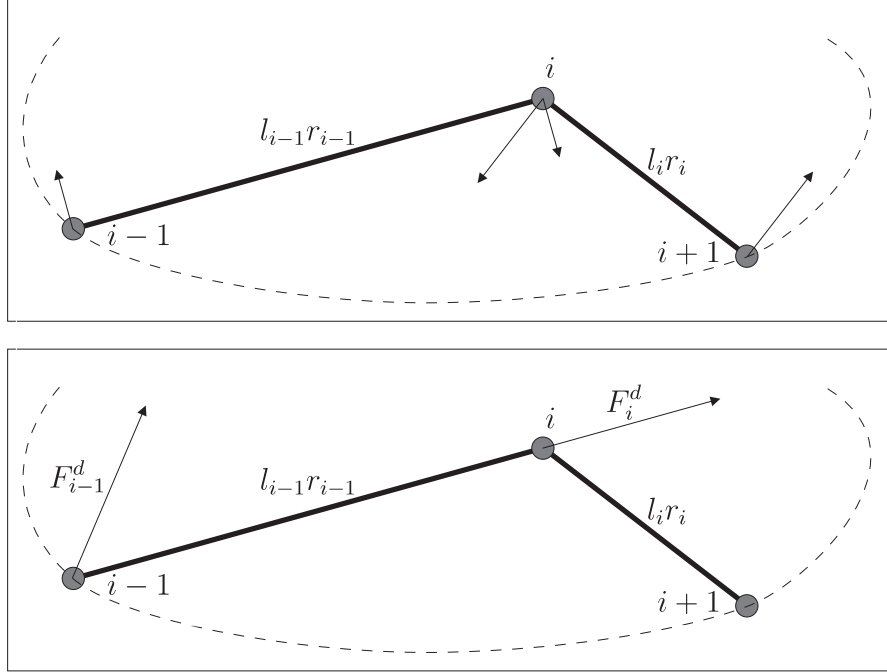
Całe poniższe wyprowadzenie opiera się na poniższych obserwacjach:

1. Moment przykładany w złączu można przetłumaczyć na “zwykłe” siły działające na dane złącze i złącza sąsiednie (Góra Rysunku 1). W związku z tym, jeśli w złączach przykładane są znane momenty, możemy stosownie do nich wyznaczyć siły F_i^d i dalej, niejako, nie zajmować się tymi momentami.
2. Siła przykładana do złącza z jednej strony układu propaguje się na drugą stronę jedynie wzdłuż ogniwa z drugiej strony złącza (Dół Rysunku 1).
3. i -te złącze działając poprzez i -te ogniwo na złącze $i + 1$ siłą F_{i+1}^d jednocześnie jest przedmiotem działania siły $-F_{i+1}^d$ (wynika to z III prawa dynamiki Newtona, Rysunek 2).

Powiedzmy zatem, że znamy funkcję

$$\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d) = A_{i+1}F_{i+1}^d + b_{i+1}$$

Zadanie polega na wyznaczeniu funkcji \tilde{a}_i (1) oraz \tilde{f}_i (2), których argumentem jest wektor F_i^d oznaczający arbitralną siłę działającą na złącze i . Najpierw zostanie wyznaczona funkcja \tilde{f}_i a potem \tilde{a}_i .



Rysunek 1: Siły działające na złącza. *Góra*: Przyłożenie momentu siły do i -tego złącza jest równoznaczne z przyłożeniem “zwykłych” sił do danego złącza i sąsiadów. Siły te, wraz siłami grawitacyjnymi składają się na siły zewnętrzne oznaczane przez F^e . *Dół*: Poza siłami z zewnątrz (grawitacją i przykładanymi momentami), złącza zachowują się jakby były zupełnie swobodne. Oznacza to, że siła przyłożona do $i - 1$ -szego złącza oddziałuje na i -te złącze jedynie składową równoległą do $i - 1$ -szego ogniwa.

5.1 Krok 1. Funkcja \tilde{f}_i .

Siła F_{i+1}^d z jaką i -te złącze działa na $i + 1$ -sze jest równoległa do r_i i wynosi

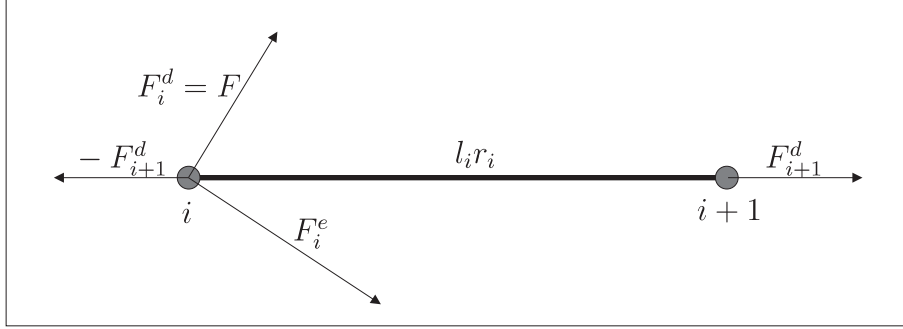
$$F_{i+1}^d = r_i \phi_i.$$

gdzie ϕ_i to pewien skalar, którego będziemy teraz poszukiwać jako funkcji argumentu F_i^d . Przyjmijmy dla uproszczenia oznaczenie

$$F_i^d = F.$$

Długość rzutu przyspieszenia i -tego złącza na kierunek r_i wynosi (Rysunek 2)

$$r_i^T \frac{F + F_i^e - F_{i+1}^d}{m_i} = r_i^T \frac{F + F_i^e - r_i \phi_i}{m_i}.$$



Rysunek 2: Siły działające na i -te złącze.

Długość rzutu przyspieszenia $i + 1$ -szego złącza na r_i wynosi zaś

$$r_i^T (A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}) = r_i^T (A_{i+1} r_i \phi_i + b_{i+1}).$$

Różnica prędkości sąsiednich złączy sprawia, że poruszają się one względem siebie z przyspieszeniem wzdłuż łączącego je ogniwa. Długość rzutu tej różnicy przyspieszeń na r_i wynosi¹

$$e_i = \|v_{i+1} - v_i\|^2 / l_i. \quad (3)$$

Poniżej zapiszemy, kluczowe dla naszych rozważań, *równanie ogniwa*. Jest ono konsekwencją faktu, że długość ogniwa pozostaje stała. W związku z tym (i) różnica $v_{i+1} - v_i$ jest prostopadła do r_i , oraz (ii) długość rzutu różnicy przyspieszeń sąsiednich złączy na r_i jest równa e_i . Mamy

$$r_i^T \frac{F + F_i^e - r_i \phi_i}{m_i} - r_i^T (A_{i+1} r_i \phi_i + b_{i+1}) = e_i. \quad (4)$$

Z równania ogniwa wynika natychmiast

$$\phi_i = \frac{r_i^T (F + F_i^e) / m_i - r_i^T b_{i+1} - e_i}{r_i^T r_i / m_i + r_i^T A_{i+1} r_i}. \quad (5)$$

¹Krótkie preliminaria fizyczne: Powiedzmy, że punkt porusza się po okręgu o promieniu l , przy czym wartość bezwzględna jego prędkości nie zmienia się i wynosi $\|v\|$. Jakie jest przyspieszenie takiego punktu? Otóż jest ono skierowane do środka okręgu a jego wielkość wynosi $\|v\|^2 / l$. Wzór (3) jest prostym rozszerzeniem tych rozważań na sytuację, w której dwa punkty poruszają się względem siebie ale odległość między nimi jest stała.

Biorąc pod uwagę, że $F_{i+1}^d = r_i \phi_i$ oraz $r_i^T r_i = 1$, powyższy wyraz definiuje funkcję \tilde{f}_i , mianowicie

$$C_i = \frac{r_i r_i^T}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} \quad (6)$$

$$d_i = \frac{r_i r_i^T F_i^e - m_i r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} = C_i F_i^e - \frac{m_i r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i}. \quad (7)$$

5.2 Krok 2. Funkcja \tilde{a}_i .

Aby wyznaczyć funkcję \tilde{a}_i , zauważamy, że przyspieszenie i -tego złącza wynosi

$$\begin{aligned} & \frac{F + F_i^e - r_i \phi_i}{m_i} \\ &= \left(\frac{I}{m_i} - \frac{r_i r_i^T / m_i}{r_i^T r_i + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} \right) F \\ &+ \left(\frac{F_i^e}{m_i} - \frac{r_i r_i^T F_i^e / m_i - r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{r_i^T r_i + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} \right). \end{aligned}$$

A zatem funkcję \tilde{a}_i definiują macierz i wektor

$$A_i = \frac{I}{m_i} - \frac{r_i r_i^T / m_i}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} \quad (8)$$

$$b_i = \frac{F_i^e}{m_i} - \frac{r_i r_i^T F_i^e / m_i - r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i} = A_i F_i^e + \frac{r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{1 + m_i r_i^T A_{i+1} r_i}. \quad (9)$$

6 Przypadki szczególne

W niniejszej sekcji rozważymy złącza, które są w jakimś sensie wyjątkowe.

6.1 Złącze prowadzone

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się złączem, którego przyspieszenie jest określone poza układem. Złącze takie będziemy nazywali *prowadzonym*. Najprostszy przykład to złącze nieruchome, np. tkwiące sztywno w jakimś obiekcie. Wyniki, które tu wyprowadzimy posłużą także do modelowania takich zjawisk jak zderzenia złącz z innymi obiektami.

Niech wymuszoną wartością przyspieszenia będzie a_i^w . Oczywiście mamy $\tilde{a}_i \equiv a_i^w$ i wobec tego

$$\begin{aligned} A_i &= 0 \\ b_i &= a_i^w. \end{aligned}$$

Jednocześnie pozostaje w mocy zależność między przyspieszeniami sąsiednich złącz, mianowicie długość rzutu ich różnicy na r_i musi być równa e_i , czyli

$$r_i^T a_i^w - r_i^T (A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}) = e_i.$$

Ponieważ F_{i+1}^d równa się, jak dotychczas, $\phi_i r_i$, to łatwo wywieść, że

$$F_{i+1}^d = r_i \frac{r_i^T a_i^w - r_i^T b_{i+1} - e_i}{r_i^T A_{i+1} r_i}$$

A wobec tego

$$C_i = 0$$

$$d_i = \frac{r_i (r_i^T a_i^w - r_i^T b_{i+1} - e_i)}{r_i^T A_{i+1} r_i}.$$

Następne złącze prowadzone lub złącze kończące

Powstaje pytanie co się dzieje jeśli prowadzone jest złącze i -te oraz $i + 1$ -sze. Ich przyspieszenia mogą wówczas pozostawać w konflikcie w tym sensie, że mogą generować zmianę długości i -tego ogniwa. Problem ten zmusza nas do określenia priorytetów: czy, w razie konfliktu, ważniejsze jest wymuszone przyspieszenie czy długość ogniwa. Będziemy zakładali, że to pierwsze. Dla i -tego złącza prowadzonego, jeśli złącze $i + 1$ -sze jest także prowadzone, będziemy przyjmowali

$$d_i = 0.$$

Oczywiście będziemy postępowali podobnie jeśli $i + 1$ -szego złącza nie ma wcale czyli złącze i -te jest kończące.

6.2 Złącze kończące

Złącze i -te rozumiemy jako kończące wówczas gdy nie istnieje i -te ogniwo. Wtedy oczywiście nie ma sensu mówić o sile działającej na $i + 1$ -sze złącze i można śmiało przyjąć

$$\tilde{f}_i \equiv 0, \quad C_i = 0, \quad d_i = 0.$$

Tymczasem przyspieszenie i -tego złącza wynosi

$$\tilde{a}_i(F) = \frac{F + F_i^e}{m_i},$$

a zatem

$$A_i = \frac{I}{m_i}, \quad b_i = \frac{F_i^e}{m_i}.$$

6.3 Złącze poruszające się po prostej

W niniejszej podsekcji analizujemy dynamikę złącza, którego ruch jest ograniczony do prostej. Takie złącze może być modelem części obiektu, która jeździ, czy ślizga się, po pewnym torze.

Niech i -te złącze porusza się po prostej prostopadłej do jednostkowego wektora s_i .² Złącze jest utrzymywane na prostej dzięki dodatkowej sile

$$F_i^s = s_i \zeta_i$$

prostopadłej do prostej; ζ_i jest skalar. Wektor przyspieszenia i -tego złącza jest wyznaczany przez wyrażenie

$$\frac{F_i^e + F - F_{i+1}^d + F_i^s}{m_i} = \frac{F_i^e + F - r_i \phi_i + s_i \zeta_i}{m_i}.$$

Poszukujemy teraz dwóch sił: F_i^s oraz F_{i+1}^d . Wynikają one z rozwiązania następującego układu równań

$$\begin{cases} r_i^T \frac{F_i^e + F - r_i \phi_i + s_i \zeta_i}{m_i} - r_i^T (A_{i+1} r_i \phi_i + b_{i+1}) = e_i \\ s_i^T \frac{F_i^e + F - r_i \phi_i + s_i \zeta_i}{m_i} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Pierwsze z powyższych to *równanie ogniwa* odpowiadające (4) a drugie mówi tylko tyle, że przyspieszenie i -tego złącza jest prostopadłe do s_i . Jeśli $\|s_i\| = 1$, z drugiego równania dostajemy

$$\frac{\zeta_i}{m_i} = s_i^T \frac{r_i \phi_i - F_i^e - F}{m_i}$$

co pozwala na eliminację ζ_i z układu i wyznaczenie ϕ_i jako

$$\phi_i = \frac{r_i^T (I - s_i s_i^T) (F_i^e + F) - m_i (r_i^T b_{i+1} + e_i)}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2}.$$

Skalar ϕ_i określa F_{i+1}^d , zatem z powyższego wynika natychmiast funkcja \tilde{f}_i :

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{r_i r_i^T (I - s_i s_i^T)}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2} \\ d_i &= \frac{r_i r_i^T (I - s_i s_i^T) F_i^e - m_i (r_i^T b_{i+1} + e_i) r_i}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2} \\ &= C_i F_i^e - \frac{m_i (r_i^T b_{i+1} + e_i) r_i}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2}. \end{aligned}$$

²W przestrzeni 2-wymiarowej można mówić o prostej prostopadłej do wektora. Gdyby liczba wymiarów była większa mówilibyśmy raczej o ruchu złącza po pewnej hiperpłaszczyźnie prostopadłej do s_i .

Z równań

$$\tilde{a}_i(F) = \frac{F_i^e + F - r_i\phi_i + s_i\zeta_i}{m_i} = A_iF + b_i$$

wynika definicja funkcji \tilde{a}_i , mianowicie

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{I - s_i s_i^T}{m_i} - \frac{(I - s_i s_i^T) r_i r_i^T (I - s_i s_i^T) / m_i}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2} \\ b_i &= \frac{(I - s_i s_i^T) F_i^e}{m_i} - \frac{(I - s_i s_i^T) r_i r_i^T (I - s_i s_i^T) F_i^e / m_i - (r_i^T b_{i+1} + e_i) (I - s_i s_i^T) r_i}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2} \\ &= A_i F_i^e + \frac{(r_i^T b_{i+1} + e_i) (I - s_i s_i^T) r_i}{m_i r_i^T A_{i+1} r_i + 1 - (s_i^T r_i)^2}. \end{aligned}$$

6.4 Złącze kończące i poruszające się po prostej

W niniejszej podsekcji modelujemy dynamikę złącza poruszającego się po prostej, za którym nie ma już żadnego innego złącza.

Niech i -te złącze porusza się po prostej prostopadłej do jednostkowego wektora s_i . Jak w poprzedniej sekcji, złącze jest utrzymywane na prostej dzięki dodatkowej sile

$$F_i^s = s_i \zeta_i$$

prostopadłej do prostej; ζ_i jest skalar. Wektor przyspieszenia i -tego złącza jest wyznaczany przez wyrażenie

$$\frac{F_i^e + F + F_i^s}{m_i} = \frac{F_i^e + F + s_i \zeta_i}{m_i}$$

przy czym jest to wektor prostopadły do s_i , czyli

$$s_i^T \frac{F_i^e + F + s_i \zeta_i}{m_i} = 0.$$

Z powyższego wynika, że

$$\frac{\zeta_i}{m_i} = -s_i^T \frac{F_i^e + F}{m_i}$$

skąd dostajemy

$$a_i = \frac{F_i^e + F + s_i \zeta_i}{m_i} = \frac{(I - s_i s_i^T) F + (I - s_i s_i^T) F_i^e}{m_i}.$$

A zatem

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{I - s_i s_i^T}{m_i} \\ b_i &= \frac{(I - s_i s_i^T) F_i^e}{m_i} = A_i F_i^e. \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\tilde{f}_i \equiv 0, \quad C_i = 0, \quad d_i = 0.$$

7 Zderzenia

W rozdziale omówimy co się dzieje kiedy złącze zderza się z jakimś nieruchomym przedmiotem lub odrywa się od niego po zderzeniu, które miało miejsce wcześniej. Będziemy zakładali, że zderzenia nie są sprężyste, a zatem złącze, niejako, *wbija się* w punkt, w którym styka się z przedmiotem.

7.1 Wbicie się w punkt

Rozważamy teraz sytuację, w której i -te złącze *wbija się* w pewien punkt. Będzie to oznaczało, że złącze porusza się do punktu z pewną niezerową prędkością by chwilę później znajdowało się w tym punkcie i jego prędkość była zerowa. To co się dzieje w międzyczasie będziemy rozumieli w ten sposób, że w ciągu bardzo krótkiego kwantu czasu na to złącze działa siła, która wyhamowuje jego ruch. Powiedzmy, że długość kwantu czasu to ϵ a hamujące przyspieszenie złącza jest stałe. Jeśli pierwotna prędkość wynosi v_i , to wektor przyspieszenia jest równy

$$a_i^w = -v_i/\epsilon.$$

W dalszej analizie zastanawiamy się co się dzieje kiedy ϵ dąży do zera. Pojęcie o tym daje zmiana skali czasu. Powiedzmy, że jednostką czasu jest teraz ϵ sekundy. Wartość prędkości k -tego złącza wyrażana dotychczas w $[m/s]$ wynosi teraz $v'_k = \epsilon v_k$. Przyspieszenia dośrodkowe, mierzone dotychczas w $[m/s^2]$ wynosi $e'_k = \epsilon^2 e_k$, zaś siła działająca poza dynamiką obiektu, mierzona dotychczas w $[kg \cdot m/s^2]$ wynosi teraz $F_k^{e'} = \epsilon^2 F_k^e$.

W zmienionej skali czasu jedyną wielkością nie zminimalizowaną przez ϵ jest wymuszone zderzeniem przyspieszenie i -tego złącza, którego wartość wynosi teraz $-v_i$. Dla dostatecznie małej wielkości ϵ wartości e'_k oraz $F_k^{e'}$ w formułach na A_k, b_k, C_k, d_k będą nie do odróżnienia od błędu numerycznego (inne wartości w formułach będą relatywnie tak duże). A zatem, im krótszy jest czas wbijania się złącza w punkt, tym bardziej pomijalne są siły działające na złącza poza dynamiką układu oraz prędkości złącz. Można więc zastosować następującą metodę przeliczania konsekwencji wbicia się i -tego złącza:

- Z1. Przyjmij $a_i^w = -v_i$ oraz $F_k^e = 0, e_k = 0$ dla $k = 1, \dots, n$ (przejście na skalę czasu o jednostce ϵ dążącym do zera).

Z2. Oblicz A_k, b_k, C_k, d_k a następnie przyspieszenia a_k dla $k = 1, \dots, n$ zgodnie z dotychczas wyprowadzonymi wzorami.

Z3. (Powrót do pierwotnej skali czasu) Oblicz $v_k := v_k + a_k$ dla $k = 1, \dots, n$.

Wbicie się złącza w punkt następuje w pewnym momencie między dyskretnymi chwilami czasu symulacji. Na ogół łatwo jest wykryć *post factum*, że do wbicia się doszło. W tej sytuacji należy wykonać następujące czynności:

- cofnąć się w czasie o do chwili wbicia się, powiedzmy, że stało się to wcześniej o ϵ ,
- wyznaczyć prędkości po zderzeniu, np. wg. kroków Z1, Z2, Z3,
- unieruchomić złącze, które się wbiło, czyli przyjąć $a_i^w = 0$,
- przesymulować wydarzenia, które następują potem w ciągu czasu o długości ϵ .

Kiedy doszło do wbicia się? Powiedzmy, że tym w co może wbić się złącze jest prosta zaczepiona w punkcie z^0 prostopadła do wektora z .³ Powiedzmy, że z wskazuje tą “dobrą” stronę prostej, po której złącze może się bez przeszkód poruszać. Do wbicia się dochodzi kiedy przeliczamy współrzędne zgodnie z krokami przedstawionymi w sekcji 3 i okazuje się, że

$$z^T(x_i - z^0) < 0.$$

Chcemy obliczyć dodatnią wielkość ϵ , która mówi jak dawno temu doszło do wbicia się. Spełnia ona zależność

$$z^T(x_i - z^0 - \epsilon v_i - 0.5\epsilon^2 a_i) = 0,$$

w której a_i jest przyspieszeniem złącza obliczonym przed wbiciem się, zaś v_i oraz x_i to, odpowiednio, prędkość i położenie złącza po kwancie czasu (czyli już po wbiciu się). Powyższe równanie ma dwa rozwiązania:

$$\epsilon' = \frac{-z^T v_i - \sqrt{\Delta}}{z^T a_i}, \quad \epsilon'' = \frac{-z^T v_i + \sqrt{\Delta}}{z^T a_i},$$

gdzie

$$\Delta = (z^T v_i)^2 - 2z^T a_i z^T (z^0 - x_i).$$

Uważna analiza ujawnia, że dobrym rozwiązaniem jest jednak tylko $\epsilon = \epsilon''$.

³Podobnie jak w przypadku poruszania się po prostej, w dwóch wymiarach mamy do czynienia z prostą prostopadłą do wektora. Gdyby zaś liczba wymiarów była większa — byłyby to hiperpłaszczyzna.

7.2 Odrywanie się od punktu

Procesem odwrotnym do wbijania się w punkt jest odrywanie się od punktu. Różne zjawiska mogą temu towarzyszyć, np. złącze mogło, w jakimś sensie, ugrzęznąć w punkcie. Zajmiemy się najprostszym wariantem polegającym na tym, że złącze jest wbite w powierzchnię i odrywa się od niej jeśli tylko suma sił działających na nie odpycha złącze od powierzchni. Jeśli powierzchnia jest wyznaczana przez wektory z^0 (zaczepienie) i z (wektor prostopadły) a suma sił wynosi F_i , to oderwanie się następuje wówczas gdy

$$z^T F_i > 0.$$

8 Wyznaczanie sił powodujących zadane przyspieszenie

W niniejszej sekcji przeanalizujemy szczegółowo zależność między siłami F_j^e a przyspieszeniami a_i dla dowolnych i, j . Znajomość tej zależności pozwala w szczególności wyznaczać takie siły aby uzyskiwać zadane przyspieszenia. Umożliwia także zadawanie momentów sił aby uzyskiwać zadane przyspieszenia kątowe, choć akurat ten problem zostanie lepiej rozwiązany w Części II dokumentu.

Punktem wyjścia do rozstrzygnięcia jak F_j^e wpływa na a_i będzie wyprowadzenie $\frac{da_i}{dF_j^e}$, przy czym wyraz ten będzie rozumiany jako macierz Jakobiego spełniająca równanie

$$\Delta a_i = \frac{da_i}{dF_j^e} \Delta F_j^e$$

w jego najbardziej oczywistym rozumieniu.

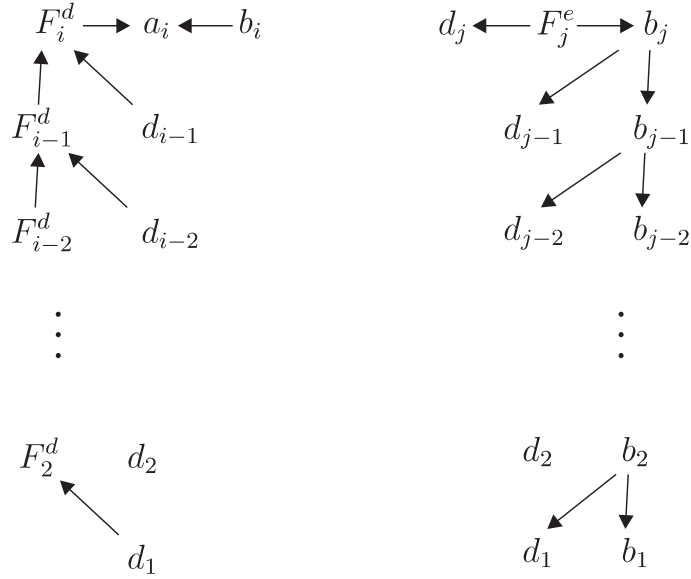
Rysunek 3 pokazuje kolejność działań prowadzących od F_j^e do a_i . Z zestawienia tego wyniku natychmiast sposób obliczania da_i/dF_j^e oparty na propagacji wstecznej:

1. Oblicz

$$\frac{da_i}{dF_i^d} = \frac{\partial a_i}{\partial F_i^d} = B_i.$$

2. Dla $k = n, n-1, \dots, i$, $\frac{da_i}{dF_k^d} = 0$ zaś dla $k = i-1, i-2, \dots, 2$ oblicz

$$\frac{da_i}{dF_k^d} = \frac{da_i}{dF_{k+1}^d} \frac{\partial F_{k+1}^d}{\partial F_k^d} = \frac{da_i}{dF_{k+1}^d} C_k.$$



Rysunek 3: Kolejność działań prowadzących od F_j^e do a_i .

3. Dla $k = n, n-1, \dots, i$, $\frac{da_i}{dd_k} = 0$, zaś dla $k = i-1, i-2, \dots, 1$ oblicz

$$\frac{da_i}{dd_k} = \frac{da_i}{dF_{k+1}^d} \frac{\partial F_{k+1}^d}{\partial d_k} = \frac{da_i}{dF_{k+1}^d}.$$

4. Dla $k = 1, 2, \dots, j$, oblicz

$$\frac{da_i}{db_k} = [k > 1] \frac{da_i}{dd_{k-1}} \frac{\partial d_{k-1}}{\partial b_k} + [k > 1] \frac{da_i}{db_{k-1}} \frac{\partial b_{k-1}}{\partial b_k} + [k = i] \frac{\partial a_k}{\partial b_k}.$$

Pewnym uproszczeniem jest fakt, że $\partial a_k / \partial b_k = I$, zaś dla wszystkich dotychczas rozważanych przypadków zachodzi $\partial b_{k-1} / \partial b_k = C_{k-1}$.

5. Oblicz

$$\frac{da_i}{dF_j^e} = \frac{da_i}{dd_j} \frac{\partial d_j}{\partial F_j^e} + \frac{da_i}{db_j} \frac{\partial b_j}{\partial F_j^e} = \frac{da_i}{dd_j} C_j + \frac{da_i}{db_j} A_j.$$

Warto zauważyć, że aby wyznaczyć komplet wartości da_i/dF_j^e dla $j = 1, \dots, n$, nie trzeba powtarzać całej procedury n -krotnie. Wystarczy, że krok 4 zostanie wykonany dla $j = n$ i jedynie krok 5 zostanie wykonany n -krotnie dla $j = 1, 2, \dots, n$.

8.1 Zależność momenty – przyspieszenia kątowe

Niekiedy interesujące jest obliczenie pochodnej przyspieszenia kąowego i -tego złącza po j -tym momencie przykładanym do i -tego złącza. Pamiętajmy, że

$$\alpha_i^z = L_i^T a_{i+1} - (L_i + L_{i-1})^T a_i + L_{i-1}^T a_{i-1}.$$

Droga wynikania jest tu następująca: Moment τ_j wpływa na F_{j-1}^e, F_j^e i F_{j+1}^e , które wpływają na a_{i-1}, a_i oraz a_{i+1} , które z kolei wpływają na α_i^z . Ze wzorów na siły wynikające z przykładanych momentów (Rozdział 4) łatwo wynika, iż

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^z}{d\tau_j} &= L_{i-1}^T \left(\frac{da_{i-1}}{dF_{i-1}^e} L_{i-1} - \frac{da_{i-1}}{dF_i^e} (L_{i-1} + L_i) + \frac{da_{i-1}}{dF_{i+1}^e} L_i \right) \\ &\quad - (L_i + L_{i-1})^T \left(\frac{da_i}{dF_{i-1}^e} L_{i-1} - \frac{da_i}{dF_i^e} (L_{i-1} + L_i) + \frac{da_i}{dF_{i+1}^e} L_i \right) \\ &\quad + L_i^T \left(\frac{da_{i+1}}{dF_{i-1}^e} L_{i-1} - \frac{da_{i+1}}{dF_i^e} (L_{i-1} + L_i) + \frac{da_{i+1}}{dF_{i+1}^e} L_i \right). \end{aligned}$$

8.2 Wymuszenie przyspieszenia kąowego

W podsekcji 6.1 zajmowaliśmy się wymuszaniem przyspieszenia i -tego złącza. Niniejsza podsekcja zawiera analogiczny materiał z tym, że teraz rozważamy zestaw momentów sił wymuszający odpowiednie przyspieszenia kąowe. Innemu rozwiązaniu tego samego problemu będzie poświęcona Część II niniejszego dokumentu.

Rozważmy złącza i_1, i_2, \dots, i_m . Chcemy, aby ich przyspieszenia kąowe wynosiły $\alpha_{i_1}^w, \alpha_{i_2}^w, \dots, \alpha_{i_m}^w$. Zajmiemy się zagadnieniem wyznaczenia momentów siły $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_m}$ tak, aby osiągnąć zadane przyspieszenia kąowe. Dzięki wyprowadzeniom z poprzedniej podsekcji wiemy w jaki sposób zmiany przykładanych momentów skutkują zmianami przyspieszeń kąowych. Z kształtu odpowiednich pochodnych wiemy, że zależności te są w każdej chwili liniowe. Pozwala to sformułować następującą procedurę wyznaczania momentów $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots$ dla znanych przyspieszeń kąowych.

1. Przy pomocy standardowej procedury (Rozdział 3) wyznacz przyspieszenia złącz a następnie przyspieszenia kąowe $\alpha_{i_1}^z, \dots, \alpha_{i_{n-1}}^z$ przy założeniu, że nie są przykładane dodatkowe momenty.

2. Przy pomocy metody z poprzedniej podsekcji wyznacz macierz

$$\frac{d\alpha^z}{d\tau} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_{i_1}^z}{d\tau_{i_1}} & \cdots & \frac{d\alpha_{i_1}^z}{d\tau_{i_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d\alpha_{i_m}^z}{d\tau_{i_1}} & \cdots & \frac{d\alpha_{i_m}^z}{d\tau_{i_m}} \end{bmatrix}$$

3. Wyznacz momenty $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_m}$ rozwiązując równanie

$$[\alpha_{i_1}^w \dots \alpha_{i_m}^w]^T = [\alpha_{i_1}^z \dots \alpha_{i_m}^z]^T + \frac{d\alpha^z}{d\tau} [\tau_{i_1} \dots \tau_{i_m}]^T.$$

4. Wyznacz przyspieszenia złącz ponownie, tym razem przykładając momenty $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_m}$.

Kluczowym zastosowaniem dla wymuszania przyspieszenia kątownego złącza jest sytuacja, w której kąt złącza zbliża się do swojego ograniczenia, np. maksymalnego wygięcia stawu. W takim razie jego prędkość kątowa jest wyzerowana (zajmiemy się w tym w kolejnej podsekcji) i taka pozostaje. Gdy kąty są utrzymywane na swoich ograniczeniach, zależy nam aby $\alpha_{i_m}^w = \dots = \alpha_{i_1}^w = 0$. W Części II zajmiemy się tymi zagadnieniami dokładniej.

Część II

Egzogeniczne przyspieszenia kątowe

W Części I jedynie wspomniane zostały zjawiska, które wymuszają określone przyspieszenia kątowe. Tymczasem zjawiska takie są bardzo typowe. Dla przykładu założmy, że ogniwa i złącza modelują, odpowiednio, kości i stawy. Stawy nie mogą obracać się w sposób nieograniczony. Kiedy kąt między ogniwami (kośćmi) dochodzi do swojej granicznej wartości, pojawia się wymuszone przyspieszenie kątowe (działają ścięgna), które wyhamowuje jego dalszy obrót. Kiedy następnie kąt ten pozostaje na granicy, pojawia się wymuszone przyspieszenie kątowe o zerowej wartości (znowu ścięgna). W Części II zajmiemy się więc symulacją uwzględniającą, że w niektórych złączach obiektu istnieją wymuszone przyspieszenia kątowe.

9 Złącze aktywne

Problem omawiany w Części II jest jedynie wzbogaconą wersją problemu dyskutowanego w Części I. Zdecydowana większość oznaczeń jest taka jak poprzednio. Znaczenie wyrazów i , n , l_i , m_i , x_i , r_i , v_i , F_i^e pozostaje. W stosunku do problemu omawianego w Części I, rozważamy tutaj jeden dodatkowy element. Mianowicie, w kwancie czasu istnieje zestaw indeksów i_1, \dots, i_m takich, że przyspieszenia kątowe złącz wskazywanych przez te indeksy jest dane i wynosi $\alpha_{i_1}^w, \dots, \alpha_{i_m}^w$. Złącze, którego przyspieszenie kątowe jest ustalone będzie nazywane *aktywnym*.

Zdefiniujmy teraz dokładnie przyspieszenia kątowe. Przypomnijmy, że wektor r_i^* został zdefiniowany jako wektor jednostkowy powstały z r_i przez skrócenie w lewo. Stosowane było także oznaczenie

$$L_i = r_i^*/l_i. \quad (11)$$

Przyspieszenie kątowe i -tego ogniwa definiujemy jako

$$\alpha_i^o = (r_i^*)^T(a_{i+1} - a_i)/l_i = L_i^T(a_{i+1} - a_i).$$

Tymczasem przyspieszenie kątowe i -tego złącza to różnica przyspieszeń kątowych sąsiadujących ogniw:

$$\alpha_i^z = \alpha_i^o - \alpha_{i-1}^o. \quad (12)$$

Zachodzi

$$\alpha_i^z = L_i^T a_{i+1} - (L_i + L_{i-1})^T a_i + L_{i-1}^T a_{i-1} \quad (13)$$

Założmy zatem, że przyspieszenie kątowe i -tego złącza jest dane i wynosi α_i^w . Sposobem na jego wymuszenie będzie pojawienie się tam wymuszającego momentu τ_i^w . Aby uwzględnić τ_i^w , musimy nieco inaczej niż w Części I spojrzeć na dynamikę układu. Do ustalenia co się dzieje ze złączem $i + 1$ -szym nie wystarczy nam wiedza o sumie sił działających na złącze i -te. Potrzebna jest nam także wiedza o momencie indukowanym w tym złączu.

W ogólności, będziemy rozważali następujący model propagacji dynamiki obiektu. Będzie to komplet czterech funkcji opisujących działanie i -tego ogniwa. Argumentem wszystkich tych funkcji jest siła przykładana do i -tego ogniwa i indukowany tam moment.

- Przyspieszenie i -tego złącza:

$$a_i = \tilde{a}_i(F_i^d, \tau_i^w) = A_i F_i^d + b_i^w \tau_i^w + b_i.$$

- Przyspieszenie kątowe i -tego ogniwa:

$$\alpha_i^o = \tilde{\alpha}_i^o(F_i^d, \tau_i^w) = p_i^T F_i^d + q_i^w \tau_i^w + q_i.$$

- Siła, którą i -te złącze działa na $i + 1$ -sze poprzez i -te ogniwo:

$$F_{i+1}^d = \tilde{f}_i(F_i^d, \tau_i^w) = C_i F_i^d + d_i^w \tau_i^w + d_i.$$

- Moment wymuszający w $i + 1$ -tym złączu:

$$\tau_{i+1}^w = \tilde{g}_i(F_i^d, \tau_i^w) = g_i^T F_i^d + h_i^w \tau_i^w + h_i.$$

Obliczanie przyspieszeń w danym kwancie czasu zachodzi według następującej procedury:

1. Dla $i = n, n-1, \dots, 1$ wyznacz $\tilde{g}_i, \tilde{f}_i, \tilde{a}_i$ oraz $\tilde{\alpha}_i^o$ czyli $g_i, h_i^w, h_i, C_i, d_i^w, d_i, A_i, b_i^w, b_i$ oraz p_i, q_i^w, q_i .
2. Przyjmij zerowe F_1^d i τ_1^w . Dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oblicz

$$\begin{aligned} F_{i+1}^d &= \tilde{f}_i(F_i^d, \tau_i^w) \\ \tau_{i+1}^w &= \tilde{g}_i(F_i^d, \tau_i^w) \end{aligned}$$

3. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ oblicz

$$a_i = \tilde{a}_i(F_i^d, \tau_i^w).$$

10 Iteracja

Przeanalizujemy sposób wyznaczania funkcji \tilde{g}_i , \tilde{f}_i , $\tilde{\alpha}_i^o$ oraz \tilde{a}_i w najbardziej typowej sytuacji gdy złącze i -te nie jest prowadzone zaś złącze $i + 1$ -sze istnieje i jest aktywne. Powiedzmy zatem, że znamy funkcje

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) &= A_{i+1}F_{i+1}^d + b_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + b_{i+1}, \\ \tilde{\alpha}_{i+1}^o(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) &= p_{i+1}^T F_{i+1}^d + q_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + q_{i+1}.\end{aligned}$$

Poszukujemy funkcji opisujących dynamikę i -tego złącza, których argumentami są wektory F_i^d, τ_i^w wyrażające arbitralną siłę i moment działające na złącza i -te. Oznaczmy

$$F = F_i^d, \quad \tau = \tau_i^w.$$

Rozważmy siłę naprężenia oddziałujące na $i + 1$ -sze złącze poprzez i -tego ogniwo. Jest to wypadkowa dwóch sił: (a) równoległej do r_i , odpowiedzialnej za to, że złącza i -te oraz $i + 1$ -sze nie zmieniają odległości od siebie, (b) równoległej do r_i^* , związanej z pojawieniem się momentów wymuszających τ_i^w oraz τ_{i+1}^w . Ostatecznie

$$F_{i+1}^d = r_i\phi_i + (r_i^*/l_i)(\tau_i^w - \tau_{i-1}^w) = r_i\phi_i + L_i(\tau - \tau_{i+1}^w).$$

gdzie ϕ_i oraz τ_{i+1}^w to pewne skalary, które teraz musimy wyznaczyć.

Wyznamy całkowitą siłę F_i działającą na i -te ogniwo. Jest to suma siły zewnętrznej i sił przenoszonych przez sąsiednie ogniwa. Zatem

$$\begin{aligned}F_i &= F_i^e + F_i^d - F_{i+1}^d \\ &= F_i^e + F - r_i\phi_i - L_i\tau + L_i\tau_{i+1}^w\end{aligned}$$

Do wyznaczenia ϕ_i oraz τ_{i+1}^w posłużymy nam układ dwóch równań. Pierwsze z nich, *równanie ogniwa*, mówi, że złącza i -te oraz $i + 1$ -sze nie oddalają ani nie przybliżają się do siebie.

$$\begin{aligned}e_i &= r_i^T(a_i - a_{i+1}) \\ &= r_i^T(F_i/m_i - \tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w)) \\ &= r_i^T\left(\frac{1}{m_i}(F_i^e + F - r_i\phi_i - L_i\tau + L_i\tau_{i+1}^w) \right. \\ &\quad \left. - (A_{i+1}(r_i\phi_i + L_i\tau - L_i\tau_{i+1}^w) + b_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + b_{i+1})\right).\end{aligned}$$

Wartość $e_i = \|v_{i+1} - v_i\|^2/l_i$ to przyspieszenie dośrodkowe złącz. Jeśli przyjmiemy oznaczenia

$$k_0 = -1/m_i - r_i^T A_{i+1} r_i \quad (14)$$

$$k_1 = 0 + r_i^T A_{i+1} L_i - r_i^T b_{i+1}^w \quad (15)$$

$$k_2 = r_i/m_i \quad (16)$$

$$k_3 = 0 - r_i^T A_{i+1} L_i \quad (17)$$

$$k_4 = r_i^T F_i^e/m_i - r_i^T b_{i+1} - e_i, \quad (18)$$

to otrzymamy równanie

$$0 = k_0 \phi_i + k_1 \tau_{i+1}^w + k_2^T F + k_3 \tau + k_4.$$

Drugie równanie wynika z (12) i wyznacza prędkość kątową i -tego złącza tak, aby była ona równa zadanej wartości α_i^w . Mamy

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}^w &= \alpha_{i+1}^o - \alpha_i^o \\ &= \tilde{\alpha}_{i+1}^o(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - L_i^T(\tilde{\alpha}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - a_i) \\ &= p_{i+1}^T F_{i+1}^d + q_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + q_{i+1} - L_i^T(A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1} - F_i/m_i) \\ &= p_{i+1}^T(r_i \phi_i + L_i \tau - L_i \tau_{i+1}^w) + q_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + q_{i+1} \\ &\quad - L_i^T(A_{i+1}(r_i \phi_i + L_i \tau - L_i \tau_{i+1}^w) + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1}) \\ &\quad + L_i^T \frac{1}{m_i} (F_i^e + F - r_i \phi_i - L_i \tau + L_i \tau_{i+1}^w) \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy oznaczenia

$$k_5 = p_{i+1}^T r_i - L_i^T A_{i+1} r_i - 0 \quad (19)$$

$$k_6 = -p_{i+1}^T L_i + q_{i+1}^w + L_i^T A_{i+1} L_i - L_i^T b_{i+1}^w + \|L_i\|^2/m_i \quad (20)$$

$$k_7 = L_i/m_i \quad (21)$$

$$k_8 = p_{i+1}^T L_i - L_i^T A_{i+1} L_i - \|L_i\|^2/m_i \quad (22)$$

$$k_9 = q_{i+1} - L_i^T b_{i+1} + L_i^T F_i^e/m_i - \alpha_{i+1}^w, \quad (23)$$

dostaniemy równanie

$$0 = k_5 \phi_i + k_6 \tau_{i+1}^w + k_7^T F + k_8 \tau + k_9$$

i, w rezultacie, układ równań

$$0 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ k_5 & k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \tau_{i+1}^w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2^T F + k_3 \tau + k_4 \\ k_7^T F + k_8 \tau + k_9 \end{bmatrix},$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \phi_i \\ \tau_{i+1}^w \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ k_5 & k_6 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} k_2^T F + k_3 \tau + k_4 \\ k_7^T F + k_8 \tau + k_9 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{k_1 k_5 - k_0 k_6} \begin{bmatrix} k_6(k_2^T F + k_3 \tau + k_4) - k_1(k_7^T F + k_8 \tau + k_9) \\ k_0(k_7^T F + k_8 \tau + k_9) - k_5(k_2^T F + k_3 \tau + k_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{12}^T \\ k_{13}^T \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{15} \end{bmatrix} \tau + \begin{bmatrix} k_{16} \\ k_{17} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_{11} &= k_5 k_1 - k_0 k_6 \\
k_{12} &= (k_2 k_6 - k_7 k_1) / k_{11} \\
k_{13} &= (k_7 k_0 - k_2 k_5) / k_{11} \\
k_{14} &= (k_6 k_3 - k_1 k_8) / k_{11} \\
k_{15} &= (k_0 k_8 - k_5 k_3) / k_{11} \\
k_{16} &= (k_4 k_6 - k_1 k_9) / k_{11} \\
k_{17} &= (k_0 k_9 - k_5 k_4) / k_{11}.
\end{aligned}$$

W ostatnim kroku wyznaczamy funkcje \tilde{g}_i , \tilde{f}_i , \tilde{a}_i oraz $\tilde{\alpha}_i^o$. Będziemy je wyznaczać w takiej właśnie kolejności. Funkcja \tilde{g}_i jest oczywista

$$\tau_{i+1}^w = k_{13}^T F + k_{15} \tau + k_{17}$$

czyli

$$g_i = k_{13}, \quad h_i^w = k_{15}, \quad h_i = k_{17}.$$

Dalej,

$$\begin{aligned}
F_{i+1}^d &= r_i \phi_i + L_i \tau_i^w - L_i \tau_{i+1}^w \\
&= (r_i k_{12}^T - L_i k_{13}^T) F + (r_i k_{14} + L_i - L_i k_{15}) \tau + r_i k_{16} - L_i k_{17} \\
&= C_i F + d_i^w \tau + d_i.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
C_i &= r_i k_{12}^T - L_i k_{13}^T \\
d_i^w &= r_i k_{14} + L_i - L_i k_{15} \\
d_i &= r_i k_{16} - L_i k_{17}.
\end{aligned}$$

Funkcja \tilde{a}_i będzie wynikała z \tilde{f}_i .

$$a_i = \tilde{a}_i(F, \tau) = F_i / m_i = (F^e + F - F_{i+1}^d) / m_i = A_i F + b_i^w \tau + b_i$$

czyli

$$\begin{aligned} A_i &= (I - C_i)/m_i \\ b_i^w &= -d_i^w/m_i \\ b_i &= (F_i^e - d_i)/m_i. \end{aligned}$$

Funkcja $\tilde{\alpha}_i^o$ będzie wynikała z \tilde{a}_i oraz \tilde{a}_{i+1} , mianowicie

$$\begin{aligned} \alpha_i^o &= L_i^T (a_{i+1} - a_i) \\ &= L_i^T (\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - \tilde{a}_i(F_i^d, \tau_i^w)) \\ &= L_i^T (\tilde{a}_{i+1}(\tilde{f}_i(F, \tau), \tilde{g}_i(F, \tau)) - \tilde{a}_i(F, \tau)) \\ &= L_i^T (A_{i+1}C_i F + A_{i+1}d_i^w \tau + A_{i+1}d_i \\ &\quad + b_{i+1}^w g_i^T F + b_{i+1}^w h_i^w \tau + b_{i+1}^w h_i + b_{i+1} \\ &\quad - A_i F - b_i^w \tau - b_i) \\ &= p_i^T F + q_i^w \tau + q_i. \end{aligned}$$

skąd mamy

$$\begin{aligned} p_i &= (L_i^T A_{i+1} C_i + L_i^T b_{i+1}^w g_i^T - L_i^T A_i)^T \\ q_i^w &= L_i^T A_{i+1} d_i^w + L_i^T b_{i+1}^w h_i^w - L_i^T b_i^w \\ q_i &= L_i^T A_{i+1} d_i + L_i^T b_{i+1}^w h_i + L_i^T b_{i+1} - L_i^T b_i. \end{aligned}$$

Podsumowując, sposób wyznaczania \tilde{g}_i , \tilde{f}_i , \tilde{a}_i oraz $\tilde{\alpha}_i^o$ jest następujący: Najpierw obliczamy L_i, L_{i-1} , potem wielkości oznaczane przez k lub k , w takiej kolejności jak na to wskazują ich indeksy. Następnie obliczane są $g_i, h_i^w, h_i, C_i, d_i^w, d_i, A_i, b_i^w, b_i$ oraz p_i, q_i^w, q_i .

Wyprowadzenia były oparte na założeniu, że zarówno złącze i -te nie jest prowadzone, natomiast złącze $i + 1$ -sze istnieje i jest aktywne. Dalej rozważymy co się dzieje jeśli któryś z tych warunków nie jest spełniony.

11 Przypadki szczególne

W niniejszej sekcji rozważymy przypadki szczególne. Musimy rozważyć rozmaite cechy złącza i -tego oraz $i + 1$ -szego. Ponieważ każde z nich może być i nie być aktywne oraz może być i nie być prowadzone, to w zasadzie można rozważać $(2 \cdot 2)^2 = 16$ różne przypadki. Na szczęście nie wszystkie z nich muszą być dyskutowane odrębnie.

11.1 Złącze prowadzone i aktywne następne

Niech i -te złącze będzie prowadzone w odróżnieniu od $i+1$ -szego, które niech jednak będzie aktywne. Powiedzmy zatem, że znamy funkcje

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) &= A_{i+1}F_{i+1}^d + b_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + b_{i+1}, \\ \tilde{\alpha}_{i+1}^o(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) &= p_{i+1}^T F_{i+1}^d + q_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + q_{i+1}.\end{aligned}$$

Zadanie polega na wyznaczeniu funkcji \tilde{g}_i , \tilde{f}_i , $\tilde{\alpha}_i^o$ oraz \tilde{a}_i , których argumentami są wektory F_i^d, τ_i^w wyrażające arbitralną siłę i moment działające na złącza i -te. Oznaczmy

$$F = F_i^d, \quad \tau = \tau_i^w.$$

Rozważmy siłę naprężenia oddziałującą na $i+1$ -sze złącze poprzez i -tego ogniwo. Jest to wypadkowa dwóch sił: (a) równoległej do r_i , odpowiedzialnej za to, że złącza i -te oraz $i+1$ -sze nie zmieniają odległości od siebie, (b) równoległej do r_i^* , związanej z pojawieniem się momentów wymuszających τ_i^w oraz τ_{i+1}^w . Ostatecznie

$$F_{i+1}^d = r_i\phi_i + (r_i^*/l_i)(\tau_i^w - \tau_{i+1}^w) = r_i\phi_i + L_i(\tau - \tau_{i+1}^w).$$

gdzie ϕ_i oraz τ_{i+1}^w to pewne skalary, które teraz musimy wyznaczyć.

Do wyznaczenia ϕ_i oraz τ_{i+1}^w posłuży nam układ dwóch równań. Pierwsze z nich, *równanie ogniwa*, mówi, że złącza i -te oraz $i+1$ -sze nie oddalają ani nie przybliżają się do siebie.

$$\begin{aligned}e_i &= r_i^T(a_i - a_{i+1}) \\ &= r_i^T(a_i^w - \tilde{\alpha}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w)) \\ &= r_i^T\left(a_i^w - (A_{i+1}(r_i\phi_i + L_i\tau - L_i\tau_{i+1}^w) + b_{i+1}^w\tau_{i+1}^w + b_{i+1})\right).\end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy oznaczenia

$$k_0 = -r_i^T A_{i+1} r_i \tag{24}$$

$$k_1 = r_i^T A_{i+1} L_i - r_i^T b_{i+1}^w \tag{25}$$

$$k_3 = -r_i^T A_{i+1} L_i \tag{26}$$

$$k_4 = r_i^T a_i^w - r_i^T b_{i+1} - e_i, \tag{27}$$

to otrzymamy równanie

$$0 = k_0\phi_i + k_1\tau_{i+1}^w + k_3\tau + k_4.$$

Drugie równanie wynika z (12) i stabilizuje prędkość kątową

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1}^w &= \alpha_{i+1}^o - \alpha_i^o \\
&= \tilde{\alpha}_{i+1}^o(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - L_i^T(\tilde{\alpha}_{i+1}^T(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - a_i) \\
&= p_{i+1}^T F_{i+1}^d + q_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + q_{i+1} - L_i^T(A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1} - a_i^w) \\
&= p_{i+1}^T(r_i \phi_i + L_i \tau - L_i \tau_{i+1}^w) + q_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + q_{i+1} \\
&\quad - L_i^T(A_{i+1}(r_i \phi_i + L_i \tau - L_i \tau_{i+1}^w) + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1}) \\
&\quad + L_i^T a_i^w
\end{aligned}$$

Jeśli przyjmujemy oznaczenia

$$k_5 = p_{i+1}^T r_i - L_i^T A_{i+1} r_i \quad (28)$$

$$k_6 = -p_{i+1}^T L_i + q_{i+1}^w + L_i^T A_{i+1} L_i - L_i^T b_{i+1}^w \quad (29)$$

$$k_8 = p_{i+1}^T L_i - L_i^T A_{i+1} L_i \quad (30)$$

$$k_9 = q_{i+1} - L_i^T b_{i+1} + L_i^T a_i^w - \alpha_{i+1}^w, \quad (31)$$

dostaniemy równanie

$$0 = k_5 \phi_i + k_6 \tau_{i+1}^w + k_8 \tau + k_9.$$

Ostatecznie dostajemy układ równań

$$0 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ k_5 & k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \tau_{i+1}^w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \tau + k_4 \\ k_8 \tau + k_9 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \phi_i \\ \tau_{i+1}^w \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ k_5 & k_6 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} k_2^T F + k_3 \tau + k_4 \\ k_7^T F + k_8 \tau + k_9 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{k_1 k_5 - k_0 k_6} \begin{bmatrix} k_6(k_3 \tau + k_4) - k_1(k_8 \tau + k_9) \\ k_0(k_8 \tau + k_9) - k_5(k_3 \tau + k_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{15} \end{bmatrix} \tau + \begin{bmatrix} k_{16} \\ k_{17} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_{11} &= k_5 k_1 - k_0 k_6 \\
k_{14} &= (k_6 k_3 - k_1 k_8) / k_{11} \\
k_{15} &= (k_0 k_8 - k_5 k_3) / k_{11} \\
k_{16} &= (k_4 k_6 - k_1 k_9) / k_{11} \\
k_{17} &= (k_0 k_9 - k_5 k_4) / k_{11}.
\end{aligned}$$

W ostatnim kroku wyznaczamy funkcje \tilde{g}_i , \tilde{f}_i , \tilde{a}_i oraz $\tilde{\alpha}_i^o$. Będziemy je wyznaczać w takiej właśnie kolejności. Funkcja \tilde{g}_i jest oczywista

$$\tau_{i+1}^w = k_{15}\tau + k_{17}$$

czyli

$$g_i = 0, \quad h_i^w = k_{15}, \quad h_i = k_{17}.$$

Dalej,

$$\begin{aligned} F_{i+1}^d &= r_i \phi_i + L_i \tau_i^w - L_i \tau_{i+1}^w \\ &= (r_i k_{14} + L_i - L_i k_{15})\tau + r_i k_{16} - L_i k_{17} \\ &= C_i F + d_i^w \tau + d_i, \end{aligned}$$

skąd wynika funkcja \tilde{f}_i , mianowicie

$$\begin{aligned} C_i &= 0 \\ d_i^w &= r_i k_{14} + L_i - L_i k_{15} \\ d_i &= r_i k_{16} - L_i k_{17}. \end{aligned}$$

Funkcja \tilde{a}_i będzie wynikała z \tilde{f}_i .

$$a_i = a_i^w = \tilde{a}_i(F, \tau) = A_i F + b_i^w \tau + b_i$$

czyli

$$\begin{aligned} A_i &= 0 \\ b_i^w &= 0 \\ b_i &= a_i^w. \end{aligned}$$

Funkcja $\tilde{\alpha}_i^o$ będzie wynikała z \tilde{a}_i oraz \tilde{a}_{i+1} , mianowicie

$$\begin{aligned} \alpha_i^o &= L_i^T (a_{i+1} - a_i) \\ &= L_i^T (\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) - a_i^w) \\ &= L_i^T (\tilde{a}_{i+1}(\tilde{f}_i(F, \tau), \tilde{g}_i(F, \tau)) - a_i^w) \\ &= L_i^T (A_{i+1} C_i F + A_{i+1} d_i^w \tau + A_{i+1} d_i \\ &\quad + b_{i+1}^w g_i^T F + b_{i+1}^w h_i^w \tau + b_{i+1}^w h_i + b_{i+1} - a_i^w) \\ &= p_i^T F + q_i^w \tau + q_i. \end{aligned}$$

skąd mamy

$$\begin{aligned} p_i &= 0 \\ q_i^w &= L_i^T A_{i+1} d_i^w + L_i^T b_{i+1}^w h_i^w \\ q_i &= L_i^T A_{i+1} d_i + L_i^T b_{i+1}^w h_i + L_i^T b_{i+1} - L_i^T b_i. \end{aligned}$$

W omawianym przypadku wyprowadziliśmy funkcje $\tilde{g}_i, \tilde{f}_i, \tilde{a}_i$ oraz $\tilde{\alpha}_i^o$ w taki sposób, że wektory je opisujące zależą od siebie. Należy je więc wyznaczać w takiej właśnie kolejności jak podana powyżej.

Sytuacje wyjątkowe

W szczególnych przypadkach układ równań (32) może nie mieć rozwiązań lub mieć ich nieskończenie wiele. Z pewnością równanie pierwsze nie będzie miało rozwiązania jeśli złącze $i + 1$ -sze jest prowadzone. Jeśli dodatkowo prowadzone jest złącze $i + 2$ -gie, wówczas także równanie drugie nie będzie miało rozwiązania. Jeśli złącze $i + 2$ -gie będzie prowadzone ale złącze $i + 1$ -sze nie, wówczas oba równania będą miały rozwiązania, tyle, że będą one sprzeczne. W podobnych przypadkach, których listy bynajmniej tu nie wyczerpaliśmy, należy zamienić równania na takie, których rozwiązaniami są zerowe ϕ_i (przyjmując $k_0 = 1, k_1 = k_3 = k_4 = 0$) i/albo τ_{i+1}^w (przyjmując $k_6 = 1, k_5 = k_8 = k_9 = 0$). Wszystkie takie sytuacje możemy wykryć badając czy współczynnik k_{11} jest na poziomie błędu numerycznego. Jeśli tak, musimy rozważyć z osobna każdą z następujących możliwości:

1. Wartość $|k_0| + |k_1|$ jest na poziomie błędu numerycznego lub $|k_0| + |k_1| < |k_5| + |k_6|$. Zmieniamy pierwsze równanie na dające zerowe ϕ_i .
2. Wartość $|k_5| + |k_6|$ jest na poziomie błędu numerycznego lub $|k_0| + |k_1| \geq |k_5| + |k_6|$. Zmieniamy drugie równanie na dające zerowe τ_{i+1}^w .

11.2 Złącze prowadzone i nieaktywne następne

Założmy, że złącze i -te jest prowadzone, zaś $i + 1$ -sze jest nieaktywne. Złącze i -te może być przy tym aktywne lub nie. W takim razie przyspieszenie i -tego złącza wynosi a_i^w i nie istnieje moment wymuszający τ_{i+1}^w . Wobec tego $\tilde{a}_i \equiv a_i^w$ zaś $\tilde{g}_i \equiv 0$. Musimy jednak wyznaczyć pozostałe funkcje opisujące dynamiką i -tego złącza. Znamy funkcję

$$\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) = A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1}.$$

Zadanie polega na wyznaczeniu funkcji \tilde{f}_i i \tilde{a}_i^0 , których argumentami są wektory F_i^d, τ_i^w wyrażające arbitralną siłę i moment działające na złącza i -te. Oznaczamy

$$F = F_i^d, \quad \tau = \tau_i^w.$$

Rozważmy siłę naprężenia oddziałujące na $i + 1$ -sze złącze poprzez i -tego ogniwo. Jest to wypadkowa dwóch sił: (a) równoległej do r_i , odpowiedzialnej za to, że złącza i -te oraz $i + 1$ -sze nie zmieniają odległości od siebie, (b) równoległej do r_i^* , związanej z pojawieniem się momentu wymuszającego τ_i^w . Mamy

$$F_{i+1}^d = r_i \phi_i + (r_i^*/l_i) \tau_i^w = r_i \phi_i + L_i \tau.$$

gdzie ϕ_i to pewien skalar, który teraz musimy wyznaczyć.

Do wyznaczenia ϕ_i posłużymy nam *równanie ogniwa*, które mówi, że złącza i -te oraz $i + 1$ -sze nie oddalają ani nie przybliżają się do siebie.

$$\begin{aligned} e_i &= r_i^T (a_i - a_{i+1}) \\ &= r_i^T (a_i^w - \tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w)) \\ &= r_i^T (a_i^w - (A_{i+1}(r_i \phi_i + L_i \tau) + b_{i+1}^w \cdot 0 + b_{i+1})). \end{aligned}$$

Z powyższego dostajemy

$$\phi_i = \frac{r_i^T (a_i^w - b_{i+1}) - e_i - r_i^T A_{i+1} L_i \tau}{r_i^T A_{i+1} r_i}$$

a ponieważ

$$F_{i+1}^d = \tilde{f}_i(F, \tau) = C_i F + b_i^w \tau + b_i = r_i \phi_i + L_i \tau$$

łatwo dostajemy

$$\begin{aligned} C_i &= 0 \\ d_i^w &= L_i - \frac{r_i r_i^T A_{i+1} L_i}{r_i^T A_{i+1} r_i} \\ d_i &= \frac{r_i (r_i^T (a_i^w - b_{i+1}) - e_i)}{r_i^T A_{i+1} r_i}. \end{aligned}$$

Funkcje \tilde{g}_i i \tilde{a}_i , jak wspomniano wyżej, mają tym razem proste postaci

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i(F, \tau) &= g_i^T F + h_i^w \tau + h_i \equiv 0 \\ \tilde{a}_i(F, \tau) &= A_i F + b_i^w \tau + b_i \equiv a_i^w \end{aligned}$$

co wyjaśnia wartości współczynników $g_i, h_i^w, h_i, A_i, b_i^w, b_i$. W końcu, funkcję

$$\tilde{\alpha}_i^o(F, \tau) = p_i^T F + q_i^w \tau + q_i$$

można wyznaczyć stosując wzory na p_i, q_i^w, q_i z poprzedniego rozdziału biorąc jednak pod uwagę, że $b_{i+1}^w = 0$. Dostajemy zatem

$$\begin{aligned} p_i &= 0 \\ q_i^w &= L_i^T A_{i+1} d_i^w - L_i^T b_i^w \\ q_i &= L_i^T A_{i+1} d_i + L_i^T b_{i+1} - L_i^T b_i. \end{aligned}$$

Sytuacje wyjątkowe

W szczególnym przypadku przyspieszenie $i+1$ -szego złącza nie zależy od siły doń przykładanej (np. gdy złącze to jest prowadzone). Dostajemy wówczas $r_i^T A_{i+1} r_i$ na poziomie błędu numerycznego i obliczanie F_i^d mija się z celem. Należy wówczas przyjąć $F_{i+1}^d = \tilde{f}_i(F, \tau) \equiv 0$.

11.3 Złącze nieprzewodzone i nieaktywne następne

Założmy, że złącze $i+1$ nie jest aktywne. W takim razie nie istnieje moment wymuszający τ_{i+1}^w i mamy $\tilde{g}_i \equiv 0$. Musimy jednak wyznaczyć pozostałe funkcje. Powiedzmy zatem, że znamy funkcję

$$\tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w) = A_{i+1} F_{i+1}^d + b_{i+1}^w \tau_{i+1}^w + b_{i+1}.$$

Jak zwykle oznaczamy

$$F = F_i^d, \quad \tau = \tau_i^w.$$

Tym razem siła naprężenia oddziałująca na $i+1$ -sze złącze poprzez i -te ogniwo jest wypadkową dwóch sił: (a) równoległej do r_i , odpowiedzialnej za to, że złącza i -te oraz $i+1$ -sze nie zmieniają odległości od siebie, (b) równoległej do r_i^* , związanej z pojawieniem się momentu wymuszającego τ_i^w . Ostatecznie

$$F_{i+1}^d = r_i \phi_i + (r_i^*/l_i) \tau_i^w = r_i \phi_i + L_i \tau.$$

gdzie ϕ_i to pewien skalar, który teraz musimy wyznaczyć.

Wyznamy całkowitą siłę F_i działającą na i -te złącze. Jest to suma siły zewnętrznej i sił przenoszonych przez sąsiednie ogniwa. Zatem

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^e + F_i^d - F_{i+1}^d \\ &= F_i^e + F - r_i \phi_i - L_i \tau \end{aligned}$$

Do wyznaczenia ϕ_i posłużymy nam *równanie ogniwa*, które mówi, że złącza i -te oraz $i + 1$ -sze nie oddalają ani nie przybliżają się do siebie.

$$\begin{aligned} m_i e_i &= m_i r_i^T (a_i - a_{i+1}) \\ &= r_i^T (F_i - m_i \tilde{a}_{i+1}(F_{i+1}^d, \tau_{i+1}^w)) \\ &= r_i^T \left((F_i^e + F - r_i \phi_i - L_i \tau) \right. \\ &\quad \left. - m_i (A_{i+1}(r_i \phi_i + L_i \tau) + b_{i+1}^w \cdot 0 + b_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

Z powyższego dostajemy

$$\phi_i = \frac{r_i^T F - (r_i^T L_i + m_i r_i^T A_{i+1} L_i) \tau + r_i^T F_i^e - (r_i^T b_{i+1} + e_i) m_i}{r_i^T A_{i+1} r_i m_i + 1}$$

a ponieważ

$$F_{i+1}^d = \tilde{f}_i(F, \tau) = C_i F + b_i^w \tau + b_i = r_i \phi_i + L_i \tau$$

łatwo dostajemy

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{r_i r_i^T}{r_i^T A_{i+1} r_i m_i + 1} \\ d_i^w &= L_i - \frac{r_i (0 + r_i^T A_{i+1} L_i m_i)}{r_i^T A_{i+1} r_i m_i + 1} \\ d_i &= \frac{r_i r_i^T F_i^e - r_i (r_i^T b_{i+1} + e_i) m_i}{r_i^T A_{i+1} r_i m_i + 1} \end{aligned}$$

Funkcja \tilde{a}_i jest, jak zwykle, nieco bardziej kłopotliwa

$$a_i = \tilde{a}_i(F, \tau) = F_i / m_i = (F^e + F - F_{i+1}^d) / m_i = A_i F + b_i^w \tau + b_i$$

czyli

$$\begin{aligned} A_i &= (I - C_i) / m_i \\ b_i^w &= -d_i^w / m_i \\ b_i &= (F_i^e - d_i) / m_i. \end{aligned}$$

W końcu, funkcję

$$\tilde{\alpha}_i^o(F, \tau) = p_i^T F + q_i^w \tau + q_i$$

można wyznaczyć stosując wzory na p_i , q_i^w , q_i z poprzedniego rozdziału biorąc jednak pod uwagę, że $b_{i+1}^w = 0$. Dostajemy zatem

$$\begin{aligned} p_i &= (L_i^T A_{i+1} C_i - L_i^T A_i)^T \\ q_i^w &= L_i^T A_{i+1} d_i^w - L_i^T b_i^w \\ q_i &= L_i^T A_{i+1} d_i + L_i^T b_{i+1} - L_i^T b_i. \end{aligned}$$

12 Symulacja z ograniczeniami na kąty

W niniejszym rozdziale zajmiemy się symulowaniem obiektu, w którym kąty między sąsiadującymi ogniwami są ograniczone do pewnego przedziału. Zdefiniujmy *kąt w i -tym ogniwie*, θ_i , jako kąt między r_i a r_{i-1} . Przyjmujemy, że $\theta_i \in [\theta_i^m, \theta_i^M]$. Dopóki $\theta_i \in (\theta_i^m, \theta_i^M)$, nie mają miejsca żadne zjawiska, które należałoby było modelować przez wymuszone przyspieszenie kątowe. Konieczność taka pojawia się, kiedy (i) θ_i dochodzi do θ_i^m lub θ_i^M , oraz (ii) gdy θ_i pozostaje na θ_i^m lub θ_i^M . Zdarzenia te omówimy w kolejnym podrozdziale.

12.1 Kąt trafia na ograniczenie, zwarcie

W podsekcji 7.1 rozważaliśmy zjawiska towarzyszące zderzeniu złącza z nieruchomym przedmiotem. W niniejszej sekcji dyskutujemy zjawisko analogiczne polegające na tym, że kąt między $i - 1$ -szym a i -tym ogniwem natrafia na swoje ograniczenie. To co wówczas następuje będziemy nazywali *zwarcie* kąta z jego ograniczeniem. W ciągu bardzo krótkiego kwantu czasu działa moment siły, który wyhamowuje prędkość kątową złącza. Analiza występujących tu zjawisk jest identyczna do dyskusji tego co się dzieje gdy złącze *wbija się* w punkt. Tam w krótkim kwancie czasu działała na złącze bardzo duża siła. Tutaj na takie zderzające się ograniczeniem złącze działa przez krótką chwilę duży moment siły. Procedura jego obliczania jest analogiczna do opisanej w podsekcji 7.1 i wygląda w sposób następujący

- Z1. Przyjmij $F_k^e = 0$, $e_k = 0$ dla $k = 1, \dots, n$ oraz $\alpha_i^w = -\omega_i^z$ (przejście na skalę czasu o jednostce ϵ dążącym do zera).
- Z2. Wyznacz $\tilde{f}_k, \tilde{a}_k, \tilde{\tau}_k$ a następnie przyspieszenia a_k dla $k = 1, \dots, n$ zgodnie z dotychczas wyprowadzonymi wzorami.
- Z3. (Powrót do pierwotnej skali czasu) Oblicz $v_k := v_k + a_k$ dla $k = 1, \dots, n$.

Zwarcie kąta z jego ograniczeniem następuje w pewnym momencie między dyskretnymi chwilami czasu symulacji. Na ogół łatwo jest wykryć *post factum*, że do zwarcia doszło. Wtedy bowiem dla pewnego i mamy $\theta_i \notin [\theta_i^m, \theta_i^M]$. W tym momencie należy podjąć szereg czynności rozpoczynający się od ustalenia jaki kwant czasu ϵ temu doszło do zwarcia. Powiedzmy, że $\theta_i > \theta_i^M$. Mamy

$$\theta_i - \theta_i^M = \omega_i^z \epsilon - 0.5 \alpha_i^z \epsilon^2$$

co daje

$$\epsilon' = \frac{\omega_i^z - \sqrt{\Delta}}{\alpha_i^z}, \quad \epsilon'' = \frac{\omega_i^z + \sqrt{\Delta}}{\alpha_i^z}, \quad \Delta = (\omega_i^z)^2 - 2\alpha_i^z(\theta_i - \theta_i^M).$$

Należy przyjąć jako ϵ mniejszą dodatnią spośród liczb ϵ' , ϵ'' .

Następnie należy wykonać następujące czynności:

- a) cofnąć się w czasie o do chwili zderzenia,
- b) wyznaczyć prędkości po zderzeniu, np. wg. kroków Z1, Z2, Z3,
- c) uaktywnić złącze, które się zderzyło i przypisać mu $\alpha_i^w = 0$.
- d) przesymulować wydarzenia, które następują potem w ciągu czasu o długości ϵ .

Po zwarciu, złącze pozostaje aktywne tak długo, jak długo konieczny jest moment τ_i^w odpychający kąt θ_i od ograniczenia. Z chwilą gdy okazuje się, że taki moment w istocie dociska kąt θ_i do ograniczenia, należy takie złącze uczynić nieaktywnym. W szczególnym przypadku złącze staje się aktywne tylko na kwant czasu kiedy jego prędkość kątowa zostaje wyhamowywana i natychmiast potem znowu staje się nieaktywne. Tak się dzieje, gdy siły egzogeniczne odpychają kąt od ograniczenia, jednak dochodzi do zwarcia przez inercję jego ruchu.

12.2 Anomalie

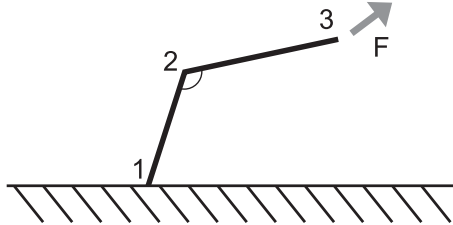
Oprogramowując symulację z ograniczeniami na kąty między ogniwami należy pamiętać o kilku nietypowych zjawiskach, które mogą mieć miejsce w jej trakcie. Omówimy je jako „sztywność”, „szuranie”, „klekotanie” oraz problemy z dyskretyzacją czasu.

Sztywność

Powiedzmy, że złącza $n - 1$ -sze i n -te są prowadzone, natomiast złącza od i -tego do $n - 1$ -szego są aktywne. W takim razie obiekt między złączami $i - 1$ -szym a n -tym zachowuje się jak sztywno osadzona w przestrzeni bryła. W szczególności, przyspieszenie złącza $i - 1$ -ego nie zależy od tego jaka zostanie przyłożona do niego siła. Propagacja funkcji opisujących dynamikę złącz ujawni, że $A_{i-1} = 0$. W zasadzie więc, powinniśmy ze złączem tym postępować jak z prowadzonym. Jeśli np. złącze $i - 2$ -gie jest prowadzone, wówczas próba znalezienia siły F_{i-1}^d tak aby zachować odpowiednie przyspieszenie między $i - 2$ -gim a $i - 1$ -szym złączem może skończyć się jedynie dzieleniem przez zero.

Powyższy przykład można zgeneralizować w następujący sposób: na skutek faktu, że dwa złącza są prowadzone zaś złącza między nimi są aktywne,

Rysunek 4: Szuranie. Obiekt jest nieruchomy; złącze 1 jest przy ziemi, kąt między ogniwami osiągnął swoją największą wartość. Złącze 3 jest ciągnięte siłą F .



mamy do czynienia z układem, który jest w pewnej części sztywny. Przykładanie sił do złącz należących do tej części nie zmienia ich przyspieszeń. Wyrafinowane remedium na tego rodzaju trudności polega na tym, aby wykrywać sztywne części obiektu i działać tak, jakby należące do nich złącza były prowadzone. Rozwiązanie mniej eleganckie, jednak bardziej uniwersalne polega na tym, aby przy wyznaczaniu funkcji dynamiki i -tego złącza za każdym razem czy aby A_{i+1} nie ma bardzo małych wartości. W poprzednich podrozdziałach opisujemy jak należy reagować na taką sytuację.

Założmy teraz, że n -te złącze jest prowadzone, natomiast złącza od i -tego do $n - 1$ -szego są aktywne. Wówczas obiekt między złączami i -tym a n -tym zachowuje się jak sztywne wahadło. Siła działająca na i -te złącze wpływa na tylko jeden wymiar jego przyspieszenia. Powiedzmy teraz, że złącze $i - 2$ -gie jest prowadzone. W takim razie przy zachowanej długości $i - 1$ -szego ogniwa nie jesteśmy w stanie kontrolować przyspieszenia kąтового i -tego złącza. Wysiłek w tym kierunku musi skończyć się dzieleniem przez zero. Poprzez analizę manipulatora możemy wykrywać tego rodzaju sytuację połowicznej sztywności. Rozwiązaniem mniej eleganckim jest sprawdzanie, czy przyspieszenie kątowe każdego $i + 1$ -szego w ogóle zależy do przykładanego w nim momentu. Jeśli nie zależy, trzeba zrezygnować z jego wyznaczania.

Szuranie

Zjawisko szurania pojawia się przy okazji odrywania złącz od punktów, w których są utkwione lub od ograniczeń na kąty. Może się wtedy okazać, że nie da się tak określić przyspieszeń aby odpowiadały one temu, które ograniczenia są aktywne.

Przykład szurania jest przedstawiony na Rysunku 4. Algorytm próbujący obliczyć przyspieszenia w tym układzie może wpaść w poniższą nieskończoną

pętlę. Powiedzmy, że na początku złącze 1 nie stoi na ziemi zaś złącze 2 jest nieaktywne.

1. Algorytm stwierdza, że złącze 1 porusza się z przyspieszeniem w dół i w takim razie należy je “postawić” czyli uczynić prowadzonym.
2. Złącze 2 ma teraz dodatnie przyspieszenie kątowe, należy je uczynić aktywnym.
3. Teraz złącze 1 jest ciągnięte do góry i wobec tego powinno przestać być prowadzone.
4. W tym momencie okazuje się, że złącze 1 swoją masą “składa” złącze 2. Aby teraz w złączu 2 mogło być utrzymane zerowe przyspieszenie kątowe, musi tam zadziałać moment, który dopycha je do ograniczenia. W tym momencie należy zrezygnować z przykładania takiego momentu i pętla zamyka się.

W rzeczywistym układzie fizycznym złącze 1 poruszałoby się po podłożu, czyli właśnie “szurało” po nim.

Receptą na opisywane zjawisko jest pozostawianie ograniczeń aktywnymi nawet jeśli nie ma to fizycznego sensu. W powyższym przykładzie oznaczałoby to pozostawienie złącza 1 prowadzonym w momencie stwierdzenia zapełnienia.

Klekotanie

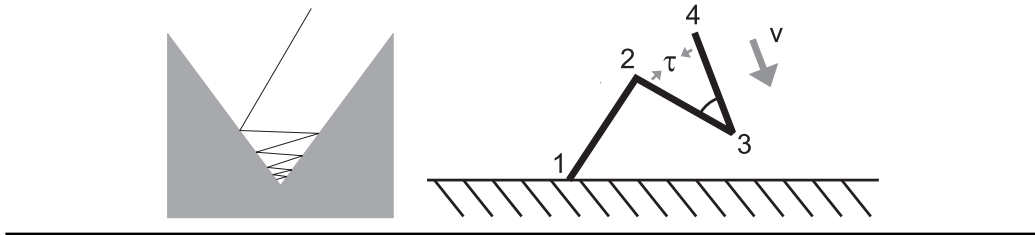
Klekotanie polega na tym, że odległości czasowe między trafieniami obiektu na różne ograniczenia są coraz mniejsze. W ten sposób symulator musi analizować coraz więcej wydarzeń w kwantach czasu tej samej długości. Sytuacja taka może towarzyszyć następującej kombinacji okoliczności:

- Obiekt jest w pobliżu co najmniej dwóch ograniczeń.
- Zetknięcie obiektu z każdym z ograniczeń odbija obiekt od niego i przybliża do innego.
- Droga do kolejnego ograniczenia zajmuje coraz krótszy przedział czasu.

Idea klekotania została zaprezentowana w lewej części Rysunku 5. Część prawa dostarcza ilustracji. Dochodzi tam do następującej sekwencji zdarzeń:

1. Zewnętrzny moment τ w złączu 3 przybliża złącze 2 do złącza 4.

Rysunek 5: Klekotanie. *Lewo*: idea. *Prawo*: ilustracja. Złącze 1 jest blisko ziemi, kąt złącza 3 jest blisko swojej najmniejszej wartości. Dodatkowo w złączu 3 działa zewnętrzny moment dopychający to złącze do ograniczenia. Obiekt porusza się w stronę ziemi z prędkością v .



2. W pewnym momencie ograniczenie na kąt 3 staje się aktywne; w tym momencie pęd złącza 2 jest przekazany do złącza 4.
3. Obiekt ciągle opada, więc złącze 1 w pewnym momencie styka się z ziemią. Ze względu na zewnętrzny moment τ , zaraz po zetknięciu z ziemią złącze to jest ściągane w stronę złącza 4. W momencie zderzenia z ziemią, prędkość złącza 4 zmienia się i porusza się ono w stronę złącza 2 i pętla zdarzeń zamyka się.

Ponieważ cały obiekt jest coraz niżej, odcinki czasu między zdarzeniami są coraz krótsze. W rzeczywistości przyniosłoby to taki efekt, że nieskończona sekwencja zdarzeń odbyłaby się w skończonym czasie i obiekt “klekocząc” wylądowałby na ziemi. Nie jest natomiast możliwe aby taką nieskończoną pętlę zdarzeń zasymulować.

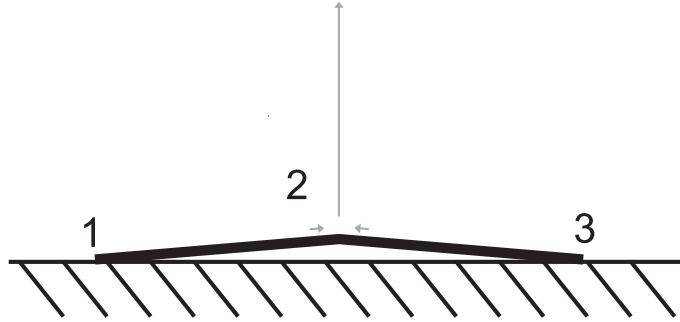
Remedium na klekotanie polega na pozostawieniu ograniczeń aktywnymi jeśli są dezaktywowane zbyt wiele razy w ciągu krótkiego przedziału czasu.

Błędy numeryczne

Kłopoty związane z błędami numerycznymi zostały zasygnalizowane już w sekcji 3. Przypomnijmy: na skutek niedokładności prowadzonych obliczeń ogniwa mogą się wydłużać lub skracać. Dodatkowo może nam zależeć aby kąty między niektórymi ogniwami pozostawały stałe. Niedokładności numeryczne mogą temu przeszkadzać. Proponujemy systematyczne remedium na te problemy oparte na idei regulatora PD. Rozważmy $\delta_\epsilon > 0$ i równanie różniczkowe

$$\ddot{\epsilon} = -\epsilon/\delta_\epsilon^2 - 2\dot{\epsilon}/\delta_\epsilon. \quad (33)$$

Rysunek 6: Problemy z dyskretyzacją czasu. Złącza 1 i 3 stoją na ziemi. Niewielkie przyspieszenia stabilizujące długość ogniów przekładają się na dowolnie duże przyspieszenie złącza 2.



Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wiemy, że bez względu na warunki początkowe funkcja ϵ opisana powyższym równaniem zbiega do zera, przy czym jej zbieżność asymptotyczna jest wykładnicza ze stałą czasową δ_ϵ .

Powiedzmy, że pewna dynamiczna wielkość (długość ogniwa lub kąt) powinna mieć stałą wartość \bar{y} . Tymczasem jej faktyczna wartość w danej chwili to y . Powiedzmy ponadto, że jesteśmy w stanie obliczyć prędkość zmian y , czyli \dot{y} . Stałość y jest wymuszana przez odpowiednie równanie, w którym parametrem jest przyspieszenie (lub przyspieszenie kątowe). Proponowane tu remedium na błędy numeryczne polega na tym aby potraktować ϵ jako błąd wielkości y , czyli przyjąć

$$\epsilon = y - \bar{y}, \quad \dot{\epsilon} = \dot{y},$$

oraz zmodyfikować przyspieszenie (przyspieszenie kątowe) w odpowiednim równaniu o prawą część (33). W ten sposób pojawiające się błędy numeryczne powinny zanikać wykładniczo ze stałą czasową δ_ϵ . Pozostaje pytanie jak dobrać tę stałą. Otóż powinna ona być kilkukrotnie (np. 5-krotnie) większa niż stała δ używana jako odległość między dyskretnymi momentami symulacji. Chodzi o to, aby wykładniczy zanik błędów mógł być dobrze przybliżony kawałkami, w których przyspieszenia są stałe.

Problemy z dyskretyzacją czasu

Określenie odległości między dyskretnymi chwilami symulacji jest zagadnieniem, które znalazło systematyczne rozwiązanie, np. w postaci metody Rungego-Kutty numerycznego rozwiązywania układów równań różniczkowych.

Tutaj proponujemy podejście znacznie prostsze, które można nazwać metodą Eulera z cofaniem się przy detekcji błędów. Przyjmujemy mianowicie, że odległość między dyskretnymi chwilami symulacji jest stała dopóki pewne oszacowanie błędu jest dostatecznie małe. Jeśli oszacowanie to przekracza pewien próg, wówczas przedział czasu jest dzielony na dwie połowy. Obie połowy są także poddawane testowi na błędy i ewentualnie dzielone (i tak rekurencyjnie).

Najpierw zademonstrujemy na przykładzie skąd mogą się brać bardzo duże błędy numeryczne. Przyjrzyjmy się Rysunkowi 6. Załóżmy, że na skutek błędów numerycznych ogniwa są nieco krótsze niż ich nominalne długości. Powiedzmy, że błędy te są kompensowane przyspieszeniami odśrodkowymi końców ogniw. Nawet jeśli te przyspieszenia są małe, przyspieszenie złącza 2 jest tym większe, im kąt między ogniwami jest bliższy π i może być dowolnie duże. W rezultacie, w ciągu kwantu czasu o z góry zadanej długości złącze 2 może zostać rozpędzone do dowolnej prędkości, po czym pociągnie za sobą pozostałe złącza. Dałoby to zabawny efekt “wystrzeliwania” obiektu w górę. Efekt ten nie miałby miejsca w rzeczywistości, ponieważ przyspieszenie zostałoby zredukowane kiedy tylko błędy długości ogniw zostałyby skompensowane a to stałoby się bardzo szybko.

Powyższy przykład można uogólnić w następujący sposób: kiedy kąty między kilkoma sąsiednimi ogniwami są bliskie π , zaś zewnętrzne złącza takiego układu są w jakiś sposób usztywnione, wówczas umiarkowane przyspieszenia złącz stabilizujące długości ogniw mogą się przełożyć na bardzo duże przyspieszenia tych samych złącz prostopadłe do ogniw. Przyspieszenia te działają jednak bardzo krótko i jeśli symulator założy ich stałość przez dość długi kwant czasu, może to doprowadzić do absurdalnych przesunięć i prędkości złącz.

Jako remedium na trudności podobne do opisanych powyżej proponujemy cofanie czasu przy stwierdzeniu znacznych błędów numerycznych. Powiedzmy, że na początku czasu przyspieszenie i -tego złącza wynosi a_i zaś po tym kwancie czasu wynosi a'_i . Nie wiemy jak przyspieszenie zmieniło się w tym czasie. Posłużymy się więc heurystyką, która mówi, że błąd oszacowania prędkości pod koniec kwantu czasu związany ze zmianą przyspieszenia jest na poziomie

$$\|a'_i - a_i\|\delta.$$

Odpowiada to sytuacji, w której przyspieszenie zmieniło się na a'_i natychmiast po rozpoczęciu kwantu czasu i takie już pozostało. Jeśli dla pewnego i powyższy błąd przekracza pewien próg (np. równy 1), wówczas przywracany jest stan obiektu sprzed kwantu czasu, po czym symulacja wydarzeń z tego kwantu odbywa się w dwóch etapach równej długości.

Część III

Przykładowe obiekty

Niektóre płaskie łańcuchy kinematyczne odgrywają rolę obiektów testowych służących do ewaluacji i porównywania rozmaitych algorytmów. Zwykle dynamika takich obiektów jest znana w postaci zwartych wzorów na drugie pochodne (po czasie) wszystkich zmiennych stanu. Prezentujemy kilka takich przykładowych obiektów. W znacznej części nie spełniają one założenia, które towarzyszyło nam w poprzednich częściach niniejszego dokumentu — ich masa może być rozlokowana w ogniwach a nie jedynie w złączach.

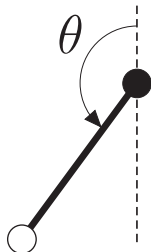
13 Wahadła z jednym nieruchomym złączem

Niniejszy rozdział poświęcony jest płaskim łańcuchom kinematycznym których jedno z krańcowych złącz (powiedzmy, że pierwsze) jest nieruchome. Są one sterowane przez przykładanie momentów sił do złącz; zwykle zarówno do ruchomych jak i do nieruchomego. Obiekty tego rodzaju są zwykle interpretowane jako wahadła (ang. *pendulum*). Problem sterowania z nimi związany polega na tym aby je stabilizować pionowo w górze lub doprowadzić do ustawienia pionowo w dół i wtedy stabilizować.

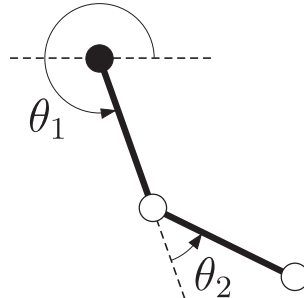
13.1 Jedno ogniwo

Jednym z najprostszych obiektów dynamicznych jest pojedyncze wahadło [6], składające się ze sztywnego ogniwa o jednostkowej długości i jednostkowej masie skupionej w jego końcu, Rys. 7. Stan obiektu opisywany jest przez kąt θ między wahadłem a pionem oraz prędkość kątową $\dot{\theta}$. Dynamika obiektu

Rysunek 7: Pojedyncze wahadło: Łańcuch z jednym złączem nieruchomym i jednym ogniwem.



Rysunek 8: Podwójne wahadło: Łańcuch z jednym złączem nieruchomym i dwoma ogniwami.



opisana jest równaniem

$$\ddot{\theta} = \sin \theta + \tau$$

przy czym τ jest to moment przykładany do nieruchomego złącza o takim kierunku jak kąt θ . Na ogół przyjmuje się, że $\tau \in [-0.225, 0.225]$ a celem sterowania wahadłem jest ustawienie wahadła w górze i jego stabilizacja. Osiągnięcie tego celu jest o tyle kłopotliwe, że maksymalny moment nie wystarczy aby przenieść wahadło z dołu do góry i wobec tego należy je “rozbujać”.

13.2 Dwa ogniwa

Manipulator z jednym złączem nieruchomym i dwoma ogniwami nosi nazwę *Acrobot* i jest interpretowany jako akrobata, który buja się na drążku operując jedynie momentem siły w biodrach. W poniższym opisie założymy, że może także przykładać moment siły w nadgarstku.

Mamy 4 zmiennych opisujących stan: kąty $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ między sąsiednimi ogniwami oraz ich pochodne po czasie $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$. Sterowanie łańcuchem odbywa się poprzez przykładanie momentów siły τ_1, τ_2 do złącz. Momenty te mają taki kierunek jak kąty θ_1, θ_2 , odpowiednio. Przyspieszenia kątowe złącz wynikają z momentów jako rozwiązanie następującego równania.

$$B(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + h(\theta) = \tau$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 B_{1,1} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + I_1 + I_2 \\
 B_{1,2} = B_{2,1} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + I_2 \\
 B_{2,2} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -m_2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) - 2m_2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \\
 c_2 &= m_2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(\theta_1) + m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 h_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2).
 \end{aligned}$$

Stałe pojawiające się w powyższych wzorach mają wartości i interpretacje przedstawione w poniższej tabeli.

stała	opis	wartość
l_1, l_2	długości ogniw	1.0
l_{c1}, l_{c2}	środki masy ogniw	0.5
m_1, m_2	masy ogniw	1.0
I_1, I_2	inercje ogniw	1.0

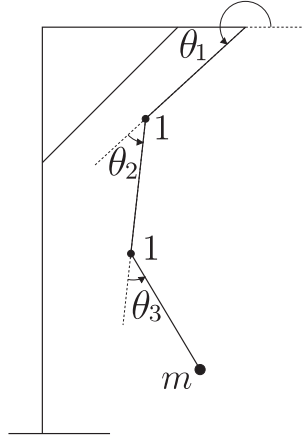
13.3 Trzy ogniwa

Manipulator z jednym złączem nieruchomym i trzema ogniwami został wykorzystany do demonstracji pewnego algorytmu uczenia się w [7]. Miał tam interpretację ramienia podnoszącego ciężarek przymocowany na końcu ostatniego ogniwa (Rys. 9).

Mamy 6 zmiennych opisujących stan: kąty $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ między sąsiednimi ogniwami oraz ich pochodne po czasie $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$. Sterowanie łańcuchem odbywa się poprzez przykładanie momentów siły τ_1, τ_2, τ_3 do złącz. Przyspieszenia kątowne złącz wynikają z momentów jako rozwiązanie następującego równania.

$$B(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + h(\theta) = \tau$$

Rysunek 9: Manipulator z jednym złączem nieruchomym i trzema ogniwami.



gdzie

$$\begin{aligned}
 B_{1,1} &= 3 + 2 \cos \theta_2 + m(3 + 2 \cos \theta_2 + 2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 \cos \theta_3) \\
 B_{1,2} = B_{2,1} &= 1 + \cos \theta_2 + m(2 + \cos \theta_2 + \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 \cos \theta_3) \\
 B_{1,3} = B_{3,1} &= m(1 + \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos \theta_3) \\
 B_{2,2} &= 1 + m2(1 + \cos \theta_3) \\
 B_{2,3} = B_{3,2} &= m(1 + \cos \theta_3) \\
 B_{3,3} &= m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 2(\sin\theta_2 + m(\sin\theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3))) \\
&\quad -\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 m 2(\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_3) \\
&\quad -\dot{\theta}_2^2(\sin\theta_2 + m(\sin\theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3))) \\
&\quad -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 m 2(\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_3) \\
&\quad -\dot{\theta}_3^2 m(\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_3) \\
c_2 &= \dot{\theta}_1^2(\sin\theta_2 + m(\sin\theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3))) \\
&\quad -\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 m 2\sin\theta_3 \\
&\quad -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 m 2\sin\theta_3 \\
&\quad -\dot{\theta}_3^2 m\sin\theta_3 \\
c_3 &= \dot{\theta}_1^2 m(\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_3) \\
&\quad +\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 m 2\sin\theta_3 \\
&\quad +\dot{\theta}_2^2 m\sin\theta_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= g((2 + m)\cos\theta_1 + (1 + m)\cos(\theta_1 + \theta_2) + m\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \\
h_2 &= g((1 + m)\cos(\theta_1 + \theta_2) + m\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \\
h_3 &= gm\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).
\end{aligned}$$

We wzorach na h , stała $g = 9.81$ oznacza ziemskie przyspieszenie grawitacyjne.

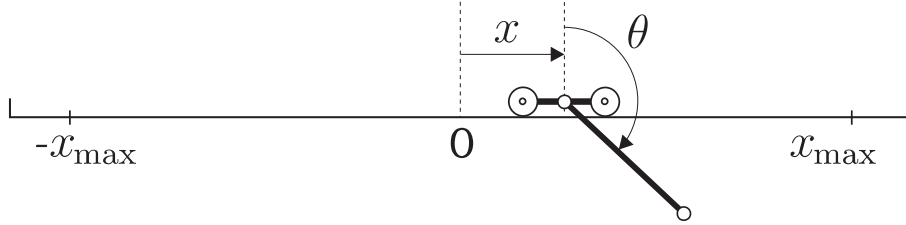
14 Wahadła z jednym złączem na prostej

Niniejszy rozdział poświęcony jest takim obiektom, że ruch jednego z ich krańcowych złącz jest ograniczony do prostej. Obiekty tego rodzaju są zwykle interpretowane jako wielostopniowe wahadła przymocowane do wózka (owo szczególne złącze). Sterowanie obiektem polega na przykładaniu siły do wózka a jego celem jest stabilizacja wahadła pionowo w górze.

14.1 Jedno ogniwo

Rozważamy złącze, którego ruch jest ograniczony do prostej, a które jest związane z pojedynczym ogniwem. Obiekt ten jest bardzo często bywa używany do testowania algorytmów uczenia się przez wzmacnianie. Jest interpretowany jako wózek z wahadłem, przy czym sterowanie wahadłem odbywa się wyłącznie przez przykładanie siły do wózka. Istnieją dwa warianty celu

Rysunek 10: Pojedyncze wahadło na wózku.



sterowania. Wariant pierwszy (*inverted pendulum* [2, 1]) polega na stabilizacji wahadła w górze. Drugi (*Cart-Pole Swing-Up* [4, 5]) polega na tym aby wahadło rozbujać, ustawić pionowo w górze i dopiero wtedy stabilizować. Złącze, którego ruch jest ograniczony do prostej będziemy dalej nazywać wózkiem zaś jedyne ogniwo wahadłem.

Mamy cztery zmienne stanu: pozycja wózka x , kąt θ między wahadłem a pionem oraz ich pochodne po czasie $\dot{x}, \dot{\theta}$. Zmienną sterującą jest siła F przykładana do wózka. Dynamika obiektu jest opisywana przez następujące równania.

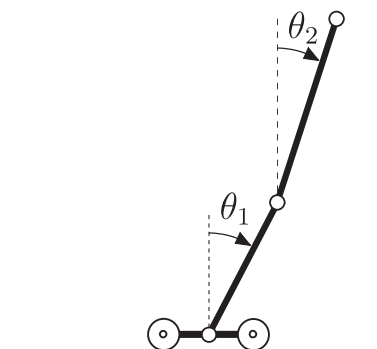
$$\ddot{\theta} = \left(\left[\frac{-F - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta + \mu_c \operatorname{sgn} \dot{x}}{m_c + m_p} \right] \cos \theta + g \sin \theta + \frac{\mu_p \dot{\theta}}{m_p l} \right) l^{-1} \left[\frac{4}{3} - \frac{m_p \cos^2 \theta}{m_c + m_p} \right]^{-1}$$

$$\ddot{x} = \frac{F + m_p l [\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta] - \mu_c \operatorname{sgn} \dot{x}}{m_c + m_p}.$$

Pojawiające się powyżej stałe mają następujące interpretacje i wartości:

- x – pozycja wózka,
- $x_{max} = 2.4$ – max. akceptowalna wartość $|x|$,
- θ – kąt wahadła,
- $F \in [-10, 10]$ – siła aplikowana do wózka (w przypadku problemu stabilizacji stosuje się raczej $F \in \{-10, 10\}$),
- $g = 9.81$ – ziemskie przyspieszenie grawitacyjne,
- $m_c = 1$ – masa wózka,
- $m_p = 0.1$ – masa wahadła,
- $l = 0.5$ – połowa długości wahadła,
- $\mu_c = 0.0005$ – współczynnik tarcia w ruchu wózka,
- $\mu_p = 0.000002$ – współczynnik tarcia w ruchu obrotowym wahadła.

Rysunek 11: Podwójne wahadło na wózku.



14.2 Dwa ogniwa

Obiektem dynamicznym stanowiącym większe niż wózek z wahadłem wyzwaniem dla algorytmów sterowania jest wózek z podwójnym wahadłem [3], Rys. 11. Obiekt jest sterowany przez siłę u przykładaną do wózka. Celem sterowania jest stabilizacja wahadła pionowo w górze. Stan obiektu opisywany jest przez położenie wózka, x , kąty θ_1, θ_2 i pochodne tych wielkości po czasie. Jeśli oznaczmy

$$q = [x, \theta_1, \theta_2]^T$$

to dynamika obiektu jest opisywana przez równanie

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + h(q) = f(u)$$

gdzie⁴

$$B(q) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_2 \\ d_2 \cos \theta_1 & d_4 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ d_3 \cos \theta_2 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & d_6 \end{bmatrix},$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_2 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -d_3 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_1 \sin \theta_1 \\ -f_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad f(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

⁴Wzory zostały przepisane z [3] prawdopodobnie bez błędu. Ponieważ jednak w tym przypadku trudno wykluczyć błędy, materiał z sekcji 14.2 należy raczej traktować jako niedoskonałe tłumaczenie odpowiedniej części raportu [3] i to do niego zainteresowany czytelnik powinien sięgnąć implementując ten obiekt.

Tabela 1: Stałe i współczynniki związane z wózkiem z podwójnym wahadłem

stałe	współczynniki
$d_1 = m_0 + m_1 + m_2$	g 9.81m/s ² , przyspieszenie grawitacyjne
$d_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1$	m_0 1.5kg, masa wózka
$d_3 = m_2 l_2$	m_1 0.5kg, masa 1-szego ogniwa
$d_4 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1$	m_2 0.75kg, masa 2-go ogniwa
$d_5 = m_2 L_1 l_2$	L_1 0.5m, długość 1-szego ogniwa
$d_6 = m_2 l_2^2 + I_2$	L_2 0.75m, długość 2-go ogniwa
$f_1 = (m_1 l_1 + m_2 L_1)g$	l_i $L_i/2$, odległość między początkiem a środkiem ciężkości i -tego ogniwa
$f_2 = m_2 l_2 g$	I_i $M_i L_i^2/12$, inercja i -tego ogniwa.

Współczynniki oraz stałe pojawiające się w powyższych wzorach mają znaczenie i wartości przedstawione w Tabeli 1.

14.3 Trzy ogniwa

Obiektem dynamicznym stanowiącym duże wyzwanie dla algorytmów sterowania jest potrójne wahadło na wózku [8], Rys. 12. Obiekt jest sterowany przez siłę u przykładaną do wózka. Celem sterowania jest stabilizacja wahadła pionowo w górze. W odróżnieniu od poprzednio omawianych obiektów typu wahadło na wózku, w tym przypadku masa obiektu rozmieszczona jest w ogniwach nierównomiernie. Stan obiektu opisywany jest przez położenie wózka, x , kąty $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ i pochodne tych wielkości po czasie. Jeśli oznaczymy

$$q = [x, \theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

to dynamika obiektu jest opisywana przez równanie

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + h(q) = f(q, u)$$

gdzie⁵

$$B(q) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \cos(\theta_1) & A_3 \cos(\theta_2) & A_4 \cos(\theta_3) \\ A_9 \cos(\theta_1) & A_{10} & A_{11} \cos(\theta_1 - \theta_2) & A_{12} \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ A_{18} \cos(\theta_2) & A_{19} \cos(\theta_1 - \theta_2) & A_{20} & A_{21} \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ A_{28} \cos(\theta_3) & A_{29} \cos(\theta_1 - \theta_3) & A_{30} \cos(\theta_2 - \theta_3) & A_{31} \end{bmatrix},$$

⁵Wzory zostały przepisane z [8] prawdopodobnie bez błędu. Ponieważ jednak w tym przypadku trudno wykluczyć błędy, materiał z sekcji 14.3 należy raczej traktować jako niedoskonałe tłumaczenie odpowiedniej części artykułu [8] i to do niego zainteresowany czytelnik powinien sięgnąć implementując ten obiekt.

Tabela 2: Stałe pojawiające się we wzorach opisujących dynamikę wózka z potrójnym wahadłem.

Stała	wartość	Stała	wartość
A_1	$M + m_1 + m_2 + m_3$	A_{21}	$m_3 l_3 L_2$
A_2	$m_1 l_1 + (m_2 + m_3) L_1$	A_{22}	$-(m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1$
A_3	$m_2 l_2 + m_3 L_2$	A_{23}	$-C_2$
A_4	$m_3 l_3$	A_{24}	$C_2 + C_3$
A_5	C_c	A_{25}	$m_3 l_3 L_2$
A_6	$-m_1 l_1 - (m_2 + m_3) L_1$	A_{26}	$-C_3$
A_7	$-(m_2 l_2 + m_3 L_2)$	A_{27}	$-g(m_2 l_2 + m_3 L_2)$
A_8	$-m_3 l_3$	A_{28}	$m_3 l_3$
A_9	$m_1 l_1 + (m_2 + m_3) L_1$	A_{29}	$m_3 l_3 L_1$
A_{10}	$I_1 + m_2 l_1^2 + (m_2 + m_3) L_1^2$	A_{30}	$m_3 l_3 L_2$
A_{11}	$(m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1$	A_{31}	$I_3 + m_3 l_3^2$
A_{12}	$m_3 l_3 L_1$	A_{32}	C_3
A_{13}	$C_1 + C_2$	A_{33}	$-m_3 l_3 L_1$
A_{14}	$(m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1$	A_{34}	$-g m_3 l_3$
A_{15}	$-C_2$	A_{35}	$-m_3 l_3 L_2$
A_{16}	$m_3 l_3 L_1$	A_{36}	$-C_3$
A_{17}	$-g(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1)$	A_{37}	1.3
A_{18}	$m_2 l_2 + m_3 L_2$	A_{38}	0.506
A_{19}	$(m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1$	A_{39}	0.219
A_{20}	$I_2 + m_3 L_2^2 + m_2 l_2^2$	A_{40}	0.568

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} A_5 & A_6 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 & A_7 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 & A_8 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ 0 & A_{13} & A_{14} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + A_{15} & A_{16} \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \\ 0 & A_{22} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + A_{23} & A_{24} & A_{25} \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3 + A_{26} \\ 0 & A_{33} \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 & A_{35} \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 + A_{36} & A_{32} \end{bmatrix},$$

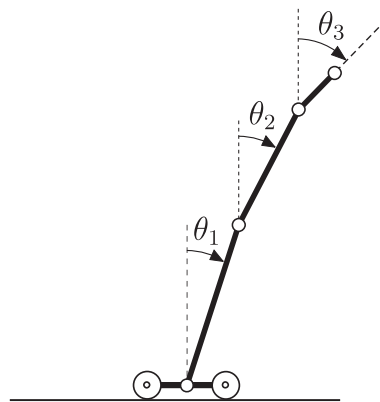
$$h(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{17} \sin(\theta_1) \\ A_{27} \sin(\theta_2) \\ A_{34} \sin(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad f(q, u) = \begin{bmatrix} K_s u - \text{sign}(x) \mu_x A_{37} \\ -\text{sign}(\theta_1) \mu_1 A_{38} \\ -\text{sign}(\theta_2) \mu_2 A_{39} \\ -\text{sign}(\theta_3) \mu_3 A_{40} \end{bmatrix}.$$

Stałe pojawiające się w powyższych wzorach zostały zestawione w tabeli 2 oraz współczynniki zestawione w tabeli 3.

Tabela 3: Wartości i znaczenie współczynników rządzących dynamiką wózka z potrójnym wahadłem.

g	$9.8m/s^2$, przyspieszenie grawitacyjne
M	$1.014kg$, masa wózka
m_1	$0.4506kg$, masa pierwszego ogniwa
m_2	$0.219kg$, masa drugiego ogniwa
m_3	$0.0568kg$, masa trzeciego ogniwa
l_1	$0.37m$, odległość od początku 1-szego ogniwa do środka jego masy
l_2	$0.3m$, odległość od początku 2-go ogniwa do środka jego masy
l_3	$0.05m$, odległość od początku 3-go ogniwa do środka jego masy
L_1	$0.43m$, długość 1-szego ogniwa
L_2	$0.33m$, długość 2-szego ogniwa
L_3	$0.13m$, długość 3-szego ogniwa
I_1	$0.0042kgm^2$, intercja 1-szego ogniwa wzgl. jego środka masy
I_2	$0.0012kgm^2$, intercja 2-go ogniwa wzgl. jego środka masy
I_3	$0.00010609kgm^2$, intercja 3-go ogniwa wzgl. jego środka masy
C_c	$5.5Nms$, współczynnik tarcia dynamicznego wózka o podłoże
C_1	$0.00026875Nms$, wsp. tarcia dynamicznego 1-szego złącza
C_2	$0.00026875Nms$, wsp. tarcia dynamicznego 2-go złącza
C_3	$0.00026875Nms$, wsp. tarcia dynamicznego 3-go złącza
K_s	$24.7125N/V$, wzmocnienie sterowanie/siła przykładana do wózka
μ_x	0.07 , wsp. tarcia coulombowskiego wózka
μ_1	0.003 , wsp. tarcia coulombowskiego 1-szego ogniwa
μ_2	0.003 , wsp. tarcia coulombowskiego 2-go ogniwa
μ_3	0.003 , wsp. tarcia coulombowskiego 3-go ogniwa

Rysunek 12: Potrójne wahadło na wózku.



Literatura

- [1] C. W. Anderson, "Learning to Control an Inverted Pendulum Using Neural Networks," *IEEE Control System Magazine*, vol. 9, pp. 31-37, April 1989.
- [2] A. G. Barto, R. S. Sutton, and C. W. Anderson, "Neuronlike Adaptive Elements That Can Learn Difficult Learning Control Problems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 13(5), pp. 834-846, 1983.
- [3] A. Bogdanov, "Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart," Technical Report CSE-04-006, December 2004.
- [4] K. Doya, "Efficient Nonlinear Control with Actor-Tutor Architecture," *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 9, pp. 1012-1018, MIT Press: Cambridge, MA, 1997.
- [5] K. Doya, "Reinforcement Learning in Continuous Time and Space," *Neural Computation*, 12:243-269, 2000.
- [6] T. J. Perkins, A. G. Barto, "Lyapunov Design for Safe Reinforcement Learning," *Journal of Machine Learning Research* 3 (2002) 803-832.
- [7] M. T. Rosenstein and A. G. Barto, "Robot Weightlifting By Direct Policy Search," *Proceedings of The 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Seattle, Washington, August 2001, pp. 839-846.
- [8] J. Si and Y.-T. Wand, "On-Line Learning Control by Association and Reinforcement," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12, pp. 264-276, March 2001.